ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 1997. Том 4, № 2, 43–50

УДК 519.714.2

КОНЕЧНАЯ ПОРОЖДЕННОСТЬ АЛГЕБР РАСПРЕДЕЛЕНИЙ*)

Ф. И. Салимов

Рассматриваются алгебры распределений над рациональными векторами, сигнатуры которых индуцированы системами функций k-значной логики. Для одного семейства алгебр получен критерий конечной порожденности.

Одной из основных задач в структурной теории вероятностных автоматов является задача генерирования случайных величин с использованием некоторого базового множества датчиков случайности и некоторого набора преобразователей. При фиксированном множестве преобразователей интерес представляет задача анализа требований на исходные датчики в зависимости от генерируемого класса случайных величин. В [2, 3] подобная проблема рассматривалась в случае, когда преобразование осуществлялось функциями k-значной логики. Изучение возможностей такой модели приводит к исследованию алгебр над распределениями вероятностей случайных величин, сигнатуры которых определяются заданным классом преобразователей. В настоящей работе продолжаются исследования конечно порожденных алгебр распределений, сигнатуры которых индуцированы системами функций k-значной логики, $k \geqslant 2$.

Пусть $T^{(k)}$, $k \geqslant 2$, — k-мерный стохастический симплекс, P_k — множество всех функций k-значной логики, $E_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, $\overline{p}_i = (p_{i0}, p_{i1}, \dots, p_{ik-1})$, $\overline{p}_i \in T^{(k)}$, $i = 1, 2, \dots$ Для каждой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из P_k и каждого $\sigma \in E_k$ определим функцию

$$f^*_\sigma(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_n) = \sum \prod_{i=1}^{n} p_{i\alpha_i} f^\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \tag{1}$$

где суммирование осуществляется по всем наборам $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ из E_k^n, $\sigma = 0, 1, \dots, k-1$, а

$$f^\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sigma; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01256).

Систему

$$(f_0^*(\overline{p}_1,\overline{p}_2,\ldots,\overline{p}_n), f_1^*(\overline{p}_1,\overline{p}_2,\ldots,\overline{p}_n),\ldots,f_{k-1}^*(\overline{p}_1,\overline{p}_2,\ldots,\overline{p}_n)) \qquad (2)$$

назовем *оператором*, порожденным функцией f, и обозначим через $\bar{f}^*(\overline{p}_1,\overline{p}_2,\ldots,\overline{p}_n)$.

Содержательно каждый вектор $\overline{p}_i$ можно интерпретировать как распределение вероятностей некоторой случайной дискретной величины ξ_i со значениями из E_k. Тогда $\bar{f}^*(\overline{p}_1,\overline{p}_2,\ldots,\overline{p}_n)$ является распределением вероятностей случайной величины $f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ при условии, что ξ_i взаимно независимы, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Пусть $F \subseteq P_k$. Положим $F^* = \{\bar{f}^* \mid f \in F\}$. Тогда система $< T^{(k)};\ F^* >$ является алгеброй [1]. Подалгебры алгебры $< T^{(k)};\ F^* >$ называются ***алгебрами распределений.*** Пусть алгебра $< G;\ F^* >$ является пересечением всех подалгебр алгебры $< T^{(k)};\ F^* >$, носители которых содержат множество $\mathscr{P}$. Тогда $\mathscr{P}$ — система образующих алгебры $< G;\ F^* >$. В этом случае положим $G = [\mathscr{P}]_{F^*}$, где $[\mathscr{P}]_{F^*}$ обозначает замыкание множества $\mathscr{P}$ относительно F^*. Алгебра, имеющая конечную систему образующих, называется ***конечно порожденной.*** Из мощностных соображений следует, что алгебры со счетной сигнатурой и с более чем счетным носителем не имеют конечных систем образующих. Из алгебр, имеющих счетный носитель, наибольший интерес представляют подалгебры алгебры $< B^{(k)};\ F^* >$, где через $B^{(k)}$ обозначено подмножество всех векторов k-мерного стохастического симплекса, имеющих рациональные компоненты. Как показано в [2], алгебры $< B^{(k)};\ F^* >$, $F \subseteq P_k$, не имеют конечных систем образующих. При описании семейств подалгебр алгебры $< B^{(k)};\ F^* >$ будут использоваться системы некоторых предикатов.

