ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1997. Серия 1. Том 4, № 3, 9–17

УДК 519.6

О МИНИМАЛЬНЫХ ПОКРЫТИЯХ БУЛЕВА КУБА ЦЕНТРИРОВАННЫМИ АНТИЦЕПЯМИ*)

О. М. Касим-Заде

Рассматриваются покрытия булева n-куба $B^n = \{0,1\}^n$ семействами его подмножеств специального вида, называемых центрированными антицепями. Каждое такое подмножество состоит из попарно несравнимых наборов, имеющих по крайней мере одну общую единичную компоненту; к числу центрированных антицепей относится также одноэлементное множество, содержащее единственный набор $\widetilde{0}^n$, сплошь состоящий из нулей. Установлено, что для всякого $n \geqslant 1$ наименьшее число центрированных антицепей, объединение которых покрывает n-куб, равно $n\lfloor\log_2 n\rfloor + 2(n - 2^{\lfloor\log_2 n\rfloor}) + 2$. Для каждого n в явном виде построено минимальное покрытие.

Будем рассматривать булев n-куб $B^n = \{0,1\}^n$ как частично упорядоченное множество с обычным отношением частичного порядка: наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ из B^n связаны соотношением $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$, если при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant n$, выполнено неравенство $\alpha_i \leqslant \beta_i$ (считается, что $0 < 1$). Наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ называются *несравнимыми*, если не выполняется ни одно из соотношений $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$ и $\tilde{\beta} \leqslant \tilde{\alpha}$. *Антицепью* в n-кубе B^n называется всякое непустое подмножество, состоящее из попарно несравнимых наборов. Известно, что наименьшее число антицепей, объединение которых покрывает булев n-куб, равно $n+1$, причем минимальное покрытие единственно и состоит из $n+1$ слоев, каждый из которых образован наборами, содержащими одинаковое количество единиц (необходимые сведения по теории булевых функций и геометрии булева куба можно найти в [1]).

Множество наборов из n-куба B^n назовем *центрированным*, если все входящие в него наборы имеют по крайней мере одну общую единичную компоненту или если это множество содержит единственный набор

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01068) и Франко-Русского Центра по прикладной математике и информатике им. А. М. Ляпунова при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова.

$\widetilde{0}^n$, сплошь состоящий из нулей. Всякую общую единичную компоненту всех наборов какого-либо центрированного множества будем называть *центром* этого множества (считается, что центр одноэлементного множества $\{\widetilde{0}^n\}$ не определен). Нетрудно показать, что наименьшее число центрированных множеств, объединение которых покрывает булев n-куб, равно $n+1$, причем минимальное покрытие единственно. Оно состоит из одноэлементного множества $\{\widetilde{0}^n\}$ и n интервалов размерности $n-1$, проходящих через набор $\widetilde{1}^n$, сплошь состоящий из единиц.

В работе рассматриваются покрытия булева n-куба центрированными антицепями. Такая задача возникла в работе [2] при изучении ранга неявных представлений булевых функций над замкнутыми классами монотонных функций, удовлетворяющих условию $\langle A^\infty \rangle$, когда потребовалось оценить наименьшее число центрированных антицепей, покрывающих булев куб заданной размерности. В [2] была дана верхняя оценка этой величины вместе с конструкцией соответствующего покрытия и отмечено, что полученная оценка является точной, а построенное покрытие — минимальным. Доказательству этого и посвящена данная работа. Для полноты изложения приводится описание покрытия, построенного в [2]. Основным результатом является

Теорема 1. *Для всякого $n \geqslant 1$ наименьшее число центрированных антицепей, объединение которых покрывает булев n-куб, равно*

$$n\lfloor \log_2 n \rfloor + 2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}) + 2. \tag{1}$$

Доказательство состоит из двух частей. Сначала устанавливается верхняя оценка, имеющая вид (1), затем равная ей нижняя.

