ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1997. Серия 1. Том 4, № 4, 3–5

УДК 519.17

О РАЗБИЕНИИ МНОЖЕСТВА РЕБЕР ГРАФА НА ИЗОМОРФНЫЕ ДЕРЕВЬЯ*)

С. В. Августинович

Пусть G — произвольный k-однородный двудольный граф, ребра которого можно правильно раскрасить в k цветов так, что в каждом его цикле найдутся четыре ребра, на раскраску которых потрачено не более двух цветов. Доказано, что для всякого дерева T с k ребрами существует разбиение множества ребер графа G на индуцированные подграфы, каждый из которых изоморфен дереву T.

Тема покрытия вершин графа его одинаковыми подграфами неоднократно рассматривалась исследователями (см. библиографию из [2]). Вопрос о покрытии ребер графа является менее традиционным. Упомянем теорему Кенига — Холла [1], которую можно сформулировать следующим образом: ребра всякого k-однородного двудольного графа можно покрыть k паросочетаниями.

Пусть G — произвольный k-однородный граф с $2n$ вершинами и T — произвольное дерево с k ребрами. Будем говорить, что множество $E(G)$ ребер графа G допускает покрытие деревом T, если существует такое разбиение $E(G) = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$, что для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ множество E_i образует дерево T_i, изоморфное дереву T. Будем также говорить, что T_i является *вложением* дерева T в граф G. В случае, когда каждое T_i является индуцированным подграфом графа G, покрытие будем называть *индуцированным*.

Дефицитом реберно раскрашенного цикла C назовем разность между длиной цикла C и количеством различных цветов, использованных для его раскраски. Правильную раскраску ребер графа G назовем *дефицитной*, если всякий цикл в G имеет ненулевой дефицит. Дефицитную раскраску ребер графа G назовем *сильно дефицитной*, если дефицит каждого цикла в G больше 1. Двудольный k-однородный граф,

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96–01–01800 и 97–01–01075) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (код проекта 473).

допускающий правильную дефицитную (сильно дефицитную) раскраску ребер в k цветов, будем называть D-графом (соответственно S-графом).

Теорема 1. *Пусть G — произвольный k-однородный D-граф. Для всякого дерева T с k ребрами существует покрытие ребер графа G деревом T.*

Доказательство. Возьмем два цвета и правильно покрасим вершины G и T этими цветами. Пусть ребра T произвольно покрашены в те же k цветов, что и ребра G, причем все ребра покрашены в разные цвета. Вложение дерева T в граф G назовем согласованным по раскраске, если совпавшие вершины и ребра будут окрашены одинаково. Легко видеть, что для каждого ребра e графа G существует единственное согласованное по раскраске вложение T в G, содержащее ребро e. Предположим, что при последовательном построении вложения T в G произошло самопересечение, т. е. возник цикл. Это противоречит дефицитности раскраски графа G, поскольку все ребра дерева T покрашены в разные цвета.

Как следствие, любые два различных согласованных вложения T в G не могут пересекаться по ребрам. Отсюда немедленно вытекает утверждение теоремы 1. Действительно, искомое покрытие получается, если рассмотреть множество всех различных согласованных вложений T в G.

Теорема 2. *Пусть G — произвольный k-регулярный S-граф. Для всякого дерева T с k ребрами существует индуцированное покрытие ребер графа G деревом T.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Единственное дополнение: если бы вложение T в G не было индуцированным, то в G нашелся бы цикл, в котором ровно один цвет встречается дважды, а остальные — в точности по одному разу, что противоречит сильно дефицитной раскраске ребер графа G.

В заключение сделаем два замечания, проливающие некоторый свет на то, насколько мощным является класс S-графов.

Утверждение 1. *Всякий двудольный k-регулярный граф, имеющий обхват не меньше $k+2$, является S-графом.*

Существование правильной раскраски в данном случае обеспечено теоремой Кенига — Холла, а ее сильная дефицитность — большим обхватом.

Утверждение 2. *Декартово произведение двух S-графов есть S-граф.*

Пусть G_1 и G_2 являются S-графами и их ребра сильно дефицитно раскрашены в непересекающиеся множества цветов. Очевидно, что соответствующая раскраска ребер графа $G = G_1 \times G_2$ будет правильной. Рассмотрим произвольный цикл C в графе G. Если его проекция на один из графов, например G_1, не содержит ребер, то это означает, что цикл C полностью содержится во втором графе и, следовательно, имеет дефицит больше 1. Если же обе проекции цикла C непусты, то каждая из них даст ненулевой вклад в дефицит C, что завершает доказательство.

Ярким представителем S-графов является n-мерный единичный куб. Если все его параллельные ребра покрасить одинаково, соответствующая раскраска будет сильно дефицитной, в чем нетрудно убедиться.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973.
2. **Cohen G., Litsyn S., Vardy A., Zémor G.** Tilings of binary spaces // SIAM J. Discrete Math. 1996. V. 9, N 3. P. 393–412.

Адрес автора:

Новосибирский
государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: avgust@math.nsc.ru

Статья поступила
1 августа 1997 г.