Пусть M — множество взаимно простых чисел. Обозначим через $[M]$ замыкание множества M относительно операции умножения чисел. Положим

$$G^{(k)}(M) = \left\{\overline{p} = \left(\frac{j_1}{r},\frac{j_2}{r},\ldots,\frac{j_k}{r}\right) \mid \overline{p} \in B^{(k)}, r \in [M], \right.$$
$$\left. \text{НОД } (j_1,j_2,\ldots,j_k) = 1\right\}.$$

Пусть $r = r_1^{\varphi_1} r_2^{\varphi_2} \ldots r_t^{\varphi_t}$. Для записи вектора

$$\left(\frac{j_1}{r_1^{\varphi_1} r_2^{\varphi_2} \ldots r_t^{\varphi_t}}, \frac{j_2}{r_1^{\varphi_1} r_2^{\varphi_2} \ldots r_t^{\varphi_t}}, \ldots, \frac{j_k}{r_1^{\varphi_1} r_2^{\varphi_2} \ldots r_t^{\varphi_t}}\right)$$

в дальнейшем, в зависимости от контекста, будем использовать одно из обозначений $\overline{q}(j_1,j_2,\ldots,j_k/r_1,r_2,\ldots,r_t;\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_t)$ или $\overline{q}(j_1,j_2,\ldots,j_k/r;\ 1)$.

В [2] показано, что система $< G^{(k)}(M);\ P_k^* >$ является алгеброй распределений тогда и только тогда, когда все числа из M простые. Там же при $k \geqslant 3$ получен критерий конечной порожденности алгебр $< G^{(k)}(M);\ P_k^* >$. Определим семейство подалгебр $< G_d^{(k)}(M);\ P_k^* >$ алгебры $< G^{(k)}(M);\ P_k^* >$.

Пусть M — множество простых чисел и d — некоторое число, $d \notin M$. Положим $G_d^{(k)}(M) = \{\overline{p} = \overline{q}(j_1, j_2, \dots, j_k/r;\ 1) \mid \overline{p} \in G^{(k)}(M)$ и существует единственный индекс i такой, что $(d, j_i) = 1$, и $(d, j_m) = d$ при $1 \leqslant m \leqslant k,\ m \neq i\}$.

Легко показать, что система $< G_d^{(k)}(M);\ F^* >$ является алгеброй для любой системы F из P_k. В настоящей работе исследуется конечная порожденность подалгебр алгебр $< G_d^{(k)}(M);\ F^* >$ при $k \geqslant 3$.

Пусть a — целое, $1 \leqslant a \leqslant d-1$. Положим

$$G_d^{(k)}(M \mid a) = \{\overline{p} = \overline{q}(j_1, j_2, \dots, j_k/r; 1) \mid \overline{p} \in G_d^{(k)}(M), r \equiv a \pmod{d}\}.$$

Лемма 1. *Для любого M множество $< G_d^{(k)}(M \mid 1)$ не пусто.*

Доказательство. Пусть $r \in [M]$. Поскольку $(r, d) = 1$, найдется $n \geqslant 1$ такое, что $r^n \equiv 1 \pmod{d}$.

Лемма 2. *Для любой системы F из P_k система $< G_d^{(k)}(M \mid 1);\ F^* >$ является алгеброй.*

Справедливость леммы 2 следует из того, что множество чисел b, удовлетворяющих условию $b \equiv 1 \pmod{d}$, замкнуто относительно операции умножения.

Основной целью настоящей работы является доказательство следующего результата.

Теорема 1. *При любом $k \geqslant 3$ алгебра $< G_d^{(k)}(M \mid 1);\ P_k^* >$ конечно порождена тогда и только тогда, когда M конечно.*

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм.

Лемма 3. *Пусть $\overline{p} \in \mathscr{P}$ и π — некоторая перестановка компонент вектора $\overline{p}$. Тогда $\pi(\overline{p}) \in [\mathscr{P}]_{P_k^*}$.*

Справедливость леммы 3 легко следует из того, что P_k содержит любую перестановку чисел из E_k.

