ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1997. Серия 1. Том 4, № 3, 35–48

УДК 519.8

О ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ЖАДНЫМИ АЛГОРИТМАМИ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ НА МАКСИМУМ*)

М. И. Свириденко

В [2, 3, 7] предложены жадные алгоритмы для решения с гарантированными оценками погрешностей следующих задач размещения: задачи о p-медиане на максимум и взвешенной задачи о p-медиане на максимум. При получении априорных оценок погрешностей существенно использовалась субмодулярность целевой функции. В настоящей работе рассматриваются задачи с дополнительными ресурсными ограничениями. Устанавливается свойство задач, позволяющее найти априорные оценки точности решений. Погрешность решений зависит от числа добавляемых ограничений, и если их число равно нулю, оценки совпадают с уже полученными в [2, 3, 7].

Введение

Задача о p-медиане на максимум формулируется следующим образом. Пусть задано конечное множество $I = \{1, \dots, n\}$, система его подмножеств 2^I и произвольное натуральное p. Требуется найти

$$\max_{S \subseteq I} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \max_{i \in S} f_{ij} \mid |S| \leqslant p \right\}. \tag{1}$$

Обзор результатов для задачи (1) приводится в [4]. В настоящей работе рассматриваются следующие обобщения задачи (1): найти

$$\max_{S \subseteq I} \{ f(S) \mid |S| \leqslant p \}, \tag{2}$$

$$\max_{S \subseteq I} \left\{ f(S) \mid \sum_{i \in S} d_i \leqslant D \right\}, \tag{3}$$

где $f(S)$ — функция, заданная на 2^I и принимающая действительные значения, т. е. $f(S) : 2^I \to R$.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 95–01–00989 и 97–01–00890).

В [2, 3, 7] изучались задачи, в которых функция $f(S)$ удовлетворяла следующим условиям:

(a) $f(\varnothing) = 0$;

(b) $f(S)$ — неубывающая функция, т. е. если $S, T \subseteq I$ и $S \subseteq T$, то $f(S) \leqslant f(T)$;

(c) для любых $S, T \subseteq I$ выполняется неравенство

$$f(T) \leqslant f(S) + \sum_{p \in T \setminus S} \left(f(S \cup \{p\}) - f(S) \right).$$

Функция $f(S)$ на 2^I называется *субмодулярной*, если для любых $S_1, S_2 \in 2^I$ выполнено неравенство $f(S_1) + f(S_2) \geqslant f(S_1 \cup S_2) + f(S_1 \cap S_2)$. В [6, с. 662] доказано, что неубывающая функция $f(S)$ на 2^I является субмодулярной тогда и только тогда, когда выполняется условие (c). В [2, 3] для задачи (2) с целевой функцией, удовлетворяющей условиям (a)–(c), показано, что если S^* — оптимальное решение, а $\widetilde{S}$ — приближенное решение, полученное в результате работы жадного алгоритма, то

$$f(\widetilde{S}) / f(S^*) \geqslant 1 - e^{-1} \approx 0,63. \tag{4}$$

В [7] для задачи (3) с целевой функцией, удовлетворяющей условиям (a)–(c), показано, что

$$f(\widetilde{S}) / f(S^*) \geqslant 1 - e^{-\beta} \approx 0,35, \tag{5}$$

где β — корень уравнения $e^x = 2 - x$. Там же изучалась функция

$$f(S) = \max_{x_{ij} \geqslant 0} \sum_{i \in S} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} x_{ij} \tag{6}$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in S} x_{ij} \leqslant 1, \quad j = 1, \ldots, m; \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_j, \quad i \in S, \tag{8}$$

и было показано, что функция (6)–(8) является субмодулярной, т. е. удовлетворяет условию (c). Таким образом, в [2, 3, 7] установлено, что решения задач (2), (3) с функциями (6)–(8), получаемые жадными алгоритмами, имеют оценки точности (4), (5).

