ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1997. Серия 1. Том 4, № 4, 6–12

УДК 519.1

МИНИМАЛЬНЫЕ НУМЕРАЦИИ ПОДМНОЖЕСТВ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА И ПРОБЛЕМА ГАМИЛЬТОНОВОСТИ ГРАФА СРЕДНИХ СЛОЕВ ГИПЕРКУБА*)

А. А. Евдокимов, А. Л. Перележогин

Для известной задачи о существовании гамильтонова цикла в двух средних слоях n-мерной булевой решетки нечетной размерности получены необходимые и достаточные условия на n-буквенную последовательность, кодирующую такой цикл. Показано, что буквы должны удовлетворять определенным свойствам равномерного расположения в этой последовательности.

Введение

Статья посвящена развитию подхода к исследованию задач вложения в n-мерные двоичные кубы и графы регулярной структуры, который основывается на редукции задач вложения к исследованию «слов с запретами» в n-буквенном алфавите [1, 3–6]. Так, различного типа вложения цепей и циклов в гиперкуб могут быть сведены к задачам существования и построения символьных последовательностей с определенными ограничениями на их фрагменты — подслова или подпоследовательности. Подход успешно работает в тех задачах, в которых совокупность получающихся ограничений на структуру последовательностей оказывается не слишком сложной [1, 2, 4–6, 8]. Вместе с тем интерпретация задачи на языке символьных последовательностей с запретами может облегчить поиск алгоритмов построения решения.

Рассматривается задача о гамильтоновости графа, образованного двумя средними слоями булева гиперкуба нечетной размерности. В терминологии подмножеств конечного множества гамильтоновость графа

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01800) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (код проекта 473).

в этой задаче означает, что можно так линейно (или циклически) упорядочить все k- и $(k+1)$-элементные подмножества произвольного множества из $2k+1$ элементов, чтобы соседние в этом порядке подмножества различались точно одним элементом. Такие упорядочения называют перечислениями, или нумерациями в порядке минимального изменения [2, 9, 13]. В более общей ситуации нумерации минимального изменения используют для поиска эффективных алгоритмов быстрого машинного генерирования данного множества объектов [7, 9]. Наш интерес к задачам этого типа связан также с идеей возможности простого кодирования последовательности объектов, причем используется не описание каждого объекта, а экономно кодируется лишь незначительное отличие их в упорядоченности.

В англоязычной литературе задачу о гамильтоновости графа двух средних слоев гиперкуба называют «the middle levels problem» [10–12]. Справедливость гипотезы о существовании гамильтонова цикла в графе средних слоев подтверждена для всех нечетных значений $n \leqslant 23$, получены нижние оценки наибольшей длины простых цепей и циклов, но, как отмечено в [12], хотя задача просто формулируется, она остается нерешенной, несмотря на усилия многих исследователей.

В данной работе мы не ставили цели получения оценок длины, а попытались с помощью нашего подхода понять структуру возможного решения и его характеризацию кодирующей символьной последовательностью с ограничениями на ее подслова и подпоследовательности. Такая характеризация получена (лемма и теорема 1), она проста и позволяет доказать структурные свойства гипотетического решения о расположении букв алфавита и равенстве частот их вхождения в любое решение (теорема 2). Надеемся, что это может способствовать поиску алгоритмов построения гамильтонова цикла или отсечению неперспективных подходов, например, тех конструкций, которые не дают равномерного спектра вхождения ребер каждого из n направлений ортов гиперкуба.

1. Определения и вспомогательные рассмотрения

Напомним определения и простые утверждения [1, 4], которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть $I = \{0, 1\}$. Через I^n обозначаем множество двоичных наборов длины n, а также граф n-мерного куба с множеством вершин I^n и множеством ребер $\{(u, v) \mid u,\ v \in I^n,\ \rho(u, v) = 1\}$, где ρ — расстояние Хемминга. Как обычно, $w(v) = \rho(\bar{0}, v)$ — вес вершины v. Множество всех вершин веса i называем i-слоем. Для любого $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ через $I^n(i, i+1)$ обозначаем подграф n-куба, порожденный множеством всех вершин i-слоя и $(i+1)$-слоя.

Произвольный путь $P = v_0, v_1, \ldots, v_l$ в графе I^n однозначно определяет слово $X = x_1 x_2 \ldots x_l$ в алфавите $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что v_{i-1} отличается от v_i только в x_i-й координате. Слово X назовем кодирующим путь P. Обратно, для любого слова $X = x_1 x_2 \ldots x_l$ в алфавите A_n и начальной вершины v_0 в графе I^n существует единственный путь $P = v_0, v_1, \ldots, v_l$ такой, что вершины v_{i-1} и v_i отличаются только в x_i-й координате. Таким образом, имеем взаимно однозначное соответствие (с точностью до выбора начальной вершины) между путями в I^n и кодирующими словами в n-буквенном алфавите.