Верхняя оценка будет доказана путем прямого построения соответствующего покрытия. Для всякого целого $a \geqslant 0$ обозначим через P_a множество всех пар целых чисел вида $(2x, 2^a - x - 1)$, где x пробегает значения $0, 1, \dots, 2^a - 1$. Для каждого $a \geqslant 0$ и каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначим через $C_{a,i}$ (возможно, пустое) множество наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ из n-куба B^n таких, что $\alpha_i = 1$ и $(w(\tilde{\alpha}_1), w(\tilde{\alpha}_2)) \in P_a$, где $\tilde{\alpha}_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$, $\tilde{\alpha}_2 = (\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$, а $w(\tilde{\beta})$ обозначает *вес* набора $\tilde{\beta}$, т. е. число единичных компонент в этом наборе.

Покажем, что при любых a и i множество $C_{a,i}$ (в случае его непустоты) является центрированной антицепью с центром i. Для этого достаточно доказать, что любые два различных набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ из $C_{a,i}$ несравнимы (без ограничения общности можно считать, что множество $C_{a,i}$ содержит не менее двух элементов). Положим $\tilde{\alpha}_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$, $\tilde{\alpha}_2 = (\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta}_1 = (\beta_1, \dots, \beta_{i-1})$ и $\tilde{\beta}_2 = (\beta_{i+1}, \dots, \beta_n)$. Тогда $(w(\tilde{\alpha}_1), w(\tilde{\alpha}_2)) \in P_a$ и $(w(\tilde{\beta}_1), w(\tilde{\beta}_2)) \in P_a$. Если $w(\tilde{\alpha}_1) = w(\tilde{\beta}_1)$ или $w(\tilde{\alpha}_2) = w(\tilde{\beta}_2)$, то наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ несравнимы, так

как несравнимы их соответствующие поднаборы. В противном случае с точностью до переобозначения наборов имеем $w(\tilde{\alpha}_1) > w(\tilde{\beta}_1)$, откуда $w(\tilde{\alpha}_2) < w(\tilde{\beta}_2)$, и снова $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ несравнимы.

Положим $b = \lfloor \log_2 n \rfloor$ и покажем, что для всякого $n \geqslant 1$ выполняется соотношение

$$\{\tilde{0}^n\} \cup \bigcup_{a=0}^{b} \bigcup_{i=1}^{n} C_{a,i} = B^n. \qquad (2)$$

Для этого достаточно доказать, что всякий ненулевой набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из B^n принадлежит одному из множеств $C_{a,i}$ при некотором $a \leqslant b$. Пусть $k = w(\tilde{\alpha})$ обозначает вес набора $\tilde{\alpha}$. Тогда найдется единственное целое a, удовлетворяющее неравенствам $2^a \leqslant k \leqslant 2^{a+1} - 1$. Очевидно, что $a \leqslant b$. Положим $x = k - 2^a$. Ясно, что $0 \leqslant x \leqslant 2^a - 1$. Отсчитаем в наборе $\tilde{\alpha}$, двигаясь слева направо и пропуская нули, $2x + 1$ единиц и обозначим через i номер компоненты набора $\tilde{\alpha}$, содержащей $(2x+1)$-ю единицу. Покажем, что $\tilde{\alpha} \in C_{a,i}$. Действительно, по построению поднабор $\tilde{\alpha}_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$ имеет вес $w(\tilde{\alpha}_1) = 2x$, откуда для поднабора $\tilde{\alpha}_2 = (\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ получаем $w(\tilde{\alpha}_2) = k - 2x - 1 = 2^a - x - 1$. Следовательно, $(w(\tilde{\alpha}_1), w(\tilde{\alpha}_2)) \in P_a$.