В последующих рассуждениях векторы распределений рассматриваются с точностью до перестановки компонент.

Лемма 4. *Пусть $k \geqslant 3$, $d > 1$, $r > d$, $t > 1$, $l > 1$, $s_i > 0$, $d_i > 0$ при $1 \leqslant i \leqslant l$ и $b_i \geqslant 0$ при $1 \leqslant i \leqslant k$ — целые числа и выполнены соотношения:*

(1) $(r,d)=1$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{k} b_i = r$;

(3) $(b_i,d)=d$ при $1\leqslant i\leqslant k-1$, а $(b_k,d)=1$;

(4) $(s_i,d)=d$ при $1\leqslant i\leqslant l-2$, а $s_{l-1}=d$, $s_l\equiv r \pmod d$, $s_l<d$;

(5) $r=\sum\limits_{i=1}^{l} s_i d_i$;

(6) $\min\limits_{1\leqslant i<k} b_i \geqslant s_1\geqslant s_2\geqslant\ldots\geqslant s_{l-1}$;

(7) $s_i\leqslant ts_{i+1}$, $1\leqslant i\leqslant l-2$;

(8) $d_i>(t-1)(k-1)$ при $2\leqslant i\leqslant l-1$, а $d_l=1$.

Тогда существуют неотрицательные целые числа a_{ij}, $1\leqslant i\leqslant k$, $1\leqslant j\leqslant l$, такие, что выполняются соотношения

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i,j}=d_j,\quad 1\leqslant j\leqslant l, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{l} a_{i,j}s_j=b_i,\quad 1\leqslant i\leqslant k. \tag{4}$$

Доказательство. Определим числа a_{ij}, где $1\leqslant i\leqslant k$ и $1\leqslant j\leqslant l$, следующим образом. Положим

$$a_{1j}=\min\left(\left[\frac{\left(b_1-\sum\limits_{z=1}^{j-1}a_{1z}s_z\right)}{s_j}\right],\ d_j\right)\quad \text{при } 1\leqslant j\leqslant l-1$$

и $a_{1l}=0$. Здесь и далее $\sum\limits_{z=1}^{0}=0$. Пусть заданы числа a_{ij}, где $1\leqslant i\leqslant k-2$ и $1\leqslant j\leqslant l$. Положим

$$a_{i+1,j}=\min\left(\left[\frac{\left(b_{i+1}-\sum\limits_{z=1}^{j-1}a_{i+1,z}s_z\right)}{s_j}\right],\ d_j-\sum_{m=1}^{i}a_{mj}\right)\quad \text{при } 1\leqslant j\leqslant l-1,$$

$a_{i+1,l}=0$ и

$$a_{kj}=d_j-\sum_{m=1}^{k-1}a_{mj}\quad \text{при } 1\leqslant j\leqslant l. \tag{5}$$

Из определения чисел a_{ij} непосредственно следуют их неотрицательность и выполнение условия (3). Покажем, что выбранные числа удовлетворяют условию (4).

Рассмотрим сумму $\sum\limits_{j=1}^{l} a_{1j}s_j$. Положим

$$m_1 = \min\{j \mid a_{1j} < d_j,\ \ 1 \leqslant j \leqslant l\}.$$

1. $m_1 = l$. В этом случае $b_1 = r - s_l$, $b_k = s_l$, $b_i = 0$ при $2 \leqslant i \leqslant k-1$ и соотношение (4) выполняется очевидным образом.

2. $m_1 = l-1$. Тогда $a_{1j} = d_j$ при $1 \leqslant j \leqslant l-2$. Учитывая, что $s_{l-1} = d$ и $(b_1, d) = d$, имеем $d_{l-1}d = r - s_l d_l - \sum\limits_{j=1}^{l-2} a_{1j}s_j$, $da_{1,l-1} = b_1 - \sum\limits_{j=1}^{l-2} a_{1j}s_j$ и $a_{ij} = 0$ при $2 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant l-2$, $b_i = da_{i,l-1}$ при $2 \leqslant i \leqslant k-1$, $b_k = s_l d_l + da_{k,l-1}$.

