ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1997. Серия 1. Том 4, № 3, 3–8

УДК 519.17

СЛОЖНОСТЬ НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ВЗВЕШЕННОГО ДЖОЙНА В ГРАФЕ*)

А. А. Агеев

Подмножество ребер $J \subseteq E(G)$ в неориентированном графе G называют джойном, если не более половины ребер каждого цикла графа G содержится в J. Рассмотрена задача нахождения джойна максимального веса: при заданных графе G и реберном взвешивании $c : E(G) \to R$ найти джойн максимального веса. Показано, что данная задача является NP-трудной в случае произвольных графов и 0, 1-весов, что дает отрицательный ответ на соответствующий вопрос из [4]. Установлено также, что в случае последовательно-параллельных графов и произвольных весов рассматриваемая задача может быть решена за время $O(n^3)$, где n — число вершин в графе.

Введение

В данной работе под графом всюду понимается неориентированный мультиграф (т. е. возможны кратные ребра).

Пусть G — некоторый граф. Подмножество ребер $J \subseteq E(G)$ в графе G называют *джойном*, если не более половины ребер из каждого цикла в G принадлежат J. Ниже мы рассматриваем задачу о максимальном взвешенном джойне, которая может быть сформулирована следующим образом: при заданных графе G и реберном взвешивании $c : E(G) \to R$ найти джойн максимального веса. А. Франк [4] показал, что данная задача полиномиально разрешима в случае произвольных графов и единичных весов. В п. 2 настоящей работы устанавливается, что данная задача является NP-трудной в случае произвольных графов и 0, 1-весов, что дает отрицательный ответ на соответствующий вопрос из [4]. В п. 3 показывается, что в случае последовательно-параллельных графов и произвольных весов рассматриваемая задача может быть решена за время $O(n^3)$, где n — число вершин в графе.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке международной сети DIMANET/PECO, контракт ERBCIPDCT 94–0623, и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01614).

1. NP-полнота задачи в общем случае

Теорема 1. *Задача о максимальном взвешенном джойне* NP*-полна, если граф G — произвольный и $c(e) \in \{0, 1\}$ для всех $e \in E(G)$.*

Доказательство. Для того чтобы показать, что задача о максимальном взвешенном джойне с весовой функцией, принимающей значения из множества $\{0, 1\}$, NP-трудна, достаточно показать, что NP-полна следующая задача распознавания: для заданных графа G, целого числа k и подмножества ребер $F \subseteq E(G)$ определить, существует ли джойн J такой, что $J \subseteq F$ и $|J| \geqslant k$. Покажем, что к этой задаче сводится классическая NP-полная задача о независимом множестве [1].

Итак, пусть граф G и целое число k образуют вход задачи о независимом множестве. Рассмотрим граф H, который получается из G добавлением новой вершины u и ребер, соединяющих u со всеми вершинами графа G. Пусть F обозначает множество этих ребер. Для любого подмножества $H \subseteq E(G)$ обозначим через $\varphi(X)$ подмножество ребер из F, соединяющих вершины из множества X с вершиной u. Пусть $X \subseteq V(G)$. Если X независимо в графе G, то каждый треугольник графа H содержит не более одного ребра из $\varphi(X)$, в то время как циклы большей длины могут иметь не более двух таких ребер; тем самым $\varphi(X)$ — джойн в H. Если же $\varphi(X)$ — джойн в H, то вершины множества X попарно несмежны, так как в противном случае граф H содержал бы треугольник с двумя ребрами из J. Таким образом, граф G содержит независимое множество мощности k тогда и только тогда, когда граф H содержит джойн $J \subseteq F$ мощности k. Теорема 1 доказана.

2. Полиномиальный алгоритм для случая последовательно-параллельных графов

Граф называется *последовательно-параллельным*, если он может быть получен из K_2 (K_n здесь и далее обозначает полный n-вершинный граф) последовательным применением следующих операций: 1) добавлением к некоторому ребру параллельного ребра; 2) заменой некоторого ребра простым путем. Следующий результат, принадлежащий Дж. Дираку [2] и Р. Даффину [3], устанавливает характеризацию класса последовательно-параллельных графов.