Соотношение (2) описывает покрытие n-куба B^n множествами $\{\tilde{0}^n\}$ и $C_{a,i}$, где $0 \leqslant a \leqslant b$ и $1 \leqslant i \leqslant n$. Оценим число непустых множеств $C_{a,i}$ в этом покрытии. Заметим, что при $a = b$ множество $C_{b,i}$ непусто лишь в том случае, если существует по меньшей мере одно целое x, $0 \leqslant x \leqslant 2^b - 1$, такое, что $2x \leqslant i - 1$ и $2^b - x - 1 \leqslant n - i$. Очевидно, что это возможно лишь в том случае, когда i удовлетворяет условию $i \leqslant 2(n - 2^b) + 1$. Поэтому если $i > 2(n - 2^b) + 1$, то множество $C_{b,i}$ заведомо пусто. Отсюда следует, что число непустых множеств $C_{a,i}$ в покрытии (2) не превосходит величины $nb + 2(n - 2^b) + 1$. Удалив из покрытия (2) пустые множества, получим покрытие n-куба центрированными антицепями, число которых не превосходит величины (1). Верхняя оценка (1) доказана.

Построенное выше покрытие булева куба центрированными антицепями было описано в [2]. Можно показать, что это покрытие является разбиением, т. е. входящие в него антицепи попарно не пересекаются. Этот факт в дальнейшем не используется, и его проверка предоставляется читателю.

Нижняя оценка. Обозначим через D^n *усеченный n-куб*, содержащий все наборы из n-куба B^n за исключением двух: набора $\tilde{0}^n$ и набора $\tilde{1}^n$. Наименьшее число центрированных антицепей, объединение которых покрывает усеченный n-куб, обозначим через $m(n)$. Так как каждый набор $\tilde{0}^n$ и $\tilde{1}^n$ сравним с любым набором из B^n, то в любом покрытии n-куба антицепями должны присутствовать две одноэлементные

антицепи $\{\widetilde{0}^n\}$ и $\{\tilde{1}^n\}$. Отсюда следует, что наименьшее число центрированных антицепей, покрывающих n-куб B^n, равно $m(n)+2$. Таким образом, для доказательства требуемой нижней оценки достаточно показать, что при всяком $n \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$m(n) \geqslant n\lfloor\log_2 n\rfloor + 2(n - 2^{\lfloor\log_2 n\rfloor}). \tag{3}$$

При доказательстве неравенства (3) будет использована верхняя оценка

$$m(n) \leqslant n\lfloor\log_2 n\rfloor + 2(n - 2^{\lfloor\log_2 n\rfloor}), \tag{4}$$

вытекающая из уже доказанной верхней оценки (1). Учитывая, что при $n=1$ оценка (3) становится тривиальной, в дальнейшем будем считать, что $n \geqslant 2$.

Рассматривая произвольное покрытие усеченного n-куба центрированными антицепями, зафиксируем в каждой из них произвольный центр и для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначим через p_i число антицепей с центром i, входящих в рассматриваемое покрытие. Набор целых чисел $(p_1, \ldots, p_n)$ будем называть *распределением*, соответствующим рассматриваемому покрытию при данном выборе центров. Если это покрытие минимально (т. е. состоит из $m(n)$ центрированных антицепей), то при любом выборе центров соответствующее распределение будем называть *минимальным распределением.*

На множестве всех целочисленных наборов с n компонентами введем два отношения: *отношение частичного порядка* $\tilde{a} \leqslant \tilde{b}$, справедливое для наборов $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\tilde{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ тогда и только тогда, когда при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant n$, выполняются неравенства $a_i \leqslant b_i$, и *отношение эквивалентности*, выполняющееся для наборов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ тогда и только тогда, когда набор $\tilde{a}$ может быть получен из набора $\tilde{b}$ перестановкой компонент (и наоборот); например, эквивалентны наборы (3,3,2), (3,2,3) и (2,3,3).

Ключевую роль в доказательстве оценки (3) играет следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Для каждого $n \geqslant 2$ всякое минимальное распределение эквивалентно набору*

$$(\underbrace{a+1, \ldots, a+1}_{r(n)\ \text{раз}}, \underbrace{a, \ldots, a}_{n-r(n)\ \text{раз}}), \tag{5}$$

где $a = \lfloor\log_2 n\rfloor$, а $r(n) = 2(n - 2^{\lfloor\log_2 n\rfloor})$.

