ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1997. Серия 1. Том 4, № 3, 18–34

УДК 519.95

О ЧИСЛЕ СВЯЗНЫХ МНОЖЕСТВ С ЗАДАННОЙ МОЩНОСТЬЮ ОКРЕСТНОСТИ В ГРАФЕ*)

А. А. Сапоженко

Получены верхние оценки вида $2^{g(1-\varepsilon)}$ для числа d-связных множеств с окрестностью заданной мощности в графе. Оценки позволяют получать асимптотики для некоторых классов перечислительных задач.

Введение

Неравенства для числа множеств с границей заданной мощности позволяют получать асимптотики для ряда трудных перечислительных задач [6, 7]. Например, основная трудность получения асимптотического решения проблемы Дедекинда о числе монотонных булевых функций заключается именно в установлении верхних оценок числа множеств с заданной мощностью границы [2]. Получение асимптотики числа двоичных кодов с расстоянием 2 [5] также основано на использовании верхних оценок числа множеств с заданной мощностью границы в n-мерном единичном кубе. Верхние оценки для числа подмножеств в двудольных подграфах n-мерного единичного куба, порожденных соседними слоями куба, были получены в [3] и [4].

Под границей множества A вершин произвольного графа понимается множество вершин этого графа, смежных хотя бы с одной вершиной из A (т. е. *вершинная граница*). В [2–4] для числа множеств с заданной мощностью вершинной границы получены верхние оценки вида $2^{g(1-\varepsilon)}$, где g — мощность границы, а ε — некоторая положительная величина. В [8] аналогичного вида оценки получены для числа связных множеств в двудольных графах при некоторых ограничениях на степени вершин. Наряду с верхними оценками для числа множеств с заданной мощностью вершинной границы в [8] получены верхние оценки вида $2^{g(1-\varepsilon)}$ и для числа связных множеств с заданной мощностью g реберной границы.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95–01–01595).

В работе [10] получены аналогичные оценки числа связных подграфов, имеющих малую реберную границу.

Данная работа посвящена получению верхних оценок в случае произвольных (недвудольных) графов с некоторыми ограничениями на степени вершин. При этом фиксируется не мощность границы, а мощность *окрестности*, т. е. множества вместе с его границей. Такие оценки необходимы, например, для получения асимптотики числа пар множеств вершин графа, находящихся на расстоянии 2 друг от друга, асимптотики числа дискретных функций, удовлетворяющих условию Липшица, и в ряде других перечислительных задач. Важное продвижение по сравнению с [8] состоит в существенном ослаблении ограничений на максимальную степень вершины графа.

1. Формулировка основного результата и схема доказательства

Границей вершины v в графе $\Gamma = (V, E)$ называется множество $\partial(v)$ вершин, смежных с v. Ясно, что $\sigma(v) = |\partial(v)|$ есть степень вершины v в графе Γ. *Окрестностью вершины* v в графе Γ называется множество $N(v) = \{v\} \cup \partial(v)$. Множество $N(A) = \bigcup\limits_{v \in A} N(v)$ называется *окрестностью* множества A в графе Γ, а $\partial(A) = N(A) \setminus A$ называется его *границей. Кограницей* множества A в графе $\Gamma = (V, E)$ назовем множество $\partial^c(A) = \partial(V \setminus N(A))$.

Расстоянием между вершинами u и v в графе Γ называется число ребер в кратчайшей цепи, соединяющей u и v, и обозначается через $\rho_\Gamma(u, v)$. Как правило, из контекста ясно, о расстоянии в каком графе идет речь. Поэтому индекс Γ будем часто опускать. Положим $\rho(u, A) = \min_{v \in A} \rho(u, v)$. Будем говорить, что множество вершин A графа Γ *d-связно*, если для любых двух вершин u, v из A существует последовательность вершин $w_0, w_1, \ldots, w_k$ из A такая, что $u = w_0$, $v = w_k$, и для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ выполнено неравенство $\rho_\Gamma(w_{i-1}, w_i) \leqslant d$. 1-связное множество называется *связным.*

Граф $\Gamma = (V, E)$ назовем *(κ, p, q, λ)-графом*, если он удовлетворяет условиям

(a) $\min\limits_{v \in V} \sigma(v) = \kappa$,

(b) $\max\limits_{v \in V} \sigma(v) \leqslant \kappa^p$,

(c) $\max\limits_{u \neq v} |\partial(u) \cap \partial(v)| \leqslant q$,

(d) $\max\limits_{(u,v) \in E} |\sigma(u) - \sigma(v)| \leqslant \lambda$.

Обозначим через $H(\kappa,p,q,\lambda)$ множество всех (κ,p,q,λ)-*графов*. Если какое-либо из условий (a)–(d) не выполнено или несущественно для рассматриваемой ситуации, то соответствующую координату в четверке (κ,p,q,λ) заменим на $-$. Например, $(\kappa,-,-,-)$-граф должен удовлетворять условию (a), хотя может не удовлетворять условиям (b), (c) и (d). Множество всех таких графов будем обозначать через $H(\kappa,-,-,-)$.

Граф $\Gamma=(V,E)$ называется (ε,δ)-*расширителем*, если $|\partial(A)|\geqslant|A|\delta$ для всех $A\subseteq V$ таких, что $|N(A)|\leqslant\varepsilon|V|$. Положим *) $\hat\varepsilon_1=\kappa^3/|V|$, $\hat\delta_1=1+5\kappa^{-1/2}\log^3\kappa$, $\hat\varepsilon_2=1/2+2\kappa^{-2}\log^6\kappa$ и $\hat\delta_2=2\kappa^{-2}\log^6\kappa$. Граф $\Gamma=(V,E)$ из $H(\kappa,-,-,-)$ назовем *слабым расширителем*, если он является $(\hat\varepsilon_1,\hat\delta_1)$-расширителем, и *сильным расширителем*, если Γ является $(\hat\varepsilon_1,\hat\delta_1)$- и $(\hat\varepsilon_2,\hat\delta_2)$-расширителями.

Пусть X — произвольное подмножество вершин графа $\Gamma=(V,E)$. Обозначим через $\Phi_d(\Gamma,X,g)$ семейство всех d-связных подмножеств $A\subseteq V$ в графе Γ таких, что $|N(A)|=g$ и $A\cap X\neq\varnothing$, и пусть

$$\Phi_d'(\Gamma,X,g,\delta)=\{A\in\Phi_d(\Gamma,X,g)\mid|\partial^c(A)|\geqslant g\delta\}.$$

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Пусть q и d — произвольные натуральные числа, $p\geqslant1$, κ достаточно велико, $\lambda\leqslant\kappa\log^{-3}\kappa$, $\delta\geqslant\hat\delta_2=2\kappa^{-2}\log^6\kappa$ и (κ,p,q,λ)-граф $\Gamma=(V,E)$ является слабым расширителем. Далее пусть множество $X\subseteq V$ и натуральное число g таковы, что*

$$|X|\leqslant2^{\kappa\log\kappa}\tag{1}$$

и

$$\frac{\log|X|}{1-3dp\kappa^{-1}\log(4\kappa)}\leqslant g.\tag{2}$$

Тогда

$$|\Phi_d'(\Gamma,X,g,\delta)|\leqslant2^{g(1-\kappa^{-2}\log^6\kappa)}.\tag{3}$$

Структура доказательства теоремы 1 такова. Сначала устанавливаются вспомогательные утверждения (леммы 1–6). Затем доказывается теорема 2, в которой устанавливаются неравенства вида (3) для $|\Phi_d(\Gamma,X,g)|$ при условии, что $g<\kappa^2/(2q)$. После этого остается доказать (3) при условии $g\geqslant\kappa^2/(2q)$.

