ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1997. Серия 1. Том 4, № 4, 13–46

УДК 519.11+519.21

ОБ АСИМПТОТИКЕ ЧИСЛА БИНАРНЫХ СЛОВ С ЗАДАННОЙ ДЛИНОЙ МАКСИМАЛЬНОЙ СЕРИИ. 1*)

А. Д. Коршунов

Пусть $B_s(n)$ обозначает множество бинарных слов длины n, в которых длины максимальных серий равны s. Основная цель исследования состоит в установлении асимптотических формул для мощности множества $B_s(n)$ при $n \to \infty$ и каждом s, $1 \leqslant s \leqslant n$. Ниже такие формулы получены для всех $s \geqslant \frac{1}{2}\log n + 2\log\log n$ (для больших s такие формулы известны). Остальные случаи будут рассмотрены в следующей статье.

Введение

Пусть $B(n)$ обозначает множество всех бинарных последовательностей (слов) длины n, т. е. слов, состоящих из нулей и единиц. Пусть $\mathbf{a} = a_1a_2\ldots a_n$ — произвольное слово из $B(n)$. Подслово $a_{m+1}a_{m+2}\ldots a_{m+r}$ слова $\mathbf{a}$ называется *серией* в $\mathbf{a}$, если

(a) $a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_{m+r}$;

(b) $a_m = a_{m+r+1} \neq a_{m+1}$ при $m \geqslant 1$ и $m + r < n$;

(c) $a_m \neq a_{m+1}$ при $m \geqslant 1$ и $m + r = n$;

(d) $a_{m+r+1} \neq a_{m+1}$ при $m = 0$ и $m + r < n$.

Число символов в серии называется *длиной* серии. Серия в слове $\mathbf{a}$ называется *максимальной*, если в $\mathbf{a}$ отсутствуют более длинные серии.

Обозначим через $B_s(n)$, $1 \leqslant s \leqslant n$, множество всех тех слов из $B(n)$, в которых длина максимальных серий равна s. Ясно, что

$$B(n) = \bigcup_{s=1}^{n} B_s(n),$$

а $B_{s_1}(n) \cap B_{s_2}(n) = \varnothing$, если $s_1 \neq s_2$.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01800).

При каждом s, $1 \leqslant s \leqslant n$, множество $B_s(n)$ не пусто, поскольку слово $\underbrace{00\ldots0}_{s}1010\ldots$ принадлежит множеству $B_s(n)$. Множества $B_1(n)$ и $B_n(n)$ двухэлементны, а при остальных рассматриваемых s множества $B_s(n)$ состоят из большего числа слов. Точные и асимптотические формулы для мощности множества $B_s(n)$ при $s > \log n$ известны и находятся довольно просто. Основная наша цель состоит в нахождении асимптотических формул для $|B_s(n)|$ при остальных s и $n \to \infty$.

Основной результат настоящей работы состоит в следующем. Если $s \in [\frac{1}{2}\log n + 2\log\log n, \log n - \lambda(n)]$, где $\lambda(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, то $|B_s(n)| \sim 2^n \exp(-n2^{-s-1})$. Остальные s будут рассмотрены в следующей статье.

В зависимости от значений параметра s, как функции от n, мы различаем несколько случаев. Разбиение на случаи связано с тем, что при разных s метод нахождения асимптотических формул для $|B_s(n)|$ используется с некоторыми вариациями, а формулы имеют различный вид.

Рассматриваемая задача имеет непосредственную связь со следующей комбинаторной задачей. Пусть $R(n)$ обозначает множество всех разбиений натурального числа n на упорядоченные натуральные слагаемые при условии, что число слагаемых не фиксировано. Иначе говоря, мощность множества $R(n)$ равна числу таких решений всевозможных уравнений

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_v = n, \tag{1}$$

когда x_i — натуральные числа, $1 \leqslant i \leqslant v$, а $v = 1, 2, \ldots, n$.

Обозначим через $R_s(n)$, $1 \leqslant s \leqslant n$, множество таких решений уравнений (1), что $x_i \leqslant s$ при каждом $i = 1, 2, \ldots, v$ и $x_i = s$ по крайней мере для одного i. Убедимся в том, что при любом s, $1 \leqslant s \leqslant n$, справедливо равенство

$$|B_s(n)| = 2|R_s(n)|, \tag{2}$$

т. е. задачи о нахождении величин $|B_s(n)|$ и $|R_s(n)|$ эквивалентны.

Действительно, пусть $\mathbf{a} = a_1a_2\ldots a_n$ — произвольное слово из $B_s(n)$, в котором содержится v серий. Обозначив через x_i длину i-й серии в слове $\mathbf{a}$, имеем

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_v = n. \tag{3}$$

Это равенство выполняется и для слова, которое получается из $\mathbf{a}$ заменой нулей единицами и единиц нулями. Для любого другого слова из $B(n)$ равенство (3) не выполняется. Отсюда следует справедливость равенства (2).

Пусть $B_s(n, r)$ обозначает множество слов из $B_s(n)$, в которых содержится по r серий максимальной длины. Вторая наша цель заключается

в нахождении асимптотических формул для мощности $B_s(n,r)$ при всех допустимых s и r (они будут установлены в следующей статье).