В настоящей работе изучается следующее обобщение функций (6)–(8): найти

$$f(S) = \max_{x_{ij} \geqslant 0} \sum_{i \in S} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} x_{ij} \tag{9}$$

при ограничениях

$$\sum_{i\in S} x_{ij} \leqslant A_j, \quad j = 1,\dots,m; \tag{10}$$

$$\varphi_i(x_{i1},\dots,x_{im}) \leqslant 0, \quad i \in S; \tag{11}$$

$$\sum_{i\in S}\sum_{j=1}^{m} c_{ijl}x_{ij} \leqslant C_l, \quad l = 1,\dots,k, \tag{12}$$

где $\varphi_i(x_{i1},\dots,x_{im})$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям:

1) $\varphi_i(0,\dots,0) \leqslant 0$;

2) если каждая компонента вектора x меньше соответствующей компоненты вектора y, то $\varphi_i(x) \leqslant \varphi_i(y)$.

Ограничение (11) является обобщением ограничения (8). Кроме того, в рассматриваемой задаче присутствуют k дополнительных ресурсных ограничений (12). Будем предполагать, что все числовые параметры исследуемой задачи, т. е. $f_{ij}, c_{ijl}, A_j, C_l, d_i$ и D неотрицательны. В настоящей работе показывается, что для всех $S, T \subseteq I$ функция (9)–(12) удовлетворяет неравенству

$$f(T) \leqslant (k+1)f(S) + \sum_{p\in T\setminus S} (f(S\cup\{p\}) - f(S)).$$

Следовательно, при $k = 0$ функция (9)–(12) является субмодулярной. В общем случае при $k \geqslant 1$ эта функция не является субмодулярной и погрешность решений задач (2), (3), полученных жадными алгоритмами, может превосходить оценки (4), (5).

В разд. 1 изучаются свойства функции $f(S)$. В разд. 2 приводится описание жадных алгоритмов для решения задач (2), (3) и доказывается, что

$$f(\widetilde{S})/f(S^*) \geqslant \frac{1-e^{-(1+k)}}{k+1} = r_k$$

для задачи (2) и

$$f(\widetilde{S})/f(S^*) \geqslant \frac{1-e^{-\beta_k\cdot(1+k)}}{k+1} = R_k$$

для задачи (3), где β_k — корень уравнения $e^{x(1+k)} = (k+1)(1-x)+1$. При $k = 0$ оценки совпадают с полученными в [2, 3, 7]. В настоящей работе доказывается, что при $k \geqslant 0$ числа r_k и R_k удовлетворяют следующим неравенствам:

$$k+1 < r_k^{-1} \leqslant k + r_0^{-1},$$
$$k+2 < R_k^{-1} \leqslant k + R_0^{-1},$$

где $r_0^{-1} \approx 1,58$ и $R_0^{-1} \approx 2,8$.

1. Свойства функции $f(S)$

Положим $f(\varnothing) = 0$ и убедимся в том, что функция $f(S)$ удовлетворяет свойству (b). Пусть $S \subseteq T$. Тогда из любого допустимого решения (x_{ij}), где $i \in S$ и $1 \leqslant j \leqslant m$, задачи (9)–(12) с множеством S, получим допустимое решение задачи (9)–(12) с множеством T и тем же значением целевой функции. Положим $y_{ij} = 0$ при $i \in T \setminus S$, $1 \leqslant j \leqslant m$, и $y_{ij} = x_{ij}$ при $i \in S$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Так как задача (9)–(12) является задачей на максимум, то $f(S)$ удовлетворяет свойству (b). Убедимся в корректности определения $f(S)$.

Утверждение 1. *Определение функции $f(S)$ корректно, т. е. для каждого $S \subseteq I$ существует действительное значение функции $f(S)$.*

Доказательство. Так как при максимизации на замкнутом множестве линейная функция всегда имеет конечный или бесконечный максимум, то для доказательства утверждения достаточно показать, что множество допустимых решений задачи (9)–(12) непусто и замкнуто.

Известно, что если $\varphi(X)$ — непрерывная функция, то $\{X \in R^n \mid \varphi(X) \leqslant 0\}$ является замкнутым множеством. Используя этот факт и то, что пересечение замкнутых множеств замкнуто, получаем, что множество $X \in R^{|S|m}$, удовлетворяющее ограничениям (10)–(12), является замкнутым. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *Если $f(S) = +\infty$, то существует элемент $i \in S$ такой, что $f(\{i\}) = +\infty$.*

Доказательство. Если $f(S) = +\infty$, то найдется бесконечная последовательность $X_1 = (x_{ij}^1), \ldots, X_k = (x_{ij}^k), \ldots$ допустимых решений задачи (9)–(12) таких, что

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{i\in S} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} x_{ij}^k = +\infty.$$

Далее, существует такая пара (i,j), что $f_{ij} \neq 0$ и $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{ij}^k = +\infty$, так как в противном случае значение целевой функции на матрице X_k при $k \to +\infty$ было бы ограничено. Определим вектор x^k следующим образом:

$$x_l^k = \begin{cases} 0 & \text{при } l \neq j, \\ x_{ij}^k & \text{при } l = j. \end{cases}$$

Вектор x^k удовлетворяет ограничениям (10)–(12) при $S = \{i\}$ и $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{j=1}^{m} f_{ij} x_j^k = +\infty$. Утверждение 2 доказано.