Далее в лемме 7 доказывается, что для каждого d-связного множества A существует пара (P_1,P_2) его подмножеств такая, что $P_1\cup P_2$ является 3-покрытием для A. Кроме того, эта пара удовлетворяет еще некоторым условиям. Именно, пусть $\varphi>0$, $A_\varphi=\{v\in A|\sigma_A(v)\geqslant\varphi\}$

*) Везде ниже $\log a=\log_2 a$.

и $A_{\overline{\varphi}} = A \setminus A_\varphi$. Тогда $P_1 \subseteq A_{\overline{\varphi}}$, $P_2 \subseteq A_{\overline{\varphi}}$ и $A \subseteq N\left((N(P_1) \cap A_\varphi) \cup A_{\overline{\varphi}}\right)$. Кроме того, в лемме 7 доказывается существование такого множества $M \subseteq N(N(P_2))$, что $A_{\overline{\varphi}} \subseteq M$. Тройку (P_1, P_2, M) множеств с указанными свойствами назовем *каркасом* множества A. Пусть $\mathscr{A}(P_1, P_2, M)$ — семейство всех множеств A с каркасом (P_1, P_2, M). Тогда каждое $A \in \mathscr{A}(P_1, P_2, M)$ можно построить путем последовательного выбора подмножеств $A \cap M$, $A \cap N(P_1)$ и $A \cap (N(A \cap M) \cup N(N(P_1) \cap A))$.

Лемма 8 дает предварительную верхнюю оценку числа таких d-связных множеств A с заданной мощностью окрестности, что $A \cap X \neq \varnothing$. Сначала оценивается сверху число $\tau(X)$ троек (P_1, P_2, M), достаточное для порождения всех таких множеств. Ввиду малого размера множеств M и $P_1 \cup P_2$, а также $(d+6)$-связности последнего множества число таких троек (P_1, P_2, M) оказывается «небольшим». Затем на основе алгоритма последовательного выбора указанных выше множеств находится верхняя оценка для числа $|\mathscr{A}(P_1, P_2, M)|$. Из этих оценок вытекает (3).

2. Определения и вспомогательные утверждения

Множество P вершин графа $\Gamma = (V, E)$ называется *d-покрытием* множества $A \subseteq V$, если для каждой вершины $v \in A$ существует вершина $u \in P$ такая, что $\rho(u, v) \leqslant d$. 1-покрытие P называется просто *покрытием*. d-покрытие P называется *d-сетью* в A, если $P \subseteq A$. Покрытие P называется *тупиковым*, если оно перестает быть покрытием после удаления из него любой вершины.

Лемма 1 [8]. *Пусть A есть d-связное множество вершин графа $\Gamma = (V, E)$, а $P \subseteq V$ является h-сетью (или тупиковым h-покрытием) в множестве A. Тогда P является $(d+2h)$-связным в $\Gamma = (V, E)$.*

Лемма 2 [8]. *Пусть Δ — максимальная степень вершины в графе $\Gamma = (V, E)$, $X \subseteq V$, а $\mu_d(\Gamma, X, m)$ — число d-связных подмножеств $A \subseteq V$ таких, что $A \cap X \neq \varnothing$ и $|A| = m$. Тогда*

$$\mu_d(\Gamma, X, m) \leqslant |X|(4\Delta^d)^{m-1}. \tag{4}$$

Число $\sigma_A(v) = |\partial(v) \cap A|$ назовем *степенью вершины v относительно множества A* в графе $\Gamma = (V, E)$.

Лемма 3 [8]. *Пусть A и B — два подмножества вершин графа $\Gamma = (V, E)$ и $\sigma_B(v) \geqslant r$ для каждого $v \in A$. Тогда существует покрытие $P \subseteq B$ множества A такое, что*

$$|P| \leqslant 1 + \frac{|B|}{r} \ln(er|A|/|B|). \tag{5}$$

Лемма 4 [8]. *Пусть $\Gamma = (V, E)$ является $(-,-,q,-)$-графом, подмножество $A \subseteq V$ таково, что $|A| = m$ и $\sigma(v) \geqslant \kappa$ для любой вершины v из A. Тогда*

$$|\partial(A)| \geqslant m\kappa - q\binom{m}{2}. \tag{6}$$

Следствие 1 [8]. *Пусть $\Gamma = (V, E)$ является $(-,-,q,-)$-графом, подмножество $A \subseteq V$ таково, что $|A| \leqslant \lceil \kappa/q \rceil$ и $\sigma(v) \geqslant \kappa \geqslant 1$ для всех $v \in A$. Тогда*

$$|\partial(A)| \geqslant |A|\kappa/2. \tag{7}$$

Если же $|A| \geqslant \lceil \kappa/q \rceil$, то

$$|N(A)| > \kappa^2/(2q). \tag{8}$$

Доказательство. Неравенство (7) вытекает из (6). Неравенство (8) следует из того, что в силу (7) для каждого $B \subseteq A$ такого, что $|B| = \lceil \kappa/q \rceil$,

$$|N(A)| \geqslant |N(B)| = |\partial(B)| + |B| \geqslant \lceil \kappa/q \rceil \left(\frac{\kappa}{2} + 1\right) > \kappa^2/(2q).$$

Следствие доказано.

Лемма 5. *Пусть $f_1, \ldots, f_r$ — последовательность неотрицательных чисел, $f = \sum\limits_{1 \leqslant \nu \leqslant r} f_\nu$ и s, λ — натуральные числа такие, что $2s\lambda \leqslant r$. Тогда существует натуральное число $j \leqslant s$ такое, что*

$$\sum_{k=0}^{\lceil r/s \rceil - 1} \sum_{\nu = ks+j-\lambda+1}^{ks+j+\lambda} f_\nu \leqslant \frac{2\lambda}{s} f. \tag{9}$$

Доказательство. Положим $f_\nu = 0$ при $\nu < 0$ и $\nu > r$. Разобьем множество индексов $1, \ldots, r$ на $\lceil r/s \rceil$ блоков, каждый из которых (кроме, может быть, последнего) содержит s последовательных чисел f_ν. Тогда

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{k=0}^{\lceil r/s \rceil - 1} \sum_{\nu = ks+j-\lambda+1}^{ks+j+\lambda} f_\nu \leqslant 2\lambda f,$$

ибо в рассматриваемой сумме каждое f_ν встречается в качестве слагаемого не более 2λ раз. Лемма доказана.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия леммы 5. Тогда существует натуральное число $j \leqslant s$ такое, что*

$$\sum_{k=0}^{\lceil r/s \rceil - 1} \sum_{\nu = (k-1)s+j-\lambda+1}^{ks+j+\lambda} f_\nu \leqslant \left(1 + \frac{2\lambda}{s}\right) f, \tag{10}$$

где $f_\nu = 0$ при $\nu \leqslant 0$ и $\nu \geqslant r$.