3. $m_1 < l-1$. Тогда $a_{1j} \leqslant t-1$ при $m_1+1 \leqslant j \leqslant l-1$. В самом деле, по определению имеем

$$a_{1,m_1} = \left\lfloor \frac{\left(b_1 - \sum\limits_{z=1}^{m_1-1} a_{1z}s_z\right)}{s_{m_1}} \right\rfloor .$$

Следовательно, $0 \leqslant b_1 - \sum\limits_{z=1}^{m_1} a_{1,z}s_z < s_{m_1} \leqslant ts_{m_1+1}$. Поэтому

$$a_{1,m_1+1} = \min\left(\left\lfloor \frac{\left(b_1 - \sum\limits_{z=1}^{m_1} a_{1z}s_z\right)}{s_{m_1+1}} \right\rfloor,\ d_{m_1+1}\right) \leqslant \min(t-1, d_{m_1+1}) = t-1. \quad (6)$$

Далее индукцией по j доказывается, что $a_{1j} \leqslant t-1$ при $m_1+2 \leqslant j \leqslant l-1$. Поскольку $(b_1, d) = d$, $s_{l-1} = d$ и $a_{1l} = 0$, то

$$b_1 = \sum_{j=1}^{l} a_{1j}s_j.$$

При выполнении условия $a_{1p} = d_p$ для некоторого p, $1 \leqslant p \leqslant l-1$, из способа определения чисел a_{ij} (а именно из импликации $a_{1m} < d_m \to a_{1j} < d_j$ при $m+1 \leqslant j \leqslant l-1$) следует $a_{1j} = d_j$ при $1 \leqslant j \leqslant p-1$. Учитывая (6) и условие (8) леммы 4, имеем $d_j - a_{1j} = 0$ при $1 \leqslant j \leqslant m_1 - 1$ и $d_j - a_{1j} > (t-1)(k-2)$ при $m_1 + 1 \leqslant j \leqslant l-1$.

Пусть соотношение (4) выполняется при $i = g$, $1 \leqslant g < k-1$. По предположению индукции существует m_g, $1 \leqslant m_g \leqslant l-1$, такое, что $d_j - \sum\limits_{i=1}^{g} a_{ij} = 0$, если $1 \leqslant j \leqslant m_g - 1$, и $d_j - \sum\limits_{i=1}^{g} a_{ij} > (t-1)(k-g-1)$, если

$m_g+1 \leqslant j \leqslant l-1$. Докажем справедливость равенства (4) при $i = g+1$. Положим

$$m_{g+1} = \min\{j \mid a_{g+1,j} < d_j - \sum_{z=1}^{g} a_{zj},\ 1 \leqslant j \leqslant l-1\}.$$

Рассуждая как и в случае $i = 1$, убеждаемся, что $a_{g+1,j} = d_j - \sum\limits_{z=1}^{g} a_{zj}$ при $1 \leqslant j \leqslant m_{g+1} - 1$ и $a_{g+1,j} \leqslant t-1$ при $m_{g+1}+1 \leqslant j \leqslant l-1$. Из способа определения чисел a_{ij} с учетом соотношений $(b_{g+1}, d) = d$, $s_{l-1} = d$ и $a_{g+1,l} = 0$ получаем

$$b_{g+1} = \sum_{j=1}^{l} a_{g+1,j} s_j,$$

$d_j - \sum\limits_{i=1}^{g+1} a_{ij} = 0$ при $1 \leqslant j \leqslant m_{g+1} - 1$ и $d_j - \sum\limits_{i=1}^{g+1} a_{ij} > (t-1)(k-g-2)$ при $m_{g+1}+1 \leqslant j \leqslant l-1$. При $i = k$ равенство (4) следует из условий (2), (4), (5) и (8) леммы 4. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $n \geqslant 1$ целое, $g(n,i,j) = \binom{n}{j}\binom{j}{i}$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. Тогда для любой константы b найдется m такое, что для любой пары чисел (i,j), $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$, за исключением пар $(0,0)$, $(0,m)$, (m,m), выполняется неравенство*

$$g(m,i,j) \geqslant b.$$

Доказательство. Достаточно проверить, что для любого набора (i,j), удовлетворяющего условию леммы, функция $g(m,i,j)$ возрастает по m.