Далее будем предполагать, что $f(S^*) \neq +\infty$, так как в противном случае точное решение можно вычислить за $O\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} T_i\Big)$ действий, где T_i — количество действий, необходимых для вычисления функции $f(\{i\})$.

Лемма 1. *Для любых $S_1, S_2 \subseteq I$ справедливо неравенство $f(S_1) + f(S_2) \geqslant f(S_1 \cup S_2)$.*

Доказательство. Обозначим через x^*_{ij}, где $i \in S_1 \cup S_2$ и $1 \leqslant j \leqslant m$, оптимальное решение задачи (9)–(12) с множеством $S = S_1 \cup S_2$. Заметим, что для x^*_{ij}, где $i \in S_1$ и $1 \leqslant j \leqslant m$, справедливы неравенства (10)–(12), т. е. $x^*_{ij} (i \in S_1$ и $1 \leqslant j \leqslant m)$ — допустимое решение задачи (9)–(12) с множеством $S = S_1$. Поэтому выполняется неравенство

$$f(S_1) \geqslant \sum_{i \in S_1} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} x^*_{ij}.$$

Аналогично убеждаемся в том, что

$$f(S_2) \geqslant \sum_{i \in S_2} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} x^*_{ij}.$$

Следовательно,

$$f(S_1) + f(S_2) \geqslant \sum_{i \in S_1} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} x^*_{ij} + \sum_{i \in S_2} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} x^*_{ij} \geqslant f(S_1 \cup S_2).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $g(B; x_1, \ldots, x_n)$ — значение целевой функции непрерывной задачи о ранце:*

$$\sum_{i=1}^{n} g_i x_i$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leqslant B,$$
$$0 \leqslant x_i \leqslant 1.$$

Тогда для любого $\Delta \in [0, B]$ найдется вектор $\bar{x} \in R^n$ такой, что

$$g(B - \Delta; \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) / g(B; x_1, \ldots, x_n) \geqslant 1 - \Delta / B$$

и $\bar{x}_i \leqslant x_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$G(B) = \max \sum_{i=1}^{n} g_i y_i$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i \leqslant B; \tag{14}$$

$$0 \leqslant y_i \leqslant x_i. \tag{15}$$

Пусть $\bar{x}(B)$ — оптимальное решение задачи (13)–(15). Используя вогнутость функции $G(B)$ и то, что $G(0) = 0$, имеем

$$\frac{g(B-\Delta; \bar{x}_1(B-\Delta), \ldots, \bar{x}_n(B-\Delta))}{B-\Delta} = \frac{G(B-\Delta)}{B-\Delta} \geqslant \frac{G(B)}{B} = \frac{g(B; x_1, \ldots, x_n)}{B}.$$

Лемма 2 доказана.

Обозначим через $f(S; A_1, \ldots, A_m; C_1, \ldots, C_k)$ функцию (9)–(12). Иногда некоторые переменные в этом обозначении для краткости будем опускать.

Лемма 3. *Если* $\Delta \in [0, C_1]$, *то*

$$1 \geqslant \frac{f(S; C_1 - \Delta, C_2, \ldots, C_k)}{f(S; C_1, \ldots, C_k)} \geqslant 1 - \frac{\Delta}{C_1}.$$

Справедливость леммы следует из того, что если матрица $X = (x_{ij})$ удовлетворяет одному из ограничений (10)–(12), то $Y \leqslant X$ тоже удовлетворяет этому ограничению. Используя лемму 2, получаем требуемое утверждение.

В следующей теореме обобщается известное свойство субмодулярных функций.

Теорема 1. *Для любых* $S, T \subseteq I$ *справедливо неравенство*

$$f(T) \leqslant (k+1)f(S) + \sum_{p \in T \setminus S} \left(f(S \cup \{p\}) - f(S)\right), \tag{16}$$

где k *— число ограничений* (12).