Справедливость этого утверждения вытекает из того, что если число j удовлетворяет неравенству (9), то сумма в левой части (10) не превосходит числа f, сложенного с левой частью (9).

Лемма 6. *Пусть $\Gamma = (V, E)$ является $(\kappa, p, -, \lambda)$-графом, $0 < \varphi < \psi < \kappa/3$ и $1 \leqslant s \leqslant \kappa^p - \kappa$. Далее пусть $A \subseteq V$, а множество $T \subseteq \partial(A)$ таково, что $\sigma_T(v) > \sigma(v) - \varphi$ для всех v из A. Тогда существует такое множество $P \subseteq A$, что множества $F = \partial(P) \cap T$ и $M = \{v \in V \setminus F \mid \sigma_F(v) > \sigma(v) - \varphi - \psi\}$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$A \subseteq M, \tag{11}$$

$$|P| \leqslant |F|/\psi, \tag{12}$$

$$|M| \leqslant |F| \left(1 + \frac{2\lambda}{s}\right) \left(1 + \frac{s + \lambda}{\kappa - \varphi - \psi - s}\right). \tag{13}$$

Доказательство. Построим такую последовательность подмножеств $P_k \subseteq A$, $k = 1, 2, \ldots$, что последним ее элементом будет множество P, удовлетворяющее условиям леммы. В качестве P_1 выберем произвольное одноэлементное подмножество множества A. Пусть для некоторого $k \geqslant 1$ выбрано k-элементное множество $P_k = \{v_1, \ldots, v_k\}$ и $F_k = \partial(P_k) \cap T$. Если существует вершина $v \in A$ такая, что $\sigma_{T \setminus F_k}(v) \geqslant \psi$, то положим $v_{k+1} = v$, $P_{k+1} = P_k \cup \{v_{k+1}\}$ и $F_{k+1} = \partial(P_{k+1}) \cap T$. Если же таких вершин v нет, то положим $P = P_k$, $F = F_k$ и $M = \{v \in V \setminus F \mid \sigma_F(v) > \sigma(v) - \varphi - \psi\}$. Соотношение (11) вытекает из определения множества M. Неравенство (12) следует из способа построения множеств P_k.

Докажем неравенство (13). Положим

$$r = \kappa^p - \kappa, \quad M_i = \{v \in M \mid \sigma(v) = \kappa - 1 + i\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r,$$
$$F_\nu = \{v \in F \mid \sigma(v) = \kappa - 1 + \nu\}, \quad |F_\nu| = f_\nu, \quad \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant r} f_\nu = f.$$

В силу следствия 2 существует j, $1 \leqslant j \leqslant s$, удовлетворяющее (10). Для такого j положим

$$\widehat{M}_{0,j} = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant j} M_i, \quad \widehat{M}_{k,j} = \bigcup_{(k-1)s+j+1 \leqslant i \leqslant ks+j} M_i, \quad 1 \leqslant k \leqslant \lfloor m/s \rfloor,$$

где $M_i = \varnothing$ при $i > r$. Пусть $\widehat{F}_{k,j} = \{v \in F \mid \exists u \in \widehat{M}_{k,j} \rho(u, v) = 1\}$. Поскольку $|\sigma(u) - \sigma(v)| \leqslant \lambda$ для всех u, v таких, что $\rho(u, v) = 1$, то

$$\widehat{F}_{k,j} \subseteq \bigcup_{(k-1)s+j+1-\lambda \leqslant \nu \leqslant ks+j+\lambda} F_\nu.$$

Пусть $\nu_{\kappa,j}(\Gamma)$ — число ребер вида $(u,v) \in \widehat{M}_{k,j} \times \widehat{F}_{k,j}$ в графе $\Gamma = (V,E)$. Тогда

$$|\widehat{M}_{k,j}|((k-1)s + j + \kappa - \varphi - \psi) \leqslant \nu_{\kappa,j}(\Gamma) \leqslant |\widehat{F}_{k,j}|(ks + j + \lambda + \kappa).$$

Поэтому

$$|\widehat{M}_{k,j}| \leqslant |\widehat{F}_{k,j}| \left(1 + \frac{s+\lambda}{\kappa - \varphi - \psi - s}\right).$$

Суммируя последнее неравенство по k и используя (10), получаем (13). Лемма 6 доказана.

Замечание 1. Множество P из леммы 6 является 2-покрытием множества A, поскольку $A \subseteq M \subseteq \partial(F)$ и $F \subseteq \partial(P)$.

Множество P, удовлетворяющее условиям леммы 6, будем называть (s,φ,ψ,T)-*стягивающим* для множества A, а соответствующую тройку множеств (P,F,M) назовем (s,φ,ψ,T)-*контейнером* для A.

3. Оценки числа связных множеств с фиксированной мощностью окрестности

Теорема 2. *Пусть $\Gamma = (V,E)$ является $(\kappa,p,q,-)$-графом, $X \subseteq V$, d — натуральное число, κ достаточно велико и*

$$\frac{\log|X|}{1 - 3dp\kappa^{-1}\log(4\kappa)} \leqslant g < \kappa^2/(2q). \tag{14}$$

Тогда

$$|\Phi_d(\Gamma,X,g)| \leqslant 2^{g(1-dp\kappa^{-1}\log(4\kappa))}. \tag{15}$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 2 и следствием 1. Максимальная степень вершины в $(\kappa,p,q,-)$-графе не превосходит κ^p. Поскольку из (14) следует, что $g = |N(A)| < \kappa^2/(2q)$ для всех $A \in \Phi_d(\Gamma, X, g)$, то в силу (8) имеем $|A| < \lceil \kappa/q \rceil$. Отсюда $|A| \leqslant 2g/\kappa$ в силу (7). Используя (4), для достаточно больших κ получаем

$$|\Phi(\Gamma,X,g)| \leqslant |X| \sum_{1 \leqslant i \leqslant 2g/\kappa} (4(\kappa^p)^d)^{i-1} \leqslant |X|(4\kappa)^{2pdg/\kappa} \leqslant 2^{\log|X| + \frac{2dpg}{\kappa}\log(4\kappa)}.$$

Следовательно, с использованием первого неравенства из (14) получаем (15). Теорема 2 доказана.