Лемма 6. *Пусть $n \geqslant 1$, $\eta \geqslant 1$, $d > 1$ — целые числа,*

$$S = \{\eta^{n-j} d^{n-j+i} \mid 0 \leqslant j \leqslant n, 0 \leqslant i \leqslant j\}$$

и $s_1, s_2, \dots, s_l$ — последовательность чисел из S, упорядоченная по возрастанию. Тогда при любом i, $1 \leqslant i \leqslant l-1$,

$$s_{i+1} \leqslant \eta d s_i.$$

Справедливость леммы очевидна. Заметим также, что условия леммы 6 выполняются и для множества $S' = S \setminus \{\eta^n d^n, d^n, 1\}$.

Будем говорить, что рациональное число s/r, $(s,r) = 1$, $0 < s < r$, *измеримо* относительно числа m, $m > 0$, если $(m,s) = 1$ и существует целое l такое, что $r = lm$. Вектор $\overline{q}$ называется *измеримым* относительно числа m, если относительно m измерима одна из его компонент.

Лемма 7. *Пусть $k \geqslant 2$, $F \subseteq P_k$ и M — некоторая совокупность простых чисел. Тогда при каждом $r \in M$ любая система образующих алгебры $< G_d^{(k)}(M);\ F^* >$ содержит по меньшей мере один вектор, измеримый относительно числа r.*

Справедливость леммы 7 устанавливается методом от противного. Пусть $r \in M$, $[\mathscr{P}]_{F^*} = G_d^{(k)}(M)$ и система $\mathscr{P}$ не содержит векторов, измеримых относительно r. Тогда для любой системы $F \subseteq P_k$ из (1) и (2) следует, что $[\mathscr{P}]_{F^*}$ не содержит векторов, измеримых относительно r.

Лемма 8. *Пусть $M = \{r_1, r_2, \ldots, r_t\}$, $r = r_1^{\varphi_1} r_2^{\varphi_2} \ldots r_t^{\varphi_t}$ и*

$$r = \sum_{i=1}^{m} \mu_i d + ld + 1,$$

где $l \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, $\mu_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i \geqslant 1)$ — некоторые целые числа, $\overline{p} = \overline{q}(1, \underbrace{d, \ldots, d}_{l \text{ раз}}, \mu_1 d, \ldots, \mu_m d \mid r; 1)$, $\mathscr{P} = \{\overline{p}\}$ и $k \geqslant m + l + 1$. Тогда для любых чисел $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_t$ $(0 \leqslant \psi_i \leqslant \varphi_i$ при $1 \leqslant i \leqslant t$, $\sum\limits_{i=1}^{t} \psi_i \geqslant 1)$ таких, что $r_1^{\psi_1} r_2^{\psi_2} \ldots r_t^{\psi_t} \equiv 1 \pmod d$ и любых неотрицательных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_k$, удовлетворяющих соотношению $r_1^{\psi_1} r_2^{\psi_2} \ldots r_t^{\psi_t} = c_1 + d \sum\limits_{j=2}^{k} c_j$, вектор $\overline{q}(c_1, c_2 d, c_3 d, \ldots, c_k d / r_1, r_2, \ldots, r_t; \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_t)$ принадлежит множеству $G_d^{(k)}(M \mid 1) \cap [\mathscr{P}]_{P_k^*}$.

Доказательство. Положим

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in E_{l+1}; \\ l+1, & \text{если } x \notin E_{l+1}. \end{cases}$$