Теорема 2 [2, 3]. *Пусть G — некоторый граф. Для того чтобы каждый блок графа G являлся последовательно-параллельным графом, необходимо и достаточно, чтобы G не содержал подграфов, гомеоморфных графу K_4.*

Отметим, что в литературе последовательно-параллельные графы часто определяются как графы, не содержащие подграфов, изоморфных графу K_4. Теорема [2] показывает, что различие между получающимися в результате классами графов с точки зрения временной сложности алгоритмов решения задачи о максимальном взвешенном джойне несущественно. С точки же зрения техники построения алгоритмов для некоторых оптимизационных задач классическое определение оказывается более подходящим (см., например, [5]). В нашем случае, как и в [5], оказывается, кроме того, полезным использовать хорошо известное эквивалентное рекурсивное определение последовательно-параллельных графов в терминах соединений двухполюсных графов.

Под двухполюсным графом (G, s, t) понимается граф G с двумя выделенными вершинами (полюсами) s и t.

Пусть (G_1, s_1, t_1) и (G_2, s_2, t_2) — два двухполюсных графа. Граф (H, u, v) называется *последовательным соединением* графов (G_1, s_1, t_1) и (G_2, s_2, t_2), если граф H получается из графов G_1 и G_2 отождествлением вершин t_1 и s_2; при этом $E(H) = E(G_1) \cup E(G_2)$, $u = s_1$ и $v = t_2$. Граф (H, u, v) называется *параллельным соединением* графов (G_1, s_1, t_1) и (G_2, s_2, t_2), если граф H получается из графов G_1 и G_2 отождествлением вершины s_1 с вершиной s_2 и вершины t_1 с вершиной t_2; при этом $E(H) = E(G_1) \cup E(G_2)$, вершина u — результат отождествления s_1 с s_2, а вершина v — результат отождествления t_1 с t_2.

Во введенных терминах определение последовательно-параллельного графа эквивалентно следующему: двухполюсный граф (G, s, t) является *последовательно-параллельным*, если и только если выполнено одно из двух условий: 1) он состоит из одного ребра st; 2) он получается либо последовательным, либо параллельным соединением из двух двухполюсных последовательно-параллельных графов.

Пусть J — джойн в графе G. Определим функцию $w_J : E \to \{-1, +1\}$ соотношением

$$w_J(e) = \begin{cases} -1, & \text{если } e \in J, \\ +1, & \text{если } e \notin J. \end{cases}$$

Из определения джойна следует, что каждый цикл графа G имеет неотрицательный вес относительно w_J. Произвольная функция из $E(G)$ в $\{-1, +1\}$, обладающая таким свойством, однозначно определяет некоторый джойн и называется *консервативным взвешиванием* графа G [6]. Для любых двух вершин x и y графа G через $\lambda_J(G, x, y)$ обозначим длину минимального взвешенного (относительно w_J) пути, связывающего x и y.

Лемма 1. *Пусть (G, s, t) — произвольный двухполюсный граф и x — длина кратчайшего (по числу ребер) пути между s и t. Тогда для любого джойна J графа G*

$$-x \leqslant \lambda_J(G, s, t) \leqslant x. \tag{1}$$

Доказательство. Второе неравенство верно, так как согласно определению величина $\lambda_J(G, s, t)$ не превосходит длины любого (s, t)-пути. Докажем первое неравенство. Пусть J — джойн графа (G, s, t). Пусть P' и P'' — множества ребер кратчайшего по числу ребер и минимального взвешенного (s, t)-путей соответственно. Обозначим через P симметрическую разность множеств P' и P''. Достаточно показать, что суммарный вес ребер из $P \cap P''$ не меньше $-|P \cap P'|$. Легко видеть, что P порождает в G эйлеров подграф. Обозначим его через H. Так как H — эйлеров, то он распадается на непересекающиеся по ребрам циклы $C_1, \ldots, C_r$. Пусть $E(C_i)$ обозначает множество ребер цикла C_i. Тогда $E(C_i) = L'_i \cup L''_i$, где $L'_i \subseteq P'$ и $L''_i \subseteq P''$. Так как w_J — консервативное взвешивание, то

$$0 \leqslant \sum_{e \in L'_i} w_J(e) + \sum_{e \in L''_i} w_J(e) \leqslant |L'_i| + \sum_{e \in L''_i} w_J(e),$$

т. е. $\sum\limits_{e \in L''_i} w_J(e) \geqslant -|L'_i|$. Суммируя последние неравенства по всем i от 1 до r, получаем требуемое. Лемма 1 доказана.