Пусть A — некоторое множество вершин графа $\Gamma = (V,E)$ и $\varphi > 0$. Положим

$$A_\varphi = \{v \in A \mid \sigma_A(v) \geqslant \varphi\}, \quad A_{\overline{\varphi}} = A \setminus A_\varphi \quad \text{и} \quad D_{\overline{\varphi}}(A) = \partial(A_{\overline{\varphi}}) \cap \partial(A).$$

Лемма 7. *Пусть $\Gamma = (V,E)$ является (κ,p,q,λ)-графом, множество $A \subseteq V$ — d-связным, $|N(A)| = g$, $0 < \varphi \leqslant \psi \leqslant \kappa/3$, $1 \leqslant s \leqslant \kappa^p - \kappa$*

и $T = D_{\overline{\varphi}}(A)$. *Тогда существуют подмножества* $P_1 \subseteq A$ *и* $P_2 \subseteq A_\varphi$ *такие, что*

1) $|P_1| = \lfloor 1 + 4gq\varphi^{-2} \ln e\kappa \rfloor$;

2) $A \subseteq N(N(P_1) \cap A_\varphi) \cup N(A_{\overline{\varphi}}))$;

3) P_2 *является* (s, φ, ψ, T)*-стягивающим для* $A_{\overline{\varphi}}$, *т. е. множества* $F = \partial(P_2) \cap D_{\overline{\varphi}}(A)$ *и* $M = \{v \in V \setminus F \mid \sigma_F(v) > \sigma(v) - \varphi - \psi\}$ *обладают свойствами* (a)–(c):

(a) $A_{\overline{\varphi}} \subseteq M$,

(b) $|P_2| = \lfloor |F|/\psi \rfloor$,

(c) $|M| \leqslant |F|(1 + 2\lambda/s)(1 + (s+\lambda)/(\kappa - \varphi - \psi - s))$;

4) $P_1 \cup P_2$ *является* $(d+6)$*-связным множеством.*

Доказательство. Пусть $v \in A \setminus N(A_{\overline{\varphi}})$. Тогда из определения следует, что $|\partial(v) \cap A_\varphi| = |\partial(v) \cap A| \geqslant \varphi$. В силу следствия 1 получаем, что $|N(N(v) \cap A_\varphi)| \geqslant \varphi^2/(2q)$. Рассмотрим граф $\Gamma' = (A, E')$, в котором вершины u и v соединены ребром, если в графе $\Gamma = (V, E)$ существует вершина $w \in A$, смежная с вершинами u и v, или если вершины u и v смежны в Γ. Применяя лемму 3 к графу $\Gamma' = (A, E')$ и множествам A и $B = A \setminus N(A_{\overline{\varphi}})$, получаем, что существует множество P, покрывающее B и удовлетворяющее неравенству (5) при $r = \varphi^2/(2q)$. Добавляя к P, если необходимо, вершины из A, получим множество P_1, обладающее свойствами 1 и 2.

Существование множества $P_2 \subseteq A_{\overline{\varphi}}$ со свойствами (a)–(c) вытекает из леммы 6 при $T = D_{\overline{\varphi}}(A)$. При переходе от (10) к 3(a) мы заменили неравенство на равенство, воспользовавшись тем, что после добавления вершин из $A_{\overline{\varphi}}$ к множеству P, являющемуся (s, φ, ψ, T)-стягивающим для $A_{\overline{\varphi}}$, оно остается таковым.

Остается доказать справедливость утверждения 4. В силу замечания 1 множество P_2 является 2-покрытием множества $A_{\overline{\varphi}}$ и, следовательно, 3-покрытием множества $A \cap N(A_{\overline{\varphi}})$. В свою очередь, множество P_1 является 2-покрытием множества $A \setminus N(A_{\overline{\varphi}})$. Поэтому $P_1 \cup P_2$ является 3-покрытием множества A. Теперь утверждение 4 следует из леммы 1 с учетом d-связности множества A. Лемма 7 доказана.

Пусть $\Gamma = (V, E)$ является $(\kappa, -, -, -)$-графом, φ и ψ таковы, что $0 < \varphi \leqslant \psi \leqslant \kappa/3$, f — неотрицательное целое число. Обозначим через $Y(f)$ семейство множеств $A \subseteq V$ таких, что существует $(\psi, \varphi, \psi, D_{\overline{\varphi}}(A))$-контейнер (P, F, M) для множества $A_{\overline{\varphi}}$ такой, что $|F| = f$. Далее через $\Psi_d(\Gamma, X, g, a, f)$ обозначим семейство множеств A из $\Phi'_d(\Gamma, X, g) \cap Y(f)$ таких, что $|A| = a$.

Замечание 2. Если $\Gamma = (V, E)$ является $(\kappa, -, -, \lambda)$-графом, $A \in \Psi_d(\Gamma, X, g, a, f)$, а (P, F, M) есть $(\psi, \varphi, \psi, D_{\overline{\varphi}}(A))$-контейнер для

множества $A_{\overline{\varphi}}$, то в силу (13) имеем

$$|M| \leqslant \beta f,$$

где $\beta = (1 + 2\lambda/\psi)(1 + (\psi + \lambda)/(\kappa - \varphi - \psi - s))$.

Лемма 8. *Пусть κ достаточно велико, $\Gamma = (V, E)$ является (κ, p, q, λ)-графом, $X \subseteq V$ и $g \geqslant \kappa^2/(2q)$. Тогда для φ, ψ , f и β таких, что $\beta > 1$, $0 < \varphi \leqslant \psi \leqslant \kappa/3$ и $0 \leqslant f \leqslant g - a$, справедливо неравенство*

$$|\Psi_d(\Gamma, X, g, a, f)| \leqslant |X| \cdot 2^{p(d+6)\left(\frac{4gq}{\varphi^2}\ln e\kappa + \frac{f}{\psi}(\varphi+1)\right)\log(8\kappa)} \times \sum_i \binom{\beta f}{i}\binom{q - f - i}{a - i}, \qquad (16)$$

где $\beta = (1 + 2\lambda/\psi)(1 + (\psi + \lambda)/(\kappa - \varphi - \psi))$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что по лемме 7 для произвольного $A \in \Psi_d(\Gamma, X, g, a, f)$ существует каркас, т. е. тройка множеств (P_1, P_2, M), удовлетворяющая условиям леммы 7. Обозначим через $\Theta(X) = \Theta(\Gamma, X, g, f, \varphi, \psi)$ множество троек (P_1, P_2, M), каждая из которых является каркасом хотя бы для одного A из $\Psi_d(\Gamma, X, g, a, f)$. Будем использовать следующие свойства каркасов:

(a) множество $P = P_1 \cup P_2$ является $(d + 6)$-связным;

(b) $|P| = m = \lfloor 1 + 4gq\varphi^{-2}\ln e\kappa\rfloor + \lfloor f/\psi\rfloor$;

(c) $|P_1| = t = \lfloor 1 + 4gq\varphi^{-2}\ln e\kappa\rfloor$;

(d) существует вершина $v \in P$ такая, что $\rho(v, X) \leqslant 3$;

(e) $|M| \leqslant \beta f$;

(f) $|\partial(P_2) \setminus F| = |A \cap \partial(P_2)| \leqslant \varphi|P_2| \leqslant \varphi f/\psi$.