Оценка (3) очевидным образом извлекается из теоремы 2, если учесть, что число антицепей в покрытии с распределением $(p_1, \ldots, p_n)$ равно $p_1 + \ldots + p_n$. Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1 остается лишь доказать теорему 2.

Доказательство теоремы 2 проведем индукцией по n.

Базис индукции: $n = 2$. Очевидно, что существует единственное покрытие усеченного 2-куба $D^2 = \{(0,1),(1,0)\}$ центрированными антицепями, состоящее из двух одноэлементных антицепей $\{(0,1)\}$ и $\{(1,0)\}$. Соответствующее распределение в полном согласии с теоремой 2 имеет вид (1,1).

Индуктивный переход: от $n-1$ к n, где $n \geqslant 3$. Положим $b = \lfloor \log_2(n-1) \rfloor$. В соответствии с предположением индукции всякое минимальное распределение для усеченного $(n-1)$-куба эквивалентно набору

$$(\underbrace{b+1,\ldots,b+1}_{s\ \text{раз}},\underbrace{b,\ldots,b}_{n-1-s\ \text{раз}}), \tag{6}$$

где $s = 2(n-2^b)$. Отсюда следует, что

$$m(n-1) = (n-1)b + s. \tag{7}$$

С другой стороны, так как $2^b + 1 \leqslant n \leqslant 2^{b+1}$, то величина $\lfloor \log_2 n \rfloor$ равна b при $n \leqslant 2^{b+1} - 1$ и равна $b+1$ при $n = 2^{b+1}$. Легко проверить, что в обоих случаях распределение (5) можно записать в виде

$$(\underbrace{b+1,\ldots,b+1}_{s+2\ \text{раз}},\underbrace{b,\ldots,b}_{n-s-2\ \text{раз}}) \tag{8}$$

(несложно показать, что $s \leqslant n-2$). Нетрудно также убедиться, что в обоих случаях выполняется равенство

$$n\lfloor \log_2 n \rfloor + 2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}) = nb + s + 2,$$

откуда в силу (4) вытекает, что

$$m(n) \leqslant nb + s + 2. \tag{9}$$

Рассмотрим произвольное минимальное покрытие F усеченного n-куба центрированными антицепями. Входящие в него антицепи обозначим через $A_1,\ldots,A_{m(n)}$. Зафиксируем произвольные центры этих антицепей и обозначим соответствующее распределение через $(p_1,\ldots,p_n)$.

Для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant m(n)$, и каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, подвергнем антицепь A_k следующему преобразованию: удалим из антицепи A_k все наборы, в которых i-я компонента равна единице, а у оставшихся наборов (т. е. тех, в которых i-я компонента равна нулю) удалим эту компоненту. Полученное множество наборов, принадлежащих $(n-1)$-кубу B^{n-1}, обозначим через A_k^i.

Заметим, что при всяком i среди множеств $A_1^i,\ldots,A_{m(n)}^i$ имеется не менее p_i пустых — это те множества A_k^i, для которых антицепи A_k имеют центр i. Легко проверить, что каждое непустое множество A_k^i

является центрированной антицепью и при любом i множества $A_1^i, \ldots,$ $A_{m(n)}^i$ образуют покрытие $(n-1)$-куба B^{n-1} с выколотым нулевым набором, т. е.

$$A_1^i \cup \ldots \cup A_{m(n)}^i = B^{n-1} \setminus \{\widetilde{0}^{n-1}\}.$$

Среди множеств $A_1^i, \ldots, A_{m(n)}^i$ имеется по меньшей мере одно одноэлементное множество, совпадающее с антицепью $\{\tilde{1}^{n-1}\}$. Удалим из семейства $A_1^i, \ldots, A_{m(n)}^i$ все пустые множества и все множества, совпадающие с одноэлементной антицепью $\{\tilde{1}^{n-1}\}$. Полученное семейство множеств назовем *i-редуктом* покрытия F и обозначим через F^i.