Рассматриваемая задача допускает несколько естественных обобщений. Первое обобщение заключается в том, что нули и единицы в словах из $B(n)$ появляются с разными вероятностями. В этом случае вместо мощности множества $B_s(n)$ следует рассматривать вероятность появления слов из $B_s(n)$. Второе обобщение состоит в том, что вместо бинарных слов рассматриваются слова в m-значном алфавите, $m \geqslant 3$. Эти постановки будут изучены в дальнейшем.

Обширные исследования в этом направлении были проведены В. Л. Гончаровым [2]. В этой работе изучалась постановка, когда 1 появляется с вероятностью p, а 0 — с вероятностью q $(p+q=1)$. Кроме того, в ней рассматривались только «единичные» серии, т. е. серии, состоящие из одних единиц. Среди многих результатов этой работы имеются асимптотические формулы для математического ожидания длины максимальной серии и для вероятности появления максимальной «единичной» серии длины не более s при условии, что $|s-\log_{1/p} n| \leqslant c$ и $n\to\infty$.

Другие результаты, относящиеся к такой постановке, содержатся в работах [3, 4, 6–8].

Всюду $\log$ обозначает логарифм по основанию 2.

§ 1. Число слов в $B_s(n)$ при $s \geqslant \log n - \log\log n + 2$

Ради полноты приведем простые формулы для мощности множества $B_s(n)$ при $s \geqslant 2\log n$. Сначала рассмотрим случай, когда s удовлетворяет неравенствам $\lceil n/2\rceil < s < n$. При таких s в каждом слове из $B_s(n)$ содержится только одна максимальная серия, т. е. серия длины s. Ясно, что число слов из $B_s(n)$, в которых такая серия является «префиксом», равно $2\cdot 2^{n-s-1} = 2^{n-s}$. Такое же число слов содержится в $B_s(n)$, в которых максимальная серия является «суффиксом». Число слов, в которых максимальная серия расположена «внутри» слова длины n, равно $2(n-s-1)2^{n-s-2}$. Поэтому при любом s, $\lceil n/2\rceil < s < n$, имеем

$$|B_s(n)| = 2^{n-s+1} + (n-s-1)2^{n-s-1} = (n-s+3)2^{n-s-1}. \qquad (4)$$

Теперь рассмотрим случай, когда s удовлетворяет неравенствам

$$2\log n \leqslant s \leqslant \lceil n/2\rceil. \qquad (5)$$

Если в слове из $B_s(n)$ имеется r максимальных серий, то в правой части (4) это слово учитывается r раз. Поэтому

$$|B_s(n)| < (n-s+3)2^{n-s-1} \qquad (6)$$

и

$$|B_s(n)| = (n-s+3)2^{n-s-1} - \sum_{r=2}^{\lceil n/s \rceil}(r-1)|B_s(n,r)|, \tag{7}$$

где $B_s(n,r)$ есть множество слов из $B_s(n)$, в которых содержится по r максимальных серий. В свою очередь, нетрудно видеть, что

$$|B_s(n,r)| < \binom{n}{r}2^{n-sr} < n^r 2^{n-sr}. \tag{8}$$

Пользуясь (7) и (8), при $s \geqslant 2\log n$ получаем

$$|B_s(n)| > (n-s+3)2^{n-s-1} - \sum_{r=2}^{\lfloor n/r \rfloor}(r-1)n^r 2^{n-sr} = (n-s+3)2^{n-s-1}(1+o(1)).$$

Отсюда и из (6) следует, что если s удовлетворяет (5), то при $n \to \infty$

$$|B_s(n)| \sim (n-s+3)2^{n-s-1}. \tag{9}$$

Теорема 1. *При любом* s, $\log n - \log\log n + 2 \leqslant s \leqslant 2\log n$, *и* $n \to \infty$

$$|B_s(n)| \sim 2^n(e^{-n2^{-s-1}} - e^{-n2^{-s}}).$$

Доказательство. Обозначим через $B^*(n,w)$ множество слов из $B(n)$, в каждом из которых отсутствуют серии длины не менее w. Тогда имеем

$$B_s(n) = B^*(n,s+1) \setminus B^*(n,s),$$

т. е.

$$|B_s(n)| = |B^*(n,s+1)| - |B^*(n,s)|. \tag{10}$$

Для нахождения величин $|B^*(n,s+1)|)$ и $|B^*(n,s)|$ воспользуемся принципом включения и исключения. Обозначим через $N(n,r,i_1,\dots,i_v)$ число таких слов $\mathbf{a}$ из $B(n)$, что i_1-я,..., i_v-я буквы в слове $\mathbf{a}$ являются началами серий длины не менее r (вообще говоря, в слове $\mathbf{a}$ могут присутствовать другие серии таких длин). Пусть

$$N(n,r,v) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_v \leqslant n-r+1} N(n,r,i_1,\dots,i_v).$$