Оценим сверху $|\Theta(X)|$. Обозначим через $\Pi(X)$ множество пар (P_1, P_2), для каждой из которых существует каркас вида (P_1, P_2, M). С использованием свойств (a)–(d) оценим $|\Pi(X)|$. Число вершин v в графе Γ таких, что $\rho(v, X) \leqslant 3$, не превосходит $|X|\kappa^{3p}$. Согласно лемме 2 число $(d + 6)$-связных подмножеств $P \subseteq V$ таких, что $v \in P$ и $|P| = m$, не превышает $\left(4(\kappa^p)^{d+6}\right)^{m-1}$. Построить пару (P_1, P_2) при заданном $P = P_1 \cup P_2$ с $|P| = m$ можно, выбрав $P_1 \subseteq P$ мощности t. Имеется не более $\binom{m}{t} \leqslant 2^{m-1}$ возможностей. Следовательно,

$$|\Pi(X)| \leqslant |X|\kappa^{3p}\left(8(\kappa^p)^{d+6}\right)^{m-1} \leqslant |X| 2^{p(d+6)\left(\frac{4gq}{\varphi^2}\ln e\kappa + \frac{f}{\psi}\right)\log(8\kappa)}. \qquad (17)$$

Пусть $\mu(P_2) = \mu(P_1, P_2, \varphi, \psi)$ есть число множеств M, каждое из которых вместе с заданной парой (P_1, P_2) составляет каркас хотя бы для одного множества $A \in \Psi_d(\Gamma, X, g, a, f)$. Заметим, что, выбрав некоторое множество $H \subseteq \partial(P_2)$ в качестве $A \cap \partial(P_2)$, мы зададим также множество

$F = \partial(P_2) \setminus A$, а значит, и множество $M = \{v \in V \setminus F \mid \sigma_F(v) > \sigma(v) - \varphi - \psi\}$. С учетом неравенств (e) и (f) имеем

$$\mu(P_1,\, P_2, \varphi, \psi) \leqslant \sum_{0 \leqslant j \leqslant \varphi f/\psi} \binom{\kappa^p f/\psi}{j}.$$

Положим $H(y) = -y \log y - (1-y)\log(1-y)$. Если $k \leqslant n/2$ и $0 < y < 1$, то (см., например, [1] или [9])

$$\sum_{j \leqslant k} \binom{n}{j} \leqslant 2^{nH(k/n)}, \quad H(y) \leqslant y \log(e/y).$$

Поэтому

$$\mu(P_2) \leqslant 2^{p\varphi f(\log e\kappa)/\psi}. \tag{18}$$

Из (17) и (18) получаем

$$|\Theta(X)| \leqslant \sum_{(P_1,\, P_2) \in \Pi(X)} \mu(P_2) \leqslant |X| \cdot 2^{p(d+6)\left(\frac{4gq}{\varphi^2} \ln e\kappa + \frac{f}{\psi}(\varphi+1)\right) \log(8\kappa)}. \tag{19}$$

Теперь найдем верхнюю оценку для мощности семейства $\mathscr{A}(P_1, P_2, M)$ множеств A таких, что тройка (P_1, P_2, M) является каркасом для A. Любое множество $A \in \mathscr{A}(P_1, P_2, M)$ можно построить путем последовательного выбора подмножеств $B = A \cap M$, $C = (A \cap \partial(P_1)) \setminus N(B)$, $C \subseteq Q$, где $Q = N(P_1) \setminus N(B)$, а также множества $D = A \cap L$, где $L = (\partial(B) \setminus F) \cup (\partial(C) \setminus (N(P_1) \cup N(B))$. Число возможностей выбора таких множеств B, C и D, что $|B| + |C| + |D| = a$, не превосходит

$$\sum_{B \subseteq M} \sum_{C \subseteq Q} \binom{|L|}{a - |B| - |C|} \leqslant \sum_{i \leqslant |M|} \sum_{\substack{B \subseteq M \\ |B| = i}} \sum_{j \leqslant |Q|} \sum_{\substack{C \subseteq Q \\ |C| = j}} \binom{|L|}{a - i - j}$$
$$\leqslant \sum_{i \leqslant |M|} \binom{|M|}{i} \sum_{j \leqslant |Q|} \binom{|Q|}{j} \binom{|L|}{a - i - j} \leqslant \sum_{i \leqslant |M|} \binom{|M|}{i} \binom{|L| + |Q|}{a - i}$$

Так как $g = |N(A)| \geqslant |L| + |Q| + |F| + |B|$ и $|M| \leqslant \beta f$, то

$$|\mathscr{A}(P_1, P_2, M)| \leqslant \sum_i \binom{\beta f}{i} \binom{g - f - i}{a - i}. \tag{20}$$

Из (19) и (20) вытекает (16). Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Пусть $\varepsilon > 0$ — достаточно малое положительное число, $\beta \leqslant 1 + \varepsilon$ и $\widetilde{A}(g, a, f) = \sum_i \binom{f\beta}{i} \binom{g-f-i}{a-i}$. Тогда*

$$\widetilde{A}(g, a, f) \leqslant 2^{g(1-\varepsilon)}, \tag{21}$$

если $|a - g/2| \geqslant 2g\sqrt{\varepsilon}$ *или* $f > g\sqrt{\varepsilon}$, *и*

$$\widetilde{A}(g,a,f) \leqslant \binom{g}{a} 2^{-0{,}09f} \tag{22}$$

в остальных случаях.

Доказательство. Сначала убедимся в справедливости (21). Положим $x = a/g$. Используя неравенства $f \leqslant g$, $\beta \leqslant 1+\varepsilon$ и $\binom{n}{k} \leqslant 2^{nH(k/n)}$, получаем

$$\sum_i \binom{f\beta}{i}\binom{g-f-i}{a-i} \leqslant \sum_i \binom{f\beta}{i}\binom{g-f}{a-i} = \binom{g+(\beta-1)f}{a}$$
$$\leqslant \binom{g(1+\varepsilon)}{a} \leqslant 2^{g(1+\varepsilon)H(x/(1+\varepsilon))}. \tag{23}$$

Так как $H(1/2+\delta) = H(1/2-\delta) = 1-2\delta^2\log e + O(\delta^4)$, то при $1/2+2\sqrt{\varepsilon} \leqslant x < 1$ и достаточно малых ε имеем

$$H\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right) \leqslant H\left(\frac{1/2+2\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right) \leqslant 1-2\varepsilon. \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует, что

$$\widetilde{A}(g,a,f) \leqslant 2^{g(1+\varepsilon)(1-2\varepsilon)} \leqslant 2^{g(1-\varepsilon)}. \tag{25}$$

При $0 < x \leqslant 1/2 - 2\sqrt{\varepsilon}$ и достаточно малых ε получаем

$$(1+\varepsilon)\,H\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right) \leqslant (1+\varepsilon)\,H\left(1/2-2\sqrt{\varepsilon}\right) \leqslant 1-\varepsilon. \tag{26}$$

Из (25) и (26) следует (21) для $|x-1/2| \geqslant 2\sqrt{\varepsilon}$.