Утверждение 1. *Расстояние Хемминга между концами пути равно числу букв, входящих в кодирующее путь слово нечетное число раз. Путь является циклическим (v_0 совпадает с v_l) тогда и только тогда, когда в кодирующее слово каждая буква входит четное число раз.*

Кодирующее слово циклического пути будем называть циклическим словом и считать, что за его последней буквой следует первая.

Утверждение 2. *Путь является простой цепью, т. е. все его вершины различны, тогда и только тогда, когда в любом подслове кодирующего слова существует буква, входящая в это подслово нечетное число раз.*

Пусть X — циклическое слово в алфавите A_n. Определим отображение $prev_X$ множества $\{1, 2, \ldots, |X|\}$ в себя следующим образом. Пусть в X на i-м месте находится некоторая буква, а предыдущее (по циклу) вхождение этой же буквы имеет номер j. Тогда полагаем

$$prev_X(i) = j.$$

Например, если $X = 12131213$, то

$$\begin{gathered} prev_X(1) = 7, \quad prev_X(2) = 6, \quad prev_X(3) = 1, \quad prev_X(4) = 8, \\ prev_X(5) = 3, \quad prev_X(6) = 2, \quad prev_X(7) = 5, \quad prev_X(8) = 4. \end{gathered}$$

Ясно, что $prev_X$ — перестановка на множестве X. Для $i \in \{1, 2, \ldots, |X|\}$ пусть

$$\mu_X(i) = \begin{cases} 1, & \text{если число } prev_X(i) - i \text{ четно,} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и

$$\delta(X) = \frac{1}{|X|} \sum_{i=1}^{|X|} \mu_X(i).$$

Легко видеть, что $0 \leqslant \delta(X) \leqslant 1$. Например, $\delta(12131213) = 1$ и $\delta(123123) = 0$.

Естественная ориентация ортов куба I^n определяет ориентацию ребер каждого из n его направлений. Любой путь в I^n проходит ребра одного направления, чередуя их прохождение в прямом и обратном направлении ориентации. Поэтому кодирующие слова удобно рассматривать в «групповом» алфавите $\{1, 2, \dots, n, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}\}$, полагая, что буква x^σ, $\sigma \in \{0, 1\}$, соответствует прямому ($x^1 = x$) или обратному ($x^0 = \bar{x}$) прохождению ребра x-направления, $x \in A_n$. Например, кодирующее слово гамильтонова цикла 12131213 с начальной вершиной $v_0 = (000)$ имеет вид $12\bar{1}31\bar{2}\bar{1}\bar{3}$, а с началом в $v_0 = (011)$ имеет вид $1\bar{2}\bar{1}\bar{3}12\bar{1}3$.

Для произвольного циклического слова $X = x_1 x_2 \dots x_l$ пусть $X_x = x^{\sigma}_{i_1}, x^{\bar\sigma}_{i_2}, x^{\sigma}_{i_3}, \dots, x^{\bar\sigma}_{i_k}$ — подпоследовательность всех вхождений буквы x в X. Назовем X_x *альтернирующей*, если четность чисел i_m и i_{m+1} различна для любого $m = 1, 2, \dots, k-1$, и *стабильной*, если четность всех чисел i_m одинакова, $1 \leqslant m \leqslant k$.

Лемма 1. *Для любого циклического слова X следующие условия эквивалентны:*

(a) $\delta(X) = 0$;

(b) *для любой буквы x подпоследовательность X_x альтернирующая;*

(c) *для любой буквы x и любого подслова $xY\bar{x}$ длина $|Y|$ четна.*

Доказательство. $(a) \to (b)$. Если $\delta(X) = 0$, то $\mu_X(i) = 0$ для любого $i \in \{1, 2, \dots, |X|\}$. Следовательно, для любой буквы x из X_x все числа $i_{m+1} - prev_X(i_{m+1})$ при $m \in [1, k-1]$ нечетны, т. е. X_x — альтернирующая.

$(b) \to (c)$. Учитывая чередование x и $\bar{x}$ в X, из свойства альтернирования заключаем, что в любом подслове $xY\bar{x}$ номера i_x и $i_{\bar{x}}$ вхождений первой и последней буквы имеют различную четность. Так как $|Y| = i_{\bar{x}} - i_x - 1$, то длина $|Y|$ четна.