Очевидно, что i-редукт покрытия F является покрытием усеченного $(n-1)$-куба D^{n-1} центрированными антицепями. Сохранив в антицепях i-редукта те же центры, что в исходных антицепях покрытия F (и сохранив в наборах из D^{n-1} прежний порядок следования компонент), соответствующее i-редукту распределение обозначим через $(q_1^i, \ldots, q_{n-1}^i)$. Из построения i-редуктов следует, что для всякого i выполняются соотношения

$$|F^i| \leqslant m(n) - p_i - 1 \tag{10}$$

и

$$(q_1^i, \ldots, q_{n-1}^i) \leqslant (p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n). \tag{11}$$

Так как всякий i-редукт является покрытием усеченного $(n-1)$-куба, то $|F^i| \geqslant m(n-1)$. Отсюда и из (10) следует, что для каждого i выполняется неравенство $m(n-1) \leqslant m(n) - p_i - 1$. Следовательно,

$$p_i \leqslant m(n) - m(n-1) - 1. \tag{12}$$

Из последнего неравенства с учетом (7) и (9) вытекает, что при каждом i выполняется неравенство $p_i \leqslant b + 1$ и, стало быть,

$$(p_1, \ldots, p_n) \leqslant (b+1, \ldots, b+1). \tag{13}$$

Докажем, что

$$(p_1, \ldots, p_n) \geqslant (b, \ldots, b). \tag{14}$$

Обозначим через I множество тех значений i, для которых i-редукт F^i не является минимальным покрытием усеченного $(n-1)$-куба D^{n-1}. Очевидно, что для всякого $i \in I$ выполняется неравенство

$$|F^i| \geqslant m(n-1) + 1.$$

Отсюда следует, что

$$|F^1| + \ldots + |F^n| \geqslant nm(n-1) + |I|.$$

С другой стороны, в силу (10) имеем

$$|F^1| + \ldots + |F^n| \leqslant nm(n) - (p_1 + \ldots + p_n) - n = (n-1)m(n) - n,$$

так как $p_1 + \ldots + p_n = m(n)$ вследствие минимальности исходного покрытия F. Таким образом, приходим к неравенству

$$nm(n-1) + |I| \leqslant (n-1)m(n) - n.$$

Следовательно,

$$|I| \leqslant (n-1)m(n) - n - nm(n-1).$$

С учетом (7) и (9) нетрудно убедиться, что $(n-1)m(n)-n-nm(n-1) \leqslant n-s-2$. Отсюда вытекает, что $|I| \leqslant n-2$. Следовательно, существуют по меньшей мере два различных значения i_1 и i_2 таких, что i_1-редукт F^{i_1} и i_2-редукт F^{i_2} являются минимальными покрытиями усеченного $(n-1)$-куба D^{n-1}. В силу предположения индукции соответствующие этим редуктам распределения $(q_1^{i_1}, \ldots, q_{n-1}^{i_1})$ и $(q_1^{i_2}, \ldots, q_{n-1}^{i_2})$ эквивалентны набору (6). С другой стороны, в силу (11) выполняются неравенства

$$(q_1^{i_1}, \ldots, q_{n-1}^{i_1}) \leqslant (p_1, \ldots, p_{i_1-1}, p_{i_1+1}, \ldots, p_n)$$

и

$$(q_1^{i_2}, \ldots, q_{n-1}^{i_2}) \leqslant (p_1, \ldots, p_{i_2-1}, p_{i_2+1}, \ldots, p_n).$$

Так как $i_1 \neq i_2$, то каждая компонента p_i распределения $(p_1, \ldots, p_n)$ встречается в правой части одного из этих неравенств, а из вида распределения (6) вытекает, что каждая компонента левых частей этих неравенств не меньше b. Следовательно, для каждого i выполняется неравенство $p_i \geqslant b$. Но это и означает, что выполнено неравенство (14).

Из соотношений (13) и (14) в силу целочисленности распределения $(p_1, \ldots, p_n)$ следует, что это распределение эквивалентно набору

$$(\underbrace{b+1, \ldots, b+1}_{x \text{ раз}}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-x \text{ раз}}) \tag{15}$$

для некоторого x, $0 \leqslant x \leqslant n$. Остается найти x.