Доказательство. Неравенство (16) эквивалентно неравенству

$$f(T) + |T| f(S) \leqslant (k+1)f(S) + \sum_{p \in T} f(S \cup \{p\}).$$

Пусть $x^*_{ij}(T)$, где $i \in T$ и $1 \leqslant j \leqslant m$, — оптимальное решение задачи (9)–(12) с множеством T. Для каждого $p \in T$ построим допустимое решение $x_{ij}(S \cup \{p\})$ (где $i \in S \cup \{p\}$ и $1 \leqslant j \leqslant m$) задач (9)–(12) с множеством $S \cup \{p\}$ по следующему правилу. Пусть $x_{ij}(S \cup \{p\}) = x^*_{ij}(T)$ при $i = p$. Для любого $i \in S$ полагаем $x_{ij}(S \cup \{p\}) = x_{ij}$, где (x_{ij}), $(i \in S$ и $1 \leqslant j \leqslant m)$ — оптимальное решение задачи

$$\max_{x_{ij} \geqslant 0} \sum_{i \in S} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in S} x_{ij} \leqslant A_j - x^*_{pj}(T), \quad 1 \leqslant j \leqslant m;$$

$$\varphi_i(x_{i1}, \ldots, x_{im}) \leqslant 0, \quad i \in S;$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j=1}^{m} c_{ijl} x_{ij} \leqslant C_l - \sum_{j=1}^{m} c_{pjl} x^*_{pj}(T), \quad 1 \leqslant l \leqslant k.$$

Пусть $x^*_{pj}(T) = \delta_{pj}$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} c_{pjl} x^*_{pj}(T) = \Delta_{pl}$. Из допустимости (x^*_{ij}) следует, что $\sum\limits_{p \in T} \delta_{pj} \leqslant A_j$ и $\sum\limits_{p \in T} \Delta_{pl} \leqslant C_l$ для всех i и j, $1 \leqslant j \leqslant m$; $1 \leqslant l \leqslant k$. Неравенство

$$(k+1) f(S) + \sum_{p \in T} f(S \cup \{p\}) \geqslant (k+1) f(S)$$
$$+ \sum_{p \in T} \sum_{i \in S \cup \{p\}} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} x_{ij}(S \cup \{p\}) \geqslant (k+1) f(S) + f(T)$$
$$+ \sum_{p \in T} f(S; A_1 - \delta_{p1}, \ldots, A_m - \delta_{pm}; C_1 - \Delta_{p1}, \ldots, C_k - \Delta_{pk})$$

следует из того, что $(x_{ij}(S \cup \{p\}))$ — допустимое решение задачи (9)–(12). Утверждение теоремы вытекает из следующего неравенства:

$$(k+1) f(S) + \sum_{p \in T} f(S; A_1 - \delta_{p1}, \ldots, A_m - \delta_{pm};$$
$$C_1 - \Delta_{p1}, \ldots, C_k - \Delta_{pk}) \geqslant |T| f(S). \quad (17)$$

Докажем неравенство (17). Используя лемму 3, получаем

$$f(S; A_1 - \delta_{p1}, \ldots, A_m - \delta_{pm}; C_1 - \Delta_{p1}, \ldots, C_k - \Delta_{pk})$$
$$\geqslant f(S; A_1 - \delta_{p1}, \ldots, A_m - \delta_{pm}; C_1 - \Delta_{p1}, \ldots, C_{k-1} - \Delta_{pk-1}, C_k) - \frac{\Delta_{pk}}{C_k} f(S). \quad (18)$$

Суммируя неравенства (18) по $p \in T$ и используя тот факт, что $\sum\limits_{p \in T} \Delta_{pk} \leqslant C_k$, имеем

$$f(S) + \sum_{p \in T} f(S; A_1 - \delta_{p1}, \ldots, A_m - \delta_{pm}; C_1 - \Delta_{p1}, \ldots, C_k - \Delta_{pk})$$
$$\geqslant \sum_{p \in T} f(S; A_1 - \delta_{p1}, \ldots, A_m - \delta_{pm}; C_1 - \Delta_{p1}, \ldots, C_{k-1} - \Delta_{pk-1}, C_k).$$