Тогда, пользуясь принципом включения и исключения, имеем

$$|B^*(n,s+1)| = 2^n + \sum_{v=1}^{\lfloor n/s \rfloor}(-1)^v N(n,s+1,v)$$

и

$$|B^*(n,s)| = 2^n + \sum_{v=1}^{\lfloor n/s \rfloor}(-1)^v N(n,s,v).$$

Отсюда и из неравенств Бонферрони [5] следует, что

$$|B^*(n,s+1)| < 2^n + \sum_{v=1}^{2\lfloor\log n\rfloor} (-1)^v N(n,s+1,v), \tag{11}$$

$$|B^*(n,s+1)| > 2^n + \sum_{v=1}^{2\lfloor\log n\rfloor+1} (-1)^v N(n,s+1,v), \tag{12}$$

$$|B^*(n,s)| < 2^n + \sum_{v=1}^{2\lfloor\log n\rfloor} (-1)^v N(n,s,v), \tag{13}$$

$$|B^*(n,s)| > 2^n + \sum_{v=1}^{2\lfloor\log n\rfloor+1} (-1)^v N(n,s,v). \tag{14}$$

Пользуясь (10)–(14), получаем

$$|B_s(n)| < \sum_{v=1}^{2\lfloor\log n\rfloor} (-1)^v N(n,s+1,v) - \sum_{v=1}^{2\lfloor\log n\rfloor+1} (-1)^v N(n,s,v), \tag{15}$$

и

$$|B_s(n)| > \sum_{v=1}^{2\lfloor\log n\rfloor+1} (-1)^v N(n,s+1,v) - \sum_{v=1}^{2\lfloor\log n\rfloor} (-1)^v N(n,s,v). \tag{16}$$

Определим величину $N(n,s,v)$. Последовательность $(i_1,i_2,\dots,i_v)$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_v$, назовем *значащей*, если $i_{j+1} - i_j \geqslant s$ при любом j, $1 \leqslant j \leqslant v-1$, и $i_v \leqslant n-s+1$. В противном случае последовательность $(i_1,\dots,i_v)$ назовем *незначащей*.

Ясно, что если последовательность $(i_1,\dots,i_v)$ является незначащей, то $N(n,s,i_1,\dots,i_v) = 0$. Пусть $(i_1,\dots,i_v)$ является значащей последовательностью. Тогда рассматриваемые слова можно получить следующим способом. Сначала среди n позиций произвольно заполняются нулями и единицами те позиции, которые отличны от позиций с номерами $i_1, i_1+1, \dots, i_1+s-1, i_2, i_2+1, \dots, i_2+s-1, \dots, i_v, i_v+1, \dots, i_v+s-1$ (имеется 2^{n-sv} возможностей). Затем перечисленные позиции заполняются так, чтобы i_1-я,..., i_v-я буквы оказались начальными в сериях длины не менее s (такое заполнение единственно). Поэтому при значащей последовательности $(i_1,\dots,i_v)$ имеем

$$N(n,s,i_1,\dots,i_v) = 2^{n-sv}. \tag{17}$$

Далее, число значащих последовательностей $(i_1,\dots,i_s)$ для слов из $B_s(n)$ совпадает с числом произвольных последовательностей

$(j_1, \dots, j_v)$, $j_1 < j_2 < \dots < j_v$, для слов длины $n-(s-1)v$. Действительно, если $(j_1, \dots, j_v)$ — произвольная последовательность номеров позиций в слове длины $n-(s-1)v$, то последовательность $(j_1, j_2+(s-1), j_3+2(s-1), \dots, j_v+(v-1)(s-1))$ является значащей последовательностью номеров позиций в слове длины n. Следовательно, число значащих последовательностей $(i_1, \dots, i_v)$ для слов из $B_s(n)$ равно $\binom{n-(s-1)v}{v}$. Отсюда и из (17) следует, что

$$N(n,s,v) = \binom{n-(s-1)v}{v} 2^{n-sv}. \tag{18}$$

Если s удовлетворяет условию теоремы, то легко видеть, что

$$\binom{n-(s-1)v}{v} = \frac{n^v}{v!}\prod_{i=0}^{v-1}\Bigl(1-\frac{(s-1)v+i}{n}\Bigr) = \frac{n^v}{v!}\Bigl(1-\frac{v(v-1)}{2n}-\frac{(s-1)v^2}{n}+o(1/n)\Bigr). \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует, что

$$N(n,s,v) = \frac{n^v 2^{n-sv}}{v!}\Bigl(1-\frac{v(v-1)}{2n}-\frac{(s-1)v^2}{n}+o(1/n)\Bigr). \tag{20}$$

Пользуясь (15) и (20), получаем

$$|B_s(n)| < 2^n + \sum_{v=1}^{2\lfloor\log n\rfloor}(-1)^v\frac{n^v 2^{n-(s+1)v}}{v!}\Bigl(1-\frac{v(v-1)}{2n}-\frac{sv^2}{n}+o(1/n)\Bigr)$$
$$-\Bigl\{2^n + \sum_{v=1}^{2\lfloor\log n\rfloor+1}(-1)^v\frac{n^v 2^{n-sv}}{v!}\Bigl(1-\frac{v(v-1)}{2n}-\frac{(s-1)v^2}{n}+o(1/n)\Bigr)\Bigr\}. \tag{21}$$