Заметим, что в силу минимальности исходного покрытия F должно выполняться равенство

$$m(n) = nb + x, \tag{16}$$

откуда с учетом (9) имеем $x \leqslant s+2$. Покажем, что $x \geqslant s+2$. Воспользуемся неравенством (12). Из этого неравенства с учетом (16) и (7) вытекает, что при каждом i выполняется соотношение $p_i \leqslant b + x - s - 1$, т. е.

$$x \geqslant p_i - b + s + 1. \tag{17}$$

Из неравенства (17) и соотношения (14), в силу которого каждое $p_i \geqslant b$, сразу следует, что $x \geqslant s+1$. Поэтому $x \geqslant 1$, а значит, найдется

по крайней мере одно значение i такое, что $p_i = b + 1$. Тогда для этого значения i неравенство (17) приобретает вид $x \geqslant s + 2$. Таким образом, $x = s + 2$ и, стало быть, набор (15) имеет требуемый вид (8).

Индуктивный переход обоснован. Теорема 2 доказана.

Теорема 2 заслуживает отдельного комментария. Построенное в работе минимальное покрытие булева куба центрированными антицепями отнюдь не является единственно возможным. Вообще говоря, существуют и другие минимальные покрытия, в том числе значительно отличающиеся от построенного. Центры в антицепях минимальных покрытий также определены неоднозначно. Тем не менее, как показывает теорема 2, для усеченного куба любой фиксированной размерности, по существу, имеет место единственность минимального распределения (с точностью до эквивалентности).

Из теоремы 2 также следует, что при всяком $n \geqslant 1$ выполняется равенство

$$m(n) = n\lfloor \log_2 n \rfloor + 2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}).$$

Полученное выражение совпадает с известной функцией, встречающейся в теории кодирования [3] и теории сложности [4, 5, 6]. Теорема 2 фактически утверждает, что всякое минимальное распределение для усеченного n-куба является равномерным разбиением числа $m(n)$ на n частей (речь идет о разбиениях целого числа на заданное число как можно менее отличающихся друг от друга слагаемых). То обстоятельство, что аналогичные разбиения играют важную роль в других задачах, где появляется функция, выражающая $m(n)$, послужило ориентиром при поиске доказательства нижней оценки теоремы 1 и помогло сформулировать теорему 2.

Автор выражает глубокую признательность О. Б. Лупанову за внимание, проявленное к этой работе, а также М. И. Гринчуку за полезные замечания, способствовавшие улучшению текста.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дискретная** математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974. Т. I.
2. **Касим-Заде О. М.** Об одной метрической характеристике неявных и параметрических представлений булевых функций // Мат. вопросы кибернетики. М.: Наука, 1996. Вып. 6. С. 133–188.
3. **Кислицын С. С.** Средняя длина двоичного кода с минимальной избыточностью в случае, когда вероятности кодируемых символов близки друг к другу // Теория вероятностей и ее применения. 1962. Т. 7, вып. 3. С. 342–343.

4. **Кричевский Р. Е.** Минимальная схема из замыкающих контактов для одной булевой функции от n аргументов // Дискрет. анализ: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1965. Вып. 5. С. 89–92.
5. **Hansel G.** Nombre minimal de contacts de fermeture nécessaires pour réaliser une fonction booléenne symétrique de n variables // C. R. Acad. Sci. Paris. 1964. V. 258, N 25. P. 6037–6040. Русский перевод: Ансель Ж. Минимальное число замыкающих контактов, достаточное для реализации одной симметрической булевой функции n переменных // Кибернетический сб. М.: Мир, 1968. Вып. 5 (н. с.). С. 47–52.
6. **Hansel G.** Nombre de lettres nécessaire pour écrire une fonction symétrique de n variables // C. R. Acad. Sci. Paris. 1965. V. 261, N 21. P. 4297–4300.

Адрес автора:

МГУ, мех.-мат. факультет,
Воробьевы горы,
119899 Москва, Россия.
E-mail: omkas@nw.math.msu.su

Статья поступила
28 апреля 1997 г.