Повторив аналогичную процедуру k раз, получаем

$$kf(S) + \sum_{p \in T} f(S; A_1 - \delta_{p1}, \ldots, A_m - \delta_{pm}; C_1 - \Delta_{p1}, \ldots, C_k - \Delta_{pk})$$
$$\geqslant \sum_{p \in T} f(S; A_1 - \delta_{p1}, \ldots, A_m - \delta_{pm}; C_1, \ldots, C_k).$$

Для доказательства теоремы осталось установить справедливость неравенства

$$f(S) + \sum_{p \in T} f(S; A_1 - \delta_{p1}, \ldots, A_m - \delta_{pm}) \geqslant |T| f(S). \qquad (19)$$

Пусть $X^*(S) = (x^*_{ij}(S))$ ($i \in S$ и $j = 1, \ldots, m$) — оптимальное решение задачи (9)–(12) с правыми частями $A_1, \ldots, A_m; C_1, \ldots, C_k$. Построим допустимые решения задач из левой части неравенства (19), на которых выполняется (19).

Пусть $A'_j = \sum\limits_{i \in S} x^*_{ij}(S)$. Так как $f(S; A_1, \ldots, A_m) = f(S; A'_1, \ldots, A'_m)$ и выполняется неравенство

$$f(S; A_1, \ldots, A_m) + \sum_{p \in T} f(S; A_1 - \delta_{p1}, \ldots, A_m - \delta_{pm})$$
$$\geqslant f(S; A'_1, \ldots, A'_m) + \sum_{p \in T} f(S; A'_1 - \delta_{p1}, \ldots, A'_m - \delta_{pm}),$$

то достаточно рассмотреть случай, когда $A_j = \sum\limits_{i \in S} x^*_{ij}(S)$. Рассмотрим j-й столбец матрицы $X^*(S)$, т. е. $x^*_j = (x^*_{ij}(S))$, где $i \in S$. Для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant m$, определим множество векторов $\{y^p_j \mid p \in T\}$ таких, что

(a) для всех j, $1 \leqslant j \leqslant m$, и $p \in T$ размерность вектора y^p_j равна $|S|$;

(b) для всех $i \in S$ и j, $1 \leqslant j \leqslant m$, выполняется неравенство

$$\sum_{p \in T} y^p_{ij} \leqslant x^*_{ij};$$

(c) для всех $p \in T$ и j, $1 \leqslant j \leqslant m$, выполняется неравенство

$$\sum_{i \in S} y^p_{ij} = \delta_{pj}.$$

Для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant m$, вычисляем $\{y_j^p \mid p \in T\}$ по следующему правилу.

1. Полагаем p равным минимальному индексу в T и $x_{ij} = x_{ij}^*(S)$.

2. Для $i \in S$ в порядке возрастания индекса i вычисляем i-ю компоненту вектора y_j^p:

$$y_{ij}^p = \min\left\{x_{ij}, \delta_{pj} - \sum_{l=1}^{i-1} y_{lj}^p\right\}. \tag{20}$$

3. Если p — максимальный индекс в T, то алгоритм останавливается, в противном случае полагаем $x_{ij} := x_{ij} - y_{ij}^p$, $p := \min_{i\in T}\{i \mid i > p\}$ и повторяем шаг 2.

Заметим, что построенная система векторов $\{y_j^p \mid p \in T\}$ обладает первым и вторым свойствами. Убедимся в том, что выполняется третье свойство. По построению для каждого $p \in T$ выполняется неравенство $\sum\limits_{i\in S} y_{ij}^p \leqslant \delta_{pj}$. Допустим, что для некоторого $l \in T$ выполняется строгое неравенство $\sum\limits_{i\in S} y_{ij}^l < \delta_{lj}$. Тогда из (20) следует, что $\sum\limits_{p\in T} y_{ij}^p = x_{ij}^*$ для всех $i \in S$. Значит,

$$A_j = \sum_{i\in S} x_{ij}^* = \sum_{i\in S}\sum_{p\in T} y_{ij}^p < \sum_{p\in T} \delta_{pj} \leqslant A_j.$$

Противоречие. Таким образом, система векторов $\{y_j^p : p \in T\}$ обладает свойством 3.