В свою очередь, нетрудно убедиться в том, что при рассматриваемом s и $n\to\infty$ справедливы соотношения:

$$2^n + \sum_{v=1}^{2\lfloor\log n\rfloor}(-1)^v\frac{n^v 2^{n-(s+1)v}}{v!} = 2^n e^{-n2^{-s-1}} - \sum_{v>2\lfloor\log n\rfloor}(-1)^v\frac{n^v 2^{n-(s+1)v}}{v!} = 2^n e^{-n2^{-s-1}}(1+o(n^{-3})), \tag{22}$$

$$2^n + \sum_{v=1}^{2\lfloor\log n\rfloor+1}(-1)^v\frac{n^v 2^{n-sv}}{v!} = 2^n e^{-n2^{-s}}(1+o(n^{-2})), \tag{23}$$

$$\sum_{v=1}^{2\lfloor\log n\rfloor}(-1)^{v+1}\frac{n^v 2^{n-(s+1)v}v(v-1)}{v!\,2n}$$
$$= n2^{-2(s+1)-1}\sum_{v=0}^{2\lfloor\log n\rfloor-2}(-1)^{v+1}\frac{n^v 2^{n-(s+1)v}}{v!} \leqslant 2^n e^{-n2^{-s-1}} O\Big(\frac{\log^2 n}{n}\Big), \quad (24)$$

$$\sum_{v=1}^{2\lfloor\log n\rfloor}(-1)^{v+1}\frac{sn^v 2^{n-(s+1)v}v^2}{v!\,n} = \frac{sn}{2^{2(s+1)}}\sum_{v=0}^{2\lfloor\log n\rfloor-2}(-1)^{v+1}\frac{n^v 2^{n-(s+1)v}}{v!}$$
$$+\frac{s}{2^{s+1}}\sum_{v=0}^{2\lfloor\log n\rfloor-1}(-1)^{v+1}\frac{n^v 2^{n-(s+1)v}}{v!} \leqslant 2^n e^{-n2^{-s-1}} O\Big(\frac{\ln^3 n}{n}\Big), \quad (25)$$

$$\sum_{v=1}^{2\lfloor\log n\rfloor+1}(-1)^{v+1}\frac{n^v 2^{n-sv}v(v-1)}{v!\,2n} = 2^n e^{-n2^{-s}} O\Big(\frac{\ln^2 n}{n}\Big), \quad (26)$$

$$\sum_{v=1}^{2\lfloor\log n\rfloor+1}(-1)^{v+1}\frac{n^v 2^{n-sv}(s-1)v^2}{v!\,n} = 2^n e^{-n2^{-s}} O\Big(\frac{\ln^3 n}{n}\Big). \quad (27)$$

Подставляя (22)–(27) в (21), получаем

$$|B_s(n)| \leqslant 2^n(e^{-n2^{-s-1}} - e^{n2^{-s}})(1+o(1)).$$

Аналогично убеждаемся в том, что

$$|B_s(n) \geqslant 2^n(e^{-n2^{-s-1}} - e^{-n2^{-s}})(1-o(1)).$$

Из последних двух соотношений следует утверждение теоремы 1.

§ 2. Специальное задание слов из $B_s(n)$

Обозначим через $B_s(n, w_1, \dots, w_s)$ множество слов из $B_s(n)$, в каждом из которых содержится w_i серий длины i, $1 \leqslant i \leqslant s$. Тогда имеем

$$|B_s(n)| = \sum |B_s(n, w_1, \dots, w_s)|,$$

где суммирование осуществляется по всем наборам $(w_1, \dots, w_s)$ таким, что $\sum_{i=1}^{s} iw_i = n$ и $w_s \geqslant 1$.

Каждому слову из $B_s(n, w_1, \dots, w_s)$ поставим в соответствие схему, состоящую из n единиц и имеющую следующую структуру. В этой схеме имеется s строк и $r_1 = \sum_{i=1}^{s} w_i$ столбцов. Если в слове **a** длина v-й серии

равна l, то в v-м столбце схемы содержится l единиц, расположенных в l последовательных строках, начиная с нижней строки. Например, если $\mathbf{a} = 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1$, то схема имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & & & \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

В этом примере $n = 10$, $s = 3$ и $r_1 = 5$.

Множество схем, поставленных в соответствие словам из $B_s(n, w_1, \ldots, w_s)$, обозначим через $T_s(n, w_1, \ldots, w_s)$. Пусть

$$T_s(n) = \cup T_s(n, w_1, \ldots, w_s),$$

где объединение берется по всем наборам $(w_1, \ldots, w_s)$ таким, что $\sum\limits_{i=1}^{s} i w_i = n$ и $w_s \geqslant 1$.

Ясно, что число единиц в i-й строке любой схемы из $T_s(n, w_1, \ldots, w_s)$ равно $r_i = \sum\limits_{j=i}^{s} w_j$, $1 \leqslant i \leqslant s$, а

$$|B_s(n, w_1, \ldots, w_s)| = 2|T_s(n, w_1, \ldots, w_s)|,$$

поскольку каждая схема сопоставляется с двумя словами. Поэтому $|B_s(n)| = 2|T_s(n)|$ и для определения величины $|B_s(n)|$ достаточно найти число схем из $T_s(n)$. При нахождении величины $|T_s(n)|$ мы будем пользоваться следующим фактом.