$(c) \to (a)$. Для произвольного подслова вида $xY_1\bar{x}Y_2xY_3\bar{x}$ по свойству (c) длины $|Y_1\bar{x}Y_2xY_3|, |Y_1|$ и $|Y_3|$ четны. Следовательно, длина $|Y_2|$ четна. Но это означает, что в X между любыми двумя последовательными вхождениями произвольной буквы находится четное число букв, т. е. $i - prev_X(i)$ нечетно для любого $i \in \{1, 2, \dots, |X|\}$ и $\delta(X) = 0$.

Заметим, что в любом подслове вида xYx или $\bar{x}Y\bar{x}$ длина $|Y|$ нечетна.

Легко понять, что условие $\delta(X) = 1$ для циклического слова выполняется тогда и только тогда, когда каждая его подпоследовательность X_x стабильна. Это означает, что между последовательными вхождениями в X любой буквы $x \in A_n$ находится нечетное число букв слова X.

2. Основные результаты

Следующая теорема показывает, что условие $\delta(X) = 0$, а по лемме каждое эквивалентное ему условие, является определяющим для характеризации «в словах» тех простых циклов в кубе I^n, которые целиком содержатся в подграфе $I^n(i,\ i+1)$, образованном двумя соседними слоями.

Теорема 1. *Для того чтобы слово X в алфавите A_n, $n \geqslant 3$, было кодирующим простой цикл в графе $I^n(i,\ i+1)$ при некотором $i \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$, необходимо и достаточно выполнения следующих трех условий:*

(i) в слово X каждая буква входит четное число раз;

(ii) в любом подслове слова X существует буква, входящая в это подслово нечетное число раз;

(iii) $\delta(X) = 0$.

Необходимость. Пусть X — слово, кодирующее простой цикл $V = v_0, v_1, \ldots, v_l$ в графе $I^n(i,\ i+1)$. По утверждению 1 слово X удовлетворяет условию (i). Любое подслово слова X кодирует простую цепь цикла V, и, следовательно, по утверждению 2 для него выполняется условие (ii). Остается показать, что $\delta(X) = 0$.

Пусть $xY\bar{x}$ — подслово слова X и $P = v_p, \ldots, v_q$ — простая цепь цикла V, которую это подслово кодирует. Так как в P вершины веса i и $(i+1)$ чередуются, то $\rho(v_p, v_q)$ четно. Тогда по утверждению 1 длина $|xY\bar{x}|$ четна, а по условию (c) леммы 1 имеем $\delta(X) = 0$.

Достаточность. Пусть $X = x_1 x_2 \ldots x_l$ — слово в алфавите A_n и выполнены условия (i)–(iii). Согласно утверждению 1 слово X кодирует цикл в I^n, который по утверждению 2 является простым. Покажем, что можно так выбрать начальную вершину v_0 и значение $i \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$, что все вершины цикла, который порождается словом X и имеет началом вершину v_0, будут принадлежать графу $I^n(i,\ i+1)$.

Для каждой буквы $x \in A_n$ определим

$$\tau_x = \begin{cases} 0, & \text{если номер первого вхождения } x \text{ в } X \text{ нечетен,} \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Возьмем $v_0 = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ и положим $i = \sum\limits_{j=1}^{n} \tau_j$.

Пусть $V = v_0, v_1, \ldots, v_l$ — простой цикл, порожденный словом X с начальной вершиной v_0. Для v_0 имеем $w(v_0) = i$.

Доказательство проведем от противного.

Пусть v_q — вершина цикла V с наименьшим номером q, для которой $w(v_q) \notin \{i, i+1\}$. Пусть $w(v_q) = i - 1$ (случай $w(v_q) = i + 2$ доказывается аналогично). Тогда $w(v_{q-1}) = w(v_0) = i$ и q нечетно. Возможны два случая.

I. Слово $x_1 x_2 \dots x_{q-1}$ не содержит букву $x = x_q$. Тогда у каждой вершины $v_0, v_1, \dots, v_{q-1}$ координата с номером x равна 0, а у v_q равна 1. Следовательно, $w(v_q) = w(v_{q-1}) + 1 = i + 1$, что противоречит равенству $w(v_q) = i - 1$.

II. Слово $x_1 x_2 \dots x_{q-1}$ содержит букву x. Пусть $prev_X q = p$. Тогда подслово $x_p \dots x_q = xY\bar{x}$ кодирует цепь $v_{p-1}, v_p, \dots, v_q$ и $w(v_p) > w(v_{p-1})$. Поскольку q — наименьший номер вершины, вес которой отличен от i и $i+1$, то $w(v_{p-1}) = i$. Отсюда и из равенства $w(v_{q-1}) = i$ следует, что расстояние $\rho(v_{p-1}, v_{q-1})$ четно. По утверждению 1 длина $|xY|$ четна. По свойству (c) леммы 1 это противоречит условию (iii).