По свойству 3 матрица $x_{ij}^p = x_{ij}^*(S) - y_{ij}^p$ ($i \in S$ и $j = 1,\dots,m$) является допустимым решением задачи (9)–(12) с множеством $S \cup \{p\}$ и правыми частями $A_1 - \delta_{p1}, \dots, A_m - \delta_{pm}$ неравенств (10). Используя свойство 2, получаем

$$\begin{aligned} f(S) &+ \sum_{p\in T} f(S; A_1 - \delta_{p1}, \dots, A_m - \delta_{pm}) \\ &\geqslant \sum_{i\in S}\sum_{j=1}^{m} f_{ij}\Bigl(\sum_{p\in T} y_{ij}^p\Bigr) + \sum_{p\in T}\sum_{i\in S}\sum_{j=1}^{m} f_{ij} x_{ij}^p = |T| f(S), \end{aligned}$$

что доказывает неравенство (19). Теорема 1 доказана.

2. Описание алгоритма и доказательство оценки

Приведем описание жадного алгоритма для решения задачи (3). Алгоритм состоит из двух этапов.

1-й этап. Полагается $S^0 = V$, $t = 0$.

Если на шаге $t+1$ имеется S^t, то находится величина

$$\theta_{t+1} = \max_{i \in I \setminus S^t} \frac{\rho_i(S^t)}{d_i} = \frac{\rho_{i_{t+1}}}{d_{i_{t+1}}},$$

где $\rho_i(S^t) = f(S^t \cup \{i\}) - f(S^t)$.

Если $\sum\limits_{i \in S^t} d_i + d_{i_{t+1}} \leqslant D$, то полагается $S^{t+1} = S^t \cup \{i_{t+1}\}$ и $t = t+1$. В противном случае полагается $r = t$ и осуществляется переход ко второму этапу.

2-й этап. Пусть $k \in I \setminus S^r$ — элемент, на котором достигается $\max_{i \in I \setminus S^r} f(\{i\})$. Если $f(S^r) \leqslant f(\{k\})$, то полагается $\widetilde{S} = \{k\}$. В противном случае $\widetilde{S} = S^r$.

В [7] описанный алгоритм применялся к задаче (3) с субмодулярной целевой функцией. Жадный алгоритм для задачи (2) состоит только из первого этапа с учетом того, что $D = p$ и $d_i = 1$ для всех i. Временна́я сложность алгоритма оценивается сверху величиной $O(|I|^2 T_f)$, где T_f — количество элементарных операций, необходимых для вычисления функции $f(S)$. Например, если φ_i — линейные функции, то $f(S)$ можно вычислять с полиномиальной временно́й сложностью алгоритмом эллипсоидов [1] или алгоритмом Кармаркара [5]. Так как $f(S^r) = 0\ (+\infty) \iff f(S^*) = 0\ (+\infty)$, где S^* — оптимальное решение задачи (3), то при доказательстве оценок будем считать, что $0 < f(S^*) < +\infty$. Для обоснования оценок точности используется

Лемма 4 [7]. *Пусть k, n и d — произвольные натуральные числа, ρ_i — произвольные действительные неотрицательные числа, $1 \leqslant i \leqslant n$, и $\rho_1 > 0$. Тогда*

$$\frac{\rho_1 + \cdots + \rho_n}{\min\limits_{t=1,\ldots,n} \left(k \sum\limits_{i=1}^{t-1} \rho_i + d\rho_t \right)} \geqslant \frac{1 - e^{-\frac{k \cdot n}{d}}}{k}.$$

Теперь докажем теорему о свойстве допустимого решения S^r, полученного после первого этапа.

Теорема 2. *Пусть $\lambda \in [0,1]$ и $\sum\limits_{i \in S^r} d_i = \lambda D$. Тогда*

$$f(S^r)/f(S^*) \geqslant (1 - e^{-\lambda(k+1)})/(k+1). \tag{21}$$

Доказательство почти совпадает с доказательством аналогичной теоремы для субмодулярных функций, приведенных в [7]. Пусть S^t, $0 \leqslant t \leqslant r$, — множества, полученные в результате работы алгоритма.

Используя теорему 1 и определение величин $\rho_i(S^t)$, при любом t, $0 \leqslant t \leqslant r-1$, получаем

$$f(S^*) \leqslant (k+1)f(S^t) + \sum_{i\in T\setminus S^t} \rho_i(S^t) \leqslant (k+1)f(S^t) + D\theta_{t+1}.$$

Второе неравенство следует из того, что $\rho_i(S^t) \leqslant d_i\theta_{t+1}$ и $\sum\limits_{i\in T} d_i \leqslant D$.