Лемма 1. *При любых $w_1, \ldots, w_s$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^{s} i w_i = n$ и $w_s \geqslant 1$, справедливо равенство*

$$|T_s(n, w_1, \ldots, w_s)| = \prod_{i=1}^{s-1} \binom{r_i}{r_{i+1}},$$

где $r_i = \sum\limits_{j=i}^{s} w_j$, $1 \leqslant i \leqslant s$.

Доказательство. Рассмотрим схему S из $T_s(n, w_1, \ldots, w_s)$, в которой первые w_1 столбцов имеют высоту 1, следующие w_2 столбцов — высоту 2 и так далее и, наконец, последние w_s столбцов имеют высоту s. Ясно, что все схемы множества $T_s(n, w_1, \ldots, w_s)$ получаются из S путем «перетасовывания» ее столбцов. Нетрудно видеть, что все «перетасовки» столбцов, приводящие к различным схемам из $T_s(n, w_1, \ldots, w_s)$, можно получить следующим способом. Сначала берется строка, состоящая из r_1 единиц. Затем r_2 единиц произвольно размещаются во второй

строке так, чтобы они оказались над единицами первой строки (имеется $\binom{r_1}{r_2}$ возможностей). После этого r_3 единиц размещаются в третьей (снизу) строке так, чтобы они оказались над единицами второй строки (имеется $\binom{r_2}{r_3}$ возможностей). Вообще, если первые i строк уже заданы, $1 \leqslant i < s$, то r_{i+1} единиц размещаются в $(i+1)$-й строке (снизу) так, чтобы они оказались над единицами i-й строки (имеется $\binom{r_i}{r_{i+1}}$ возможностей). Перемножая полученные биномиальные коэффициенты, убеждаемся в справедливости леммы 1.

Асимптотические формулы для величины $|T_s(n)|$ найдем следующим способом. Сначала рассматривается специальное множество $T_s(n, w_1, \dots, w_s)$ при подходяще выбранных параметрах $w_1, \dots, w_s$ и с использованием леммы 1 находится асимптотическая формула для его мощности. Затем мощности остальных множеств $T_s(n, w_1, \dots, w_s)$ выражаются через мощность специального множества $T_s(n,\ w_1, \dots, w_s)$ и с использованием вероятностных и комбинаторных фактов находится асимптотическая формула для мощности множества $T_s(n)$. В зависимости от величины s рассматривается несколько случаев и в каждом случае специальное множество определяется по-своему.

Ниже мы ограничиваемся рассмотрением s, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{1}{2}\log n + 2\log\log n \leqslant s < \log n - \log\log n + 2,$$

и в зависимости от вида n различаем следующие случаи.

Случай 1. Число n представимо в виде $n = v\sum_{i=1}^{s}(2^i - 1)$, где v — натуральное число.

Случай 2. Число n представимо в виде $n = v\sum_{i=1}^{s}(2^i - 1) + t$, где $0 < t < \sum_{i=1}^{s}(2^i - 1)$.

Формулировка результатов (теоремы 2 и 3) в обоих случаях одинакова. Основная идея содержится в доказательстве теоремы 2. Разбиение на случаи связано с тем, что при доказательстве теоремы 3 приходится преодолевать дополнительные трудности.

§ 3. Вспомогательные утверждения

В настоящем параграфе устанавливается несколько вспомогательных утверждений, которые будут использованы при доказательстве теорем 2 и 3.

Пусть квадратная матрица A порядка $s-1$ имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 11a & -a & 3a & \vdots & 3a & 3a \\ -a & (3\cdot 2^2+1)a & (1-2^3)a & \vdots & a & a \\ 3a & (1-2^3)a & (3\cdot 2^3+1)a & \vdots & a & a \\ 3a & a & (1-2^4)a & \vdots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3a & a & a & \vdots & (1-2^{s-2})a & a \\ 3a & a & a & \vdots & (3\cdot 2^{s-2}+1)a & (1-2^{s-1})a \\ 3a & a & a & \vdots & (1-2^{s-1})a & (3\cdot 2^{s-1}+1)a \end{pmatrix},$$

где $a = 1/(2^s v)$.

Лемма 2. *При $s \to \infty$ справедливо соотношение*

$$|A| \sim \frac{2^2 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{s-2} 2^{s+2}}{(2^s v)^{s-1}}.$$

Доказательство. Сначала все элементы первой строки матрицы A разделим на $3a$, а остальные элементы разделим на a. В полученной матрице вычтем первую строку из остальных строк. В результате получим матрицу

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{14}{3} & 3\cdot 2^2+\frac{4}{3} & -2^3 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -2^3+\frac{4}{3} & 3\cdot 2^3 & -2^4 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -2^4 & 3\cdot 2^4 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & \vdots & 3\cdot 2^{s-3} & -2^{s-2} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & \vdots & -2^{s-2} & 3\cdot 2^{s-2} & -2^{s-1} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & \vdots & 0 & -2^{s-1} & 3\cdot 2^{s-1} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что

$$|A| = 3a^{s-1}|A_1| = \frac{3}{(2^s v)^{s-1}}|A_1|.$$

Затем все элементы первого столбца в A_1 умножим на 2, в образовавшейся матрице ко второму столбцу прибавим первый столбец и в новой матрице все элементы первого столбца умножим на 3. В результате