Так как в графе $I^n(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2})$ количество вершин равно $\binom{n+1}{(n+1)/2}$, то из теоремы 1 получаем

Следствие. *При любом нечетном $n \geqslant 3$ граф $I^n(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2})$ является гамильтоновым тогда и только тогда, когда существует слово X длины $\binom{n+1}{(n+1)/2}$, удовлетворяющее условиям теоремы* 1.

Например, слово

$$1\ \bar{2}\ 3\ \bar{4}\ 2\ \bar{3}\ 5\ \bar{1}\ 3\ \bar{5}\ 4\ \bar{2}\ 5\ \bar{4}\ 1\ \bar{3}\ 4\ \bar{1}\ 2\ \bar{5}$$

длины 20 кодирует гамильтонов цикл в $I^5(2,3)$ с началом в вершине (01010).

Теорема 2. *Если слово X в алфавите A_n кодирует гамильтонов цикл в графе $I^n(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2})$, то все буквы входят в слово X одинаковое число раз.*

Доказательство. Пусть слово $X = x_1 x_2 \dots x_l$, где $l = \binom{n+1}{(n+1)/2}$, является кодирующей последовательностью гамильтонова цикла $V = v_0, v_1, \dots, v_l$ в графе $I^n(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2})$, и некоторая буква x из A_n встречается $2k$ раз в X. Пусть $X_x = x^{\sigma}_{i_1}, x^{\bar{\sigma}}_{i_2}, x^{\sigma}_{i_3}, \dots, x^{\bar{\sigma}}_{i_{2k}}$ — альтернирующая подпоследовательность всех вхождений буквы x в X.

Учитывая цикличность слова X, достаточно рассмотреть лишь случай $\sigma = 1$. Легко видеть, что $j \in \{i_1, i_3, \dots, i_{2k-1}\}$ тогда и только тогда, когда x-я координата вершины v_{j-1} равна 0, а x-я координата вершины v_j равна 1. Это означает, что число k равно разности между числом вершин веса $(n+1)/2$, у которых x-я координата равна 1, и числом вершин веса $(n-1)/2$, у которых x-я координата равна 1. Поэтому

$$k = \binom{n-1}{(n-1)/2} - \binom{n-1}{(n-3)/2} = \frac{\binom{n}{(n-1)/2}}{n}.$$

Следовательно,

$$2k = 2\binom{n}{(n-1)/2} \Big/ n = \binom{n+1}{(n+1)/2} \Big/ n.$$

Ввиду произвольности выбора буквы x, из последнего равенства следует, что в слове X каждая буква алфавита A_n встречается ровно $\binom{n+1}{(n+1)/2}/n$ раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Евдокимов А. А.** О максимальной длине цепи в единичном n-мерном кубе // Мат. заметки. 1969. Т. 6, вып. 3. С. 309–319.
2. **Евдокимов А. А.** О нумерации подмножеств конечного множества // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980. Вып. 34. С. 8–26.
3. **Евдокимов А. А.** Метрические свойства вложений и коды, сохраняющие расстояния // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Наука, 1988. С. 116–132. (Тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 10).
4. **Евдокимов А. А.** Вложение цепей и циклов в гиперкуб. I // Методы дискретного анализа в решении экстремальных задач: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. Вып. 50. С. 10–25.
5. **Евдокимов А. А., Крайнев В. А.** Задачи о полноте множества слов // XXII обл. науч.-техн. конф. Новосибирск, 1979. С. 105–107.
6. **Евдокимов А. А., Малюгин С. А.** Код «змея в ящике» и пути в решетке на торе // Математика сегодня. Киев: Выща шк., 1987. С. 108–116.
7. **Липский В.** Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988.
8. **Перeжогин А. Л.** О локально изометрическом кодировании натуральных чисел // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 4. С. 69–76.
9. **Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.** Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980.
10. **Duffus D., Sands B., Woodrow R.** Lexicographic matchings cannot form Hamiltonian cycles // Order. 1988. V. 5, N 2. P. 149–161.
11. **Kierstead H. A., Trotter W. T.** Explicit matchings in the middle levels of the Boolean lattice // Order. 1988. V. 5, N 2. P. 163–171.
12. **Savage C. D., Winkler P.** Monotone Gray codes and the middle levels problem // J. Combin. Theory. Ser. A. 1995. V. 70, N 2. P. 230–248.
13. **Zanten A. J. van.** The ranking problem of a Gray code for compositions // Ars Combinatoria. 1995. V. 11. P. 257–268.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4.
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: evdok@math.nsc.ru,
pereal@math.nsc.ru

Статья поступила
8 сентября 1997 г.