Положим $n_0 = 0$ и $n_t = \sum\limits_{j=1}^{t} d_{i_j}$, где $1 \leqslant t \leqslant r$. Определим величины ρ_i, $1 \leqslant i \leqslant \lambda D$, по следующему правилу: $\rho_i = \theta_t$ для всех $i = n_{t-1}+1, \ldots, n_t$.

Так как $f(S^t) = \sum\limits_{i=1}^{n_t} \rho_i$, то для каждого s, $n_t + 1 \leqslant s \leqslant n_{t+1}$, имеем

$$(k+1)f(S^t) + D\theta_{t+1} \leqslant (k+1)\sum_{i=1}^{s-1} \rho_i + D\rho_s.$$

Используя лемму 4 и то, что $f(S^r) = \sum\limits_{i=1}^{\lambda D} \rho_i$, получаем

$$f(S^r)/f(S^*) \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{\lambda D} \rho_i}{\min_{s=1,\ldots,\lambda D}\left\{(k+1)\sum\limits_{i=1}^{s-1} \rho_i + D\rho_s\right\}} \geqslant (1 - e^{-\lambda(k+1)})/(k+1).$$

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 вытекает оценка точности решений, получаемых жадным алгоритмом, для задачи (2), так как в этом случае $\lambda = 1$. Поэтому

$$\frac{f(S^r)}{f(S^*)} \geqslant (1 - e^{-(k+1)})/(k+1). \qquad (22)$$

Установим оценку точности решений задачи (3).

Теорема 3. *Пусть β_k является корнем уравнения $e^{x(1+k)} = (k+1) \times (1-x) + 1$. Тогда*

$$f(\widetilde{S})/f(S^*) \geqslant (1 - e^{-\beta_k(k+1)})/(k+1).$$

Доказательство. Так как $\sum\limits_{i\in S^r} d_i = \lambda D$ и $d_{i_{r+1}} > (1-\lambda)D$, то, используя лемму 1, получаем

$$\rho_{r+1}(S^r) = f(S^r \cup \{i_{r+1}\}) - f(S^r) \leqslant f(\{i_{r+1}\}).$$

Следовательно,

$$f(S^*) \leqslant (k+1)f(S^r) + D\theta_{r+1} < (k+1)f(S^r) + \frac{d_{i_{r+1}}}{1-\lambda}\theta_{r+1}$$

$$\leqslant (k+1)f(S^r) + \frac{f(\{i_{r+1}\})}{1-\lambda} \leqslant \left[\left(\frac{1}{1-\lambda}\right) + k + 1\right] \max\{f(S^r), f(\{i_{r+1}\})\}.$$

Применяя (21), получаем неравенство

$$\frac{f(\widetilde{S})}{f(S^*)} \geqslant \frac{\max\{f(S^r), f(\{i_{r+1}\})\}}{f(S^*)}$$
$$\geqslant \min_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} \max\left\{\frac{1-e^{-\lambda(k+1)}}{k+1}, \left(\frac{1}{1-\lambda}+k+1\right)^{-1}\right\}.$$

Так как на отрезке [0,1] функция $\frac{1-e^{-\lambda(k+1)}}{k+1}$ строго возрастает, а функция $(\frac{1}{1-\lambda}+k+1)^{-1}$ строго убывает, то максимум достигается в точке пересечения этих функций при $\lambda = \beta_k$, где β_k — корень уравнения $e^{x(1+k)} = (k+1)(1-x)+1$. Теорема 3 доказана.

Отметим без доказательства некоторые свойства последовательности β_k:

(a) $\{\beta_k\}$ является убывающей последовательностью;

(b) $\beta_0 \approx 0,44 < 0,5$ и $\beta_k > 0$ для всех $k \geqslant 0$;

(c) $\{\beta_k\} \to 0$ при $k \to +\infty$.