получим матрицу

$$A_2 = \begin{pmatrix} 22 & 7 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 1 \\ -28 & 2^2 & -2^3 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2^3 & 3\cdot 2^3 & -2^4 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2^4 & 3\cdot 2^4 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -4 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 3\cdot 2^{s-3} & -2^{s-2} & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -2^{s-2} & 3\cdot 2^{s-2} & -2^{s-1} \\ -4 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -2^{s-1} & 3\cdot 2^{s-1} \end{pmatrix}.$$

Так как $|A_1| = \frac{1}{6}|A_2|$, то

$$|A| = \frac{1}{2(2^s v)^{s-1}}|A_2|.$$

Наконец, все элементы i-й строки, $2 \leqslant i \leqslant s-1$, разделим на 2^i, а в полученной матрице все элементы первого столбца умножим на 2^{s-3}. В результате получим матрицу

$$A_3 = \begin{pmatrix} 11\cdot 2^{s-2} & 7 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 1 \\ -7\cdot 2^{s-3} & 1 & -2 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -2^{s-4} & -1 & 3 & -2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -2^{s-5} & 0 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2^2 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что

$$|A_2| = 2^2\cdot 2^3\cdot\ldots\cdot 2^{s-1}\cdot 2^{-(s-3)}|A_3|.$$

Поэтому

$$|A| = \frac{2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\ldots\cdot 2^{s-2}}{(2^s v)^{s-1}}|A_3|. \tag{28}$$

Перейдем к вычислению определителя $|A_3|$. Предварительно рассмотрим квадратную матрицу $B_k = (b_{ij})$ порядка k, в которой $b_{11} = b_{22} = \ldots = b_{kk} = 3$, $b_{12} = b_{23} = \ldots = b_{k-1,k} = -2$, $b_{21} = b_{32} = \ldots = b_{k,k-1} = -1$, а остальные элементы равны нулю. Индукцией по k убеждаемся в том, что

$$|B_k| = 2^{k+1} - 1. \tag{29}$$

В самом деле, при $k = 2$ имеем

$$|B_2| = \left|\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right| = 7 = 2^3 - 1.$$

Предположим, что (29) верно при любом $k = 2, \dots, m-1$. Тогда, разлагая матрицу B_m порядка m по первой строке, получаем

$$|B_m| = 3|B_{m-1}| + 2\cdot(-1)\cdot|B_{m-2}| = 3(2^{m-1}-1) + 2(-1)(2^{m-2}-1) = 2^{m+1}-1.$$

Следовательно, равенство (29) справедливо при любом k.

Наряду с матрицей B_k, $1 \leqslant k \leqslant s-2$, нам потребуется квадратная матрица

$$B_k^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

порядка k, которая отличается от матрицы B_k только первыми двумя строками. Разлагая матрицу B_k^* по первой строке, получаем

$$|B_k^*| = |B_{k-1}| - 2|B_{k-2}| = 1. \tag{30}$$

Обозначим через C_{s-2}^i квадратную матрицу порядка $s-2$, получаемую из матрицы A_3 после удаления первого столбца и i-й строки, $1 \leqslant i \leqslant s-1$. Ясно, что

$$|A_3| = 11 \cdot 2^{s-2}|C_{s-2}^1| + 7 \cdot 2^{s-3}|C_{s-2}^2| + \sum_{i=3}^{s-1}(-1)^i 2^{s-1-i}|C_{s-2}^i|. \tag{31}$$

Так как $C_{s-2}^1 = B_{s-2}^*$, то согласно (30) имеем $|C_{s-2}^1| = 1$. Следовательно,

$$11 \cdot 2^{s-2}|C_{s-2}^1| = 11 \cdot 2^{s-2}. \tag{32}$$

Обозначим через C_{s-3}^{ij} квадратную матрицу порядка $s-3$, получаемую из матрицы C_{s-2}^i после удаления первой строки и j-го столбца, $1 \leqslant j \leqslant s-2$. Тогда при любом i, $2 \leqslant i \leqslant s-1$, имеем

$$|C_{s-2}^i| = 7|C_{s-3}^{i1}| + \sum_{j=2}^{s-2}(-1)^{j+1}|C_{s-3}^{ij}|. \tag{33}$$

Легко видеть, что при любом i, $2 \leqslant i \leqslant s-1$,

$$|C^{i1}_{s-3}| = (-1)^i 2^{i-2} |B_{s-1-i}| = (\text{см. } (29)) = (-1)^i (2^{s-2} - 2^{i-2}). \tag{34}$$

Если $j \in [2,\ i-3]$ и $i \geqslant 5$, то, разложив матрицу $|C^{ij}_{s-3}|$ по j-й строке, имеем

$$|C^{ij}_{s-3}| = (-1)^{i-j-1} |B^*_{j-1}| 2^{i-j-1} |B_{s-1-i}|$$
$$= (\text{см. } (29) \text{ и } (30)) = (-2)^{i-j-1}(2^{s-i} - 1). \tag{35}$$