Теперь убедимся в справедливости (21) при условии, что $\beta \leqslant 1+\varepsilon$, $|x-1/2| < 2\sqrt{\varepsilon}$ и $g-a \geqslant f > g\sqrt{\varepsilon}$. Так как $\binom{n-i}{k-i} \leqslant \binom{n}{i}(k/n)^i$ и $\binom{n}{k} \leqslant 2^{nH(k/n)}$, то

$$\widetilde{A}(g,a,f) \leqslant \sum_i \binom{f\beta}{i}\binom{g-f-i}{a-i} \leqslant \binom{g-f}{a}\sum_i \binom{f\beta}{i}\left(\frac{a}{g-f}\right)^i$$
$$= \binom{g-f}{a}\left(\frac{g+a-f}{g-f}\right)^{\beta f} \leqslant 2^{(g-f)H\left(\frac{a}{g-f}\right)+\beta f}. \tag{27}$$

Положим $\gamma = f/g$. По условию $\sqrt{\varepsilon} \leqslant \gamma \leqslant 1-x$. Так как $\gamma < 1/2 + 2\sqrt{\varepsilon}$ при $x > 1/2 - 2\sqrt{\varepsilon}$, то при $\gamma \geqslant 1/2 - \sqrt{\varepsilon}$ получаем

$$(1-\gamma)H\left(\frac{x}{1-\gamma}\right) + \beta\gamma \leqslant H\left(\frac{1/2-2\sqrt{\varepsilon}}{1/2-\sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} + O\left(\sqrt{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{28}$$

Если же $\gamma < 1/2 - \sqrt{\varepsilon}$, то при достаточно малых ε имеем

$$(1-\gamma)\,H\left(\frac{x}{1-\gamma}\right) + \beta\gamma \leqslant (1-\gamma)H\left(\frac{1/2-2\sqrt{\varepsilon}}{1-\sqrt{\varepsilon}}\right) + \beta\gamma$$
$$\leqslant (1-\gamma)\left(1 - 2\varepsilon\log e + O(\varepsilon^2)\right) + (1+\varepsilon)\gamma \leqslant 1-\varepsilon. \quad (29)$$

Из (27)–(29) следует (21) для рассматриваемого случая.

Наконец, убедимся в справедливости (22). При $f \leqslant g\sqrt{\varepsilon}$ и $|a/g - 1/2| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}$ имеем $(g+a-f)/(g-f) = 3/2 + O(\sqrt{\varepsilon})$. Кроме того, $\binom{g-f}{a} \leqslant \binom{g}{a}\exp\{-af/g\}$. Поэтому

$$\sum_i \binom{f\beta}{i}\binom{g-f-i}{a-i} \leqslant \binom{g}{a}\exp\left\{-\frac{a}{g}f + \beta f\left(\ln\frac{3}{2} + O(\sqrt{\varepsilon})\right)\right\}$$
$$\leqslant \binom{g}{a}\exp\left\{-f\left(\frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2} + O(\sqrt{\varepsilon})\right)\right\} \leqslant \binom{g}{a}2^{-\hat{c}f},$$

где $\hat{c} = 0,09$. Лемма 9 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\omega = \omega(\kappa)$ и $\lim\limits_{\kappa\to\infty}\omega = \infty$. Для определенности будем считать, что

$$\omega = \log\log\kappa. \quad (30)$$

Кроме того, будем считать, что

$$dpq = o(\omega). \quad (31)$$

Выберем значения параметров ψ, φ и λ следующим образом:

$$\psi = \kappa/\omega, \quad \varphi = \psi/\omega^2\log(8\kappa) \quad \lambda = \psi/5\omega. \quad (32)$$

Тогда при достаточно больших κ и $s = \psi$ имеем

$$\beta = (1+2\lambda/\psi)(1+(\psi+\lambda)/(\kappa-\varphi-2\psi)) \leqslant 1 + 2\omega^{-1} \quad (33)$$

и

$$\psi^{-1}(\varphi+1)\log(8\kappa) \leqslant 2\omega^{-1}. \quad (34)$$

В последующих оценках будем пользоваться тем, что

$$\log g \leqslant 4qg\kappa^{-2}\log\kappa \quad \text{и} \quad \kappa\log\kappa \leqslant 2qg\kappa^{-1}\log\kappa \quad (35)$$

при $g \geqslant \kappa^2/(2q)$, а также тем, что при $g \geqslant \kappa^3$

$$\kappa\log\kappa \leqslant g\kappa^{-2}\log\kappa. \quad (36)$$

Множество Π пар (a,f) таких, что $0 \leqslant a \leqslant g$ и $0 \leqslant f \leqslant g-a$, разобьем на четыре области. Положим

$$\Pi_1 = \left\{(a,f) \text{ таких, что } |a-g/2| > 2g\omega^{-1/2} \text{ или } \omega^{-1/2}g < f \leqslant g-a\right\},$$

$$\Pi_2 = \big\{(a,f)\in\Pi\setminus\Pi_1 \text{ таких, что } |a-g/2| > g\kappa^{-1/2}\log^3\kappa \\ \text{или } (2/\hat c)g\kappa^{-1}\log^6\kappa < f\big\},$$

$$\Pi_3 = \big\{(a,f)\in\Pi\setminus\Pi_2 \text{ таких, что } |a-g/2| > g\kappa^{-1}\log^3\kappa \\ \text{или } (2/\hat c)g\kappa^{-2}\log^6\kappa < f\big\},$$

$$\Pi_4 = \big\{(a,f) \text{ таких, что } |a-g/2| \leqslant g\kappa^{-1}\log^3\kappa \text{ и } f\leqslant (2/\hat c)\kappa^{-2}\log^6\kappa\big\}.$$

Имеем

$$|\Phi'_d(\Gamma,X,g,\delta)| \leqslant \sum_{i=1}^{4}\sum_{(a,f)\in\Pi_i}|\Psi_d(\Gamma,X,g,a,f)|. \tag{37}$$

С использованием (16), (21), (1) и с учетом (30)–(35) получаем

$$\sum_{(a,f)\in\Pi_1}|\Psi_d(\Gamma,X,g,a,f)| \leqslant g^2|X|\cdot 2^{p(d+6)\left(\frac{4gq}{\varphi^2}\ln e\kappa+\frac{f}{\psi}(\varphi+1)\right)\log(8\kappa)+g(1-\frac{2}{\omega})}$$
$$\leqslant 2^{24pqdg\left(\frac{\omega^6}{\kappa^2}\log^4(8\kappa)+\frac{2}{\omega^2}\right)+g(1-\frac{2}{\omega})+2\log g+\kappa\log\kappa} \leqslant 2^{g(1-\frac{1}{\omega})}. \tag{38}$$