Теорема 4. *Если $k \geqslant 0$, то справедливы неравенства*

$$k+1 < \frac{k+1}{1-e^{-(1+k)}} \leqslant k + r_0^{-1}, \tag{23}$$
$$k+2 < \frac{k+1}{1-e^{-\beta_k\cdot(1+k)}} \leqslant k + R_0^{-1}. \tag{24}$$

Доказательство. Первое неравенство в (23) очевидно, второе прямым преобразованием приводится к виду

$$e^k \geqslant k(1-e^{-1})+1,$$

которое обращается в равенство при $k=0$ и является строгим при $k \geqslant 1$. Подставляя в (24) вместо $e^{\beta_k\cdot(1+k)}$ величину $(k+1)(1-\beta_k)+1$ и делая преобразования, получаем эквивалентные неравенства

$$k+2 < k+1+\frac{1}{1-\beta_k} \leqslant k+1+\frac{1}{1-\beta_0} = k + R_0^{-1},$$

которые выполняются, так как β_k — убывающая последовательность и $0 < \beta_k < 0,5$. Теорема 4 доказана.

Приведем пример исходных данных задачи (2), на которых доказанная оценка достигается асимптотически. В [2] приведен пример исходных данных, на которых оценка достигается при $k=0$. Рассмотрим задачу (2) с функцией $f(S)$, которая является частным случаем функции (9)–(12): найти

$$\max_{x_{ij}\geqslant 0, S\subseteq I} \sum_{i\in S}\sum_{j=1}^{m} f_{ij}x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i\in S} x_{ij} \leqslant 1 \quad 1 \leqslant j \leqslant m;$$

$$\sum_{i\in S}\sum_{j=1}^{m} c_{ijl}x_{ij} \leqslant 1, \quad 1 \leqslant l \leqslant k;$$

$$|S| \leqslant p.$$

Пусть $|I| = 2k+2$ и $p = m = k+1$. Обозначим через E_k единичную матрицу порядка k, через O_k нулевую матрицу порядка k и через O_k^l квадратную матрицу того же порядка с единственным ненулевым элементом $a_{ll} = 1$. Определим матрицу $F_k = (f_{ij}^k)$ размера $(2k+2)\times(k+1)$ следующим образом:

$$F_k = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 0\cdots 0 \\ 1 & 0\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \varepsilon\cdot E_k \\ 0 & \\ 0 & \\ \vdots & E_k \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

Для каждого k, $k = 1,2,\ldots$, определим k матриц $C_k^l = (c_{ijl}^k)$, $1 \leqslant l \leqslant k$, размера $(2k+2)\times(k+1)$:

$$C_k^l = \begin{pmatrix} 1 & 0\cdots 0 \\ 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & O_k \\ 0 & \\ 0 & \\ \vdots & O_k^l \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

Оптимальным решением S^* при достаточно малом ε является множество $\{2, k+3, \ldots, 2k+2\}$. В результате работы жадного алгоритма получим $\widetilde{S} = \{1, 3, \ldots, k+2\}$. Следовательно, $f(\widetilde{S})/f(S^*) = (1+(k+1)\varepsilon)/(k+1) = \varepsilon + (1/(k+1))$. В силу произвольности ε оценка точности решений не превосходит величины $1/(k+1)$, которая при $k \to +\infty$ совпадает с оценкой (22). Вопрос о достижимости оценки при фиксированном $k \geqslant 1$ остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хачиян Л. Г.** Полиномиальный алгоритм в линейном програмировании // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244, № 5. С. 1093–1096.
2. **Cornuejols G., Fisher M. L., Nemhauser G. L.** Location of bank accounts to optimize float: an analytic study of exact and approximate algorithms // Management Sci. 1977. V. 22, N 8. P. 789–810.
3. **Fisher M. L., Nemhauser G. L., Wolsey L. A.** An analysis of approximations for maximizing submodular set functions. I // Math. Programming. 1978. V. 14, N 3. P. 265–294.
4. **Hochbaum D. S.** Approximating covering and packing problems: set cover, vertex cover, independent set, and related problems // Approximation algorithms for NP-hard problems. Boston: PWS Publishing Company, 1996. P. 94–143.
5. **Karmarkar N.** A new polinomial-time algorithm for linear programming // Combinatorica. 1984. V. 4, N 4. P. 373–395.
6. **Nemhauser G. L., Wolsey L. A.** Integer and combinatorial optimization. N. Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1988.
7. **Wolsey L. A.** Maximizing real-valued submodular functions: primal and dual heuristics for location problems // Math. Oper. Res. 1982. V. 7, N 3. P. 410–425.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
18 марта 1996 г.,
переработанный вариант —
23 апреля 1997 г.