Пусть (G, s, t) — двухполюсный последовательно-параллельный граф, в котором каждому ребру e приписан произвольный вес $c(e)$. При любом фиксированном целом k пусть $Q(G, s, t, k)$ обозначает максимальное значение $c(J) = \sum_{e \in J} c(e)$, взятое по всем джойнам J в G, для которых $\lambda_J(G, s, t) = k$; если множество таких джойнов пусто, полагаем $Q(G, s, t, k) = -\infty$.

Теорема 3. *Пусть (G_i, s_i, t_i) $(i = 1, 2)$ — двухполюсные последовательно-параллельные графы. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) *если граф (G, s, t) — результат последовательного соединения данных графов, то*

$$Q(G, s, t, k) = \max\{Q(G_1, s_1, t_1, k_1) + Q(G_2, s_2, t_2, k_2) : k_1 + k_2 = k\}; \tag{2}$$

(б) *если граф (G, s, t) — результат параллельного соединения данных графов, то*

$$\begin{aligned} Q(G, s, t, k) = \max(&\max\{Q(G_1, s_1, t_1, k) + Q(G_2, s_2, t_2, k_2) : k + k_2 \geqslant 0\}, \\ &\max\{Q(G_1, s_1, t_1, k_1) + Q(G_2, s_2, t_2, k) : k + k_1 \geqslant 0\}). \end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. Заметим, что в обоих случаях джойн J в G является объединением двух непересекающихся джойнов J_1 и J_2 в подграфах G_1 и G_2 соответственно. Следовательно, $c(J) = c(J_1) + c(J_2)$. В случае последовательного соединения верно обратное утверждение: объединение J любых двух джойнов J_1 и J_2 в G_1 и G_2 соответственно, является джойном в G; при этом $\lambda_J(G,s,t) = \lambda_{J_1}(G_1,s,t) + \lambda_{J_2}(G_2,s,t)$. Отсюда следует утверждение (а). Пусть имеет место параллельное соединение и $J = J_1 \cup J_2$ — некоторый джойн в G. Заметим, что для джойнов J_1 и J_2 справедливо соотношение $\lambda_{J_1}(G_1,s,t) + \lambda_{J_2}(G_2,s,t) \geqslant 0$. Обратно, объединение любой пары джойнов J_1 и J_2 в графах G_1 и G_2, удовлетворяющих этому соотношению, будет джойном в G. Это доказывает утверждение (б). Теорема 1 доказана.

Процесс построения последовательно-параллельного графа может быть представлен корневым бинарным деревом. Каждой вершине этого дерева соответствует некоторый подграф данного графа; при этом корню соответствует исходный граф, листьям — все подграфы, изоморфные K_2. Если подграфы H_1 и H_2 соответствуют потомкам вершины, соответствующей подграфу H, то H получается из H_1 и H_2 либо последовательным, либо параллельным соединением. Линейный алгоритм построения такого дерева описан в [7]. Используя это дерево, рекуррентные соотношения (2), (3) и утверждение леммы 1, можно последовательно вычислить величины $Q(H,s,t,k)$ для всех подграфов H графа G. Так как по лемме 1 суммарное количество этих величин равно $O(n^2)$, то трудоемкость указанных вычислений не будет превосходить $O(n^3)$ элементарных операций.

На следующем этапе с использованием стандартной техники динамического программирования по найденным значениям $Q(H,s,t,k)$ находится оптимальный джойн. Общая трудоемкость описанного алгоритма не превосходит $O(n^3)$ элементарных операций.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. **Dirac G. A.** A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs // J. London Math. Soc. 1952. V. 17, N 1. P. 85–92.
3. **Duffin R. J.** Topology of series parallel networks // J. Math. Anal. Appl. 1965. V. 10, N 2. P. 303–318.
4. **Frank A.** Conservative weightings and ear decompositions of graphs // Combinatorica. 1993. V. 13, N 1. P. 65–82.

5. **Hassin R., Tamir A.** Efficient algorithms for optimization and selection on series-parallel graphs // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1986. V. 7, N 3. P. 379–389.
6. **Sebő A.** Undirected distances and the postman structure of graphs // J. Combin. Theory. Ser. B. 1990. V. 49, N 1. P. 10–39.
7. **Valdes J., Tarjan R. E., Lawler E. L.** The recognition of series parallel digraphs // SIAM J. Comput. 1982. V. 11, N 2. P. 298–313.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: ageev@math.nsc.ru

Статья поступила
23 апреля 1997 г.