Полагая для краткости $\varepsilon=\kappa^{-1/2}\log^3\kappa$ и $\delta=(2/\hat c)\kappa^{-1}\log^6\kappa$, в силу (16), (22) и (1) с учетом (30)–(35) имеем

$$\sum_{(a,f)\in\Pi_2}|\Psi_d(\Gamma,X,g,a,f)| \leqslant \sum_{a:|a-g/2|\geqslant g\varepsilon}\ \sum_{f\geqslant 0}|X|$$
$$\times 2^{p(d+6)\left(\frac{4gq}{\varphi^2}\ln e\kappa+\frac{f}{\psi}(\varphi+1)\right)\log(8\kappa)}\binom{g}{a}2^{-\hat c f} + \sum_{a\leqslant g}\sum_{f>g\delta}|X|$$
$$\times 2^{p(d+6)\left(\frac{4gq}{\varphi^2}\ln e\kappa+\frac{f}{\psi}(\varphi+1)\right)\log(8\kappa)}\binom{g}{a}2^{-\hat c f} \leqslant 2^{24pqdg\frac{\omega^6}{\kappa^2}\log^4(8\kappa)+\kappa\log\kappa}$$
$$\times\left(\sum_{a:|a-g/2|\geqslant g\varepsilon}\binom{g}{a}\sum_{f\geqslant 0}2^{f(-\hat c+\frac{2}{\omega})}+\sum_{a\leqslant g}\binom{g}{a}\sum_{f>g\delta}2^{f(-\hat c+\frac{2}{\omega})}\right)$$
$$\leqslant 2^{24pqdg\frac{\omega^6}{\kappa^2}\log^4(8\kappa)+2qg\kappa^{-1}\log\kappa}\left(1-2^{-\hat c+\frac{2}{\omega}}\right)^{-1}$$
$$\times\left(2^{g(1-2\kappa^{-1}\log^6\kappa)}+2^{g(1-\frac{2(\hat c-2/\omega)}{\hat c}\kappa^{-1}\log^6\kappa)}\right) \leqslant 2^{g(1-\kappa^{-1}\log^6\kappa)}. \tag{39}$$

При оценке части суммы (37) в областях Π_3 и Π_4 учтем, что граф Γ является слабым расширителем. Так как в этих областях выполнено неравенство $|a-g/2|\leqslant g\epsilon$, где $\varepsilon=\kappa^{-1/2}\log^3\kappa$, то при достаточно больших κ имеем $|\partial(A)|=g-a\leqslant g(1/2+\varepsilon)<a(1+5\epsilon)=|A|\hat\delta_1$. Отсюда и из определения слабого расширителя следует, что $g\geqslant\kappa^3$, а значит, выполнено

(36). Положим $\delta = (2/\hat{c})\kappa^{-2}\log^6\kappa$. Аналогично предыдущему случаю в силу (16), (22) и (1) с учетом (30)–(36) имеем

$$\sum_{(a,f)\in\Pi_3} |\Psi_d(\Gamma, X, g, a, f)| \leqslant \sum_{a:|a-g/2|\geqslant g\varepsilon} \sum_{f\geqslant 0} |X|$$
$$\times 2^{p(d+6)\left(\frac{4gq}{\varphi^2}\ln e\kappa + \frac{f}{\psi}(\varphi+1)\right)\log(8\kappa)} \binom{g}{a} 2^{-\hat{c}f} + \sum_{a\leqslant g}\sum_{f>g\delta} |X|$$
$$\times 2^{p(d+6)\left(\frac{4gq}{\varphi^2}\ln e\kappa + \frac{f}{\psi}(\varphi+1)\right)\log(8\kappa)} \binom{g}{a} 2^{-\hat{c}f} \leqslant 2^{24pqdg\frac{\omega^6}{\kappa^2}\log^4(8\kappa)+\kappa\log\kappa}$$
$$\times \left(\sum_{a:|a-g/2|\geqslant g\varepsilon} \binom{g}{a} \sum_{f\geqslant 0} 2^{f(-\hat{c}+\frac{2}{\omega})} + \sum_{a\leqslant g} \binom{g}{a} \sum_{f>g\delta} 2^{f(-\hat{c}+\frac{2}{\omega})}\right)$$
$$\leqslant 2^{24pqdg\frac{\omega^6}{\kappa^2}\log^4(8\kappa)+g\kappa^{-2}\log\kappa}\left(1-2^{-\hat{c}+\frac{2}{\omega}}\right)^{-1}$$
$$\times \left(2^{g(1-2\kappa^{-2}\log^6\kappa)} + 2^{g(1-\frac{2(\hat{c}-2/\omega)}{\hat{c}}\kappa^{-2}\log^6\kappa)}\right) \leqslant 2^{g(1-\frac{3}{2}\kappa^{-2}\log^6\kappa)}. \quad (40)$$

Для оценки части суммы (37), соответствующей области Π_4, заметим, что если множества $B = A_{\overline{\varphi}}$ и $C = A\cap N(P_1)$ заданы, то заданы также множества $\partial(B)$ и $\partial(C)$. Вместе с тем из определения множеств B и C вытекает, что множество $D = A\setminus(N(B)\cup N(C))$ содержится в $(\partial(B)\cup\partial(C))\setminus\partial^c(A)$. Пусть $K = N(A)\setminus(N(B)\cup N(C)\cup P_1)$. Если множества K, B и C заданы, то множество $N(A)$, а значит, $V\setminus N(A)$ и $\partial^c(A)$ определены. Отсюда вытекают следующие два способа задания множества A при заданных B и C.

1. Если $|K|\geqslant g\delta$, где $\delta = \frac{\omega^7}{\kappa^2}\log^4(8\kappa)$, то выберем множество $D = A\cap(\partial(B)\cup\partial(C))$. Пользуясь обозначениями леммы 9, по аналогии с (20) и (22) получаем, что при заданных P_1, P_2 и M число способов выбора множеств B, C и D не превосходит

$$\widetilde{A}(g_1, a, f) = \sum_i \binom{f\beta}{i}\binom{g_1 - f - i}{a-i} \leqslant \binom{g_1}{a} 2^{-\hat{c}f} \leqslant 2^{g_1-\hat{c}f}, \quad (41)$$

где $g_1 = g(1-\delta)$.