Если $j = i-2$ и $i \geqslant 4$, то, разложив матрицу $C^{i,i-2}_{s-3}$ по $(i-2)$-й строке, получаем

$$|C^{i,i-2}_{s-3}| = -2|B^*_{i-3}| \cdot |B_{s-1-i}| = -2(2^{s-i} - 1). \tag{36}$$

Если $j = i-1$, то

$$|C^{i,i-1}_{s-3}| = \begin{pmatrix} B^*_{i-2} & 0 \\ 0 & B_{s-1-i} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$|C^{i,i-1}_{s-3}| = |B^*_{i-2}| \cdot |B_{s-1-i}| = 2^{s-i} - 1. \tag{37}$$

Если $j = i$, то, разлагая матрицу $C^{i,i-1}_{s-3}$ по $(i-1)$-й строке, имеем

$$|C^{ii}_{s-3}| = -|B^*_{i-2}| \cdot |B_{s-2-i}| = -2^{s-1-i} + 1. \tag{38}$$

Наконец, если $j \in [i+1, s-2]$, то, разложив матрицу C^{ij}_{s-3} по $(j-1)$-й строке, получаем

$$|C^{ij}_{s-3}| = (-1)^{j-i-1} |B^*_{i-2}| \cdot |B_{s-2-j}| = (-1)^{j+i-1}(2^{s-1-j} - 1). \tag{39}$$

Подставив (37)–(39) в (33) при $i = 2$, получаем

$$|C^2_{s-2}| = 7|C^{21}_{s-3}| + \sum_{j=2}^{s-2} (-1)^{j+1} |C^{2j}_{s-3}|$$
$$= 7(2^{s-2} - 1) + \sum_{j=2}^{s-2} (2^{s-1-j} - 1) = 2^{s+1} - s - 6. \tag{40}$$

Далее из (33)–(39) следует, что

$$|C^3_{s-2}| = 7|C^{31}_{s-3}| - |C^{32}_{s-3}| + |C^{33}_{s-3}| + \sum_{j=4}^{s-2} (-1)^{j+1} |C^{3j}_{s-3}|$$
$$= -7(2^{s-2} - 2) - \sum_{j=2}^{s-2} (2^{s-1-j} - 1) = -2^{s+1} + s + 13, \tag{41}$$

$$
\begin{aligned}
|C^4_{s-2}| &= 7|C^{41}_{s-3}| + \sum_{j=2}^{s-2}(-1)^{j+1}|C^{4j}_{s-3}| \\
&= 7(2^{s-2}-4) + 2(2^{s-4}-1) + \sum_{j=3}^{s-2}(2^{s-1-j}-1) \\
&= 7(2^{s-2}-4) + (2^{s-2}-2) - s + 2 = 2^{s+1} - s - 28, \qquad (42)
\end{aligned}
$$

а при каждом i, $5 \leqslant i \leqslant s-1$,

$$
\begin{aligned}
|C^i_{s-2}| &= 7|C^{i1}_{s-3}| + \sum_{j=2}^{i-3}(-1)^{j+1}|C^{ij}_{s-3}| + (-1)^{i-1}|C^{i,i-2}_{s-3}| \\
&+ (-1)^i|C^{i,i-1}_{s-3}| + (-1)^{i+1}|C^{ii}_{s-3}| + \sum_{j=i+1}^{s-2}(-1)^{j+1}|C^{ij}_{s-3}| \\
&= (-1)^i\Bigg\{7(2^{s-2}-2^{i-2}) + \sum_{j=2}^{i-3}2^{i-j-1}(2^{s-i}-1) + 2(2^{s-i}-1) \\
&+ \sum_{j=i-1}^{s-2}(2^{s-1-j}-1)\Bigg\} = (-1)^i(2^{s+1}-2^{i+1}-s+i). \qquad (43)
\end{aligned}
$$

Подставляя (32) и (40)–(43) в (31), получаем

$$
\begin{aligned}
|A_3| &= 11\cdot 2^{s-2} + 7\cdot 2^{s-3}(2^{s+1}-s-6) + 2^{s-4}(2^{s+1}-s-13) \\
&+ 2^{s-5}(2^{s+1}-s-28) + \sum_{i=5}^{s-1}2^{s-1-i}(2^{s+1}-2^{i+1}-s+i) \sim 2^{2s+1}. \qquad (44)
\end{aligned}
$$

Из (28) и (44) следует, что

$$
|A| \sim \frac{2\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot 2^{s-2}2^{2s+1}}{(2^s v)^{s-1}}. \qquad (45)
$$

Лемма 2 доказана.

Приведем предварительные грубые оценки для числа единиц, содержащихся в каждой строке «нетипичных» схем из $T_s(n)$.

Обозначим через $T^*_s(n,1,x)$ множество схем S из $T_s(n)$ таких, что в первой строке схемы S (начиная снизу) содержится либо не более $n/2-x$, либо не менее $n/2+x$ единиц, а через $T^*_s(n,i,x)$, $2 \leqslant i \leqslant s$, множество схем S из $T_s(n)$ таких, что в i-й строке схемы S имеется не менее x единиц.