Очевидно, что $\overline{p_1} = f^*(\overline{p}) = \overline{q}(1, d, \ldots, d, \eta d, 0, \ldots, 0 / r; 1)$, где $\eta = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i$. Каждому элементу i из E_{l+2} припишем вес $a(i)$. Положим $a(0) = 1$, $a(l+1) = \eta d$ и $a(i) = d$, $1 \leqslant i \leqslant l$. Набору $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ из E_{l+1}^n припишем вес $\prod\limits_{i=1}^{n} a(\alpha_i)$. Нетрудно заметить, что различные веса наборов из E_{l+1}^n образуют множество $S = \{\eta^{n-j} d^{n-j+i} \mid 0 \leqslant j \leqslant n, 0 \leqslant i \leqslant j\}$, причем вес $\eta^{n-j} d^{n-j+i}$ встречается $\binom{n}{j}\binom{j}{i} l^i$ раз. Положим $a = \min\{c_i \mid 2 \leqslant i \leqslant k\}$ и выберем n_1 таким, что $n_1 = \min\left\{n \mid (\eta d)^n < a d r_1^{n\varphi_1 - \psi_1} r_2^{n\varphi_2 - \psi_2} \ldots r_t^{n\varphi_t - \psi_t},\ n \geqslant 1\right\}$. Поскольку $r > \eta d$, такое n_1 найдется. Положим $g(n, i, j) = \binom{n}{j}\binom{j}{i} l^i$. Согласно лемме 3 можно выбрать n_2 таким, чтобы

выполнялось неравенство $g(n_2,i,j) \geqslant (\eta d-1)k$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, $(i,j) \notin \{(0,0),(0,m),(m,m)\}$. Положим $n = \max(n_1,n_2)$, $b_i = c_{i+1}r_1^{n\varphi_1-\psi_1}r_2^{n\varphi_2-\psi_2} \ldots r_t^{n\varphi_t-\psi_t}d$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, и $b_k = c_1 r_1^{n\varphi_1-\psi_1}r_2^{n\varphi_2-\psi_2}\ldots r_t^{n\varphi_t-\psi_t}$. Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_l$ — элементы множества S, упорядоченные в убывающем порядке, d_i — кратность веса s_i, $t = \eta d$. Так как условия леммы 4 выполнены (в условиях леммы 4 r необходимо заменить на r^n), то существуют неотрицательные числа a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant l$, такие, что выполнено (3) и (4). Полагая значение функции $u(x_1,\ldots,x_n)$ из P_k на a_{ij} наборах веса s_j равным $i-1$ (на наборах нулевого веса значение функции несущественно), будем иметь $\overline{q} = \overline{u}^*(\overline{p}_1,\overline{p}_1,\ldots,\overline{p}_1)$.

Доказательство теоремы. Необходимость следует из леммы 7.

Достаточность. Пусть $M = \{r_1,r_2,\ldots,r_t\}$. Положим $\overline{p}_1 = \overline{q}(1,d,\ldots, d,\eta_1 d/r_1, r_2,\ldots,r_t;\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_t) \in G_d^{(k)}(M \mid 1)$. Для любого $n \geqslant 1$ найдется вектор $\overline{p}_n = \overline{q}(1,d,\ldots, d,\eta_n d/r_1,r_2,\ldots,r_t;\ n\varphi_1,n\varphi_2,\ldots,n\varphi_t)$ из $G_d^{(k)}(M \mid 1)$ такой, что $\overline{p_n} \in [\{\overline{p_1}\}]_{P_k^*}$. Согласно лемме 8 любой вектор $\overline{q}(c_1,c_2,\ldots,c_k/\ r_1,\ r_2,\ldots,r_t;\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_t)$ из $G_d^{(k)}(M \mid 1)$ при $\psi_i \leqslant n\varphi_i$ принадлежит множеству $[\{\overline{p_n}\}]_{P_k^*}$. Теорема доказана.

Из приведенных результатов также получаем

Следствие. *Если M конечно, то любая алгебра $< G_d^{(k)}(M \mid 1); P_k^* >$ имеет бесконечное число одноэлементных систем образующих.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кон П.** Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.
2. **Салимов Ф. И.** Конечная порожденность некоторых алгебр над случайными величинами // Вопросы кибернетики. М., 1982. Вып. 86. С. 122–130.
3. **Салимов Ф. И.** Об одном семействе алгебр распределений // Изв. вузов. Математика. 1988. № 7. С. 64–72.

Адрес автора:

Казанский
государственный университет,
ул. Ленина, 18,
420008 Казань, Россия

Статья поступила
20 ноября 1996 г.