2. Если же $|K| < g\delta$, то воспользуемся тем, что по условию теоремы $|\partial^c(A)|\geqslant g\hat{\delta}_2 = 2g\kappa^{-2}\log^6\kappa$. Сначала выберем множество $K\subseteq\partial(\partial(B)\cup\partial(C))$, а затем — множество $D = A\cap(\partial(B)\cup\partial(C))\setminus\partial^c(A)$. Положив $g_2 = g(1-\hat{\delta}_2)$, получаем, что число способов выбора этих множеств не превосходит

$$\sum_{m<g\delta}\binom{g\kappa^p}{m}\widetilde{A}(g_2, a, f) \leqslant \binom{g(1-\hat{\delta}_2)}{a} 2^{(p+2)g\delta\log\kappa - \hat{c}f}. \quad (42)$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(a,f)\in\Pi_4} |\Psi_d(\Gamma, X, g, a, f)| \\
&\qquad \leqslant \sum_{a:|a-g/2|\leqslant g\varepsilon} \sum_{f\leqslant g\delta} |X| \cdot 2^{p(d+6)\left(\frac{4gq}{\varphi^2}\ln e\kappa + \frac{f}{\psi}(\varphi+1)\right)\log(8\kappa) - \hat{c}f} \\
&\times \left\{ \binom{g(1-\delta)}{a} + \binom{g(1-\hat{\delta}_2)}{a} 2^{(p+2)g\delta\log\kappa - \hat{c}f} \right\} \leqslant 2^{24pqdg\frac{\omega^6}{\kappa^2}\log^4(8\kappa)+\kappa\log\kappa} \\
&\times \sum_{f\geqslant 0} 2^{f(-\hat{c}+\frac{2}{\omega})} \left(2^{g(1-\delta)} + 2^{g(1-\hat{\delta}_2)+(p+2)g\delta\log\kappa-\hat{c}f}\right) \leqslant 2^{g(1-\frac{3}{2}\kappa^{-2}\log^6\kappa)}. \qquad (43)
\end{aligned}
$$

Теперь из (37), (38), (39), (40) и (43) следует (3). Теорема 1 доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекают следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть q и d — произвольные натуральные числа, $p \geqslant 1$, κ достаточно велико, $\lambda \leqslant \kappa \log^{-3}\kappa$, $\Gamma = (V, E)$ является (κ, p, q, λ)-графом и сильным расширителем и $|V| \leqslant 2^{\kappa\log\kappa}$. Тогда*

$$
|\Phi'_d(\Gamma, V, g)| \leqslant \begin{cases} 2^{g(1-dp\kappa^{-1}\log(4\kappa))} & \text{при } \frac{\log|V|}{1-3dp\kappa^{-1}\log(4\kappa)} \leqslant g \leqslant \frac{\kappa^2}{2q}, \quad (44)\\ 2^{g(1-\kappa^{-1}\log^6\kappa)} & \text{при } \kappa^2/(2q) < g \leqslant \kappa^3, \quad (45)\\ 2^{g\left(1-\kappa^{-2}\log^6\kappa\right)} & \text{при } \kappa^3 < g \leqslant |V|\hat{\varepsilon}_2. \quad (46)\end{cases}
$$

Доказательство. Неравенство (44) вытекает из теоремы 2, неравенство (45) — из неравенств (38), (39), а неравенство (46) — из (40) и (43).

Доказательство Δ-сходимости последовательностей функциональных пар [7] сводится к оценке сумм вида

$$\alpha_{\Delta,m}(\Gamma) = \sum_{\Delta<g\leqslant m} 2^{-g}|\Phi'_1(\Gamma, V, g)|.$$

Теорема 4. *Пусть q и d — произвольные натуральные числа, $p \geqslant 1$, κ достаточно велико, $\lambda \leqslant \kappa\log^{-3}\kappa$, $\hat{\varepsilon}_2 = 1/2 + 2\kappa^{-2}\log^6\kappa$, $\Gamma = (V, E)$ является (κ, p, q, λ)-графом и сильным расширителем, $|V| \leqslant 2^{\kappa\log\kappa}$, $\Delta = \max\left\{\kappa, \left\lceil\frac{\log|X|}{1-3dp\kappa^{-1}\log(4\kappa)}\right\rceil\right\}$ и $m = |V|\hat{\varepsilon}_2$. Тогда*

$$\alpha_{\Delta,m}(\Gamma) = O(\log^{-1}\kappa).$$

Доказательство. Из (44)–(46) получаем

$$\alpha_{\Delta,m}(\Gamma) = \sum_{\Delta<g\leqslant m} 2^{-g}|\Phi_1(\Gamma,V,g)| \leqslant \sum_{\Delta<g\leqslant \kappa^2/(2q)} 2^{-g}|\Phi_1(\Gamma,V,g)|$$
$$+ \sum_{\kappa^2/(2q)<g\leqslant\kappa^3} 2^{-g}|\Phi_1(\Gamma,V,g,\delta')| + \sum_{\kappa^3<g\leqslant m} 2^{-g}|\Phi_1(\Gamma,V,g,\delta)|$$
$$\leqslant \sum_{\kappa<g\leqslant\kappa^2/(2q)} 2^{-gdp\kappa^{-1}\log(4\kappa)} + \sum_{\kappa^2/(2q)<g\leqslant\kappa^3} 2^{-g\kappa^{-1}\log^6\kappa}$$
$$+ \sum_{\kappa^3<g\leqslant m} 2^{-g\kappa^{-2}\log^6\kappa} = O(\log^{-1}\kappa).$$

Теорема 4 доказана.

Автор выражает признательность А. Д. Коршунову и А. В. Косточке за замечания, способствовавшие улучшению текста.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.** Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. М.: Наука, 1992.
2. **Коршунов А. Д.** О числе монотонных булевых функций // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1980. Вып. 38. С. 5–108.
3. **Коршунов А. Д.** О числе r-элементных подмножеств в E^n с равномощными границами. I // Методы дискретного анализа в теории графов и схем: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1986. Вып. 42. С. 44–61.
4. **Коршунов А. Д.** О числе r-элементных подмножеств в E^n с равномощными границами. II // Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1986. Вып. 44. С. 24–53.
5. **Коршунов А. Д., Сапоженко А. А.** О числе двоичных кодов с расстоянием 2 // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1983. Вып. 40. С. 111–140.
6. **Сапоженко А. А.** О числе антицепей в ранжированных частично упорядоченных множествах // Дискрет. математика. 1989. Т. 1, вып. 1. С. 74–93.
7. **Сапоженко А. А.** О числе антицепей в многослойных ранжированных множествах // Дискрет. математика. 1989. Т. 1, вып. 2. С. 110–128.

8. **Сапоженко А. А.** О числе связных подмножеств с заданной мощностью границы в двудольных графах // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. Вып. 45. С. 42–70.
9. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. Т. 1.
10. **Kostochka A. V.** On the number of connected subgraphs with small edge-boundary in regular graphs // Random Graphs and Algorithms. 1994. V. 5, N 1. P. 147–154.

Адрес автора:

МГУ, факультет ВМиК,
Воробьевы горы,
119899 Москва, Россия.
E-mail: mathcyb@cs.msu.su

Статья поступила
26 июня 1996 г.,
переработанный вариант —
8 мая 1997 г.