Лемма 3. *При любом* $s \geqslant \frac{1}{2}\log n$ *и* $n \to \infty$

$$
|T^*_s(n,1,n^{3/4})| = o\Big(\frac{2^n}{n}\exp(-n2^{-s-1})\Big).
$$

Доказательство. Число схем в $T_s(n)$, у которых в первой строке содержится d единиц, равно $\binom{n-1}{d} < \binom{n}{d}$. Поэтому

$$|T_s^*(n,1,n^{3/4})| \leqslant 2 \sum_{d \geqslant n/2+n^{3/4}} \binom{n}{d} = 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{i \geqslant n^{3/4}} \prod_{j=1}^{i} \frac{\lfloor n/2 \rfloor + 1 - j}{\lfloor n/2 \rfloor + j}$$
$$< 2^n \sum_{i \geqslant n^{3/4}} \prod_{j=1}^{i} \frac{1-2j/n}{1+2j/n} < 2^n \exp(-1,5\sqrt{n})$$
$$= \Big(\text{ибо } s \geqslant \frac{1}{2}\log n\Big) = o\Big(\frac{2^n}{n}\exp(-n2^{-s-1})\Big).$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $s \in [\frac{1}{2}\log n, \log n - \log\log n + 2]$ *и* $n \to \infty$. *Тогда при любом* i, $2 \leqslant i \leqslant s-2$ *и* $i \leqslant \log n - \log\log n - 1$, *справедливо соотношение*

$$|T_s^*(n,i,4n2^{-i})| = o\Big(\frac{2^n}{n}\exp(-n2^{-s-1})\Big).$$

Доказательство. Все схемы S из $T_s^*(n,i,x)$ (и некоторые другие) такие, что в i-й строке схемы S имеется не менее x единиц, можно получить следующим способом.

1. При заданном d, $\frac{n}{2} - n^{3/4} \leqslant d \leqslant \frac{n}{2} - n^{3/4}$, в первой строке (снизу) размещается d единиц. Такое ограничение на d допустимо согласно лемме 3.

2. Среди d единиц первой строки выделяется x произвольных единиц. Имеется $\binom{d}{x}$ возможностей.

3. Над каждой выделенной единицей образуется столбец из единиц высоты i (однозначно).

4. Остальные $n-d-x(i-1)$ единиц произвольным образом добавляются к имеющейся схеме так, чтобы не изменилось число единиц в первой строке. Число таких добавлений равно числу разбиений числа $n-d-x(i-1)$ на d упорядоченных целых неотрицательных слагаемых (нулевые слагаемые допускаются), т. е. величине

$$\binom{n-1-x(i-1)}{d-1} < 2^{n-1-x(i-1)}.$$

Из 1–4 следует, что

$$|T_s^*(n,i,x)| < \sum_d \binom{d}{x} 2^{n-1-x(i-1)} < \sum_d \Big\{\Big(\frac{ed}{x}\Big)^x 2^{n-1-x(i-1)}\Big\}$$
$$< 2^n \cdot n\Big(\frac{en(1+o(1))}{2x}\Big)^x 2^{-x(i-1)} = 2^n n\Big(\frac{en(1+o(1))}{x2^i}\Big)^x.$$

Поэтому при любом i, удовлетворяющем условию леммы, имеем

$$
\begin{aligned}
|T_s^*(n,i,4n2^{-i})|\exp(n2^{-s-1}) &< 2^n n\Big(\frac{e(1+o(1))}{4}\Big)^{4n2^{-i}}\exp(n2^{-s-1})\\
&< 2^n n\Big(\frac{e(1+o(1))}{4}\Big)^{4n2^{-s+2}}\exp(n2^{-s-1})\\
&= 2^n n\left(\Big(\frac{e(1+o(1))}{4}\Big)^{32}e\right)^{n2^{-s-1}} = o(2^n/n).
\end{aligned}
$$

Лемма 4 доказана.

§ 4. Число слов в $B_s(n)$ при $\frac{1}{2}\log n + 2\log\log n \leqslant s < \log n - \log\log n + 2$. Случай 1

В этом случае в качестве специального множества (обозначаемого через $T_s^0(n)$) берется такое множество $T_s(n, w_1, \dots, w_s)$, что $w_i = 2^{s-i}v$ при $1 \leqslant i \leqslant s$, т. е. в i-й строке схемы (начиная сверху) содержится $(2^i - 1)v$ единиц.

Лемма 5. *Пусть* $n = v\sum_{i=1}^{s}(2^i - 1)$, *где* v — *натуральное число и* $s \in [\frac{1}{2}\log n + 2\log\log n, \log n - \log\log n + 2]$. *Тогда*

$$
|T_s^0(n)| \sim \frac{2^n}{(2\pi v)^{(s-1)/2}(2^2 2^3 \dots 2^{s-2})^{1/2}}\exp(-n2^{-s-1}).
$$

Доказательство. Согласно лемме 1 имеем

$$
|T_s^0(n)| = \prod_{i=1}^{s-1}\binom{(2^{s+1-i}-1)v}{(2^{s-i}-1)v} = [(2^s-1)v]!\Big/\prod_{i=0}^{s-1}(2^i v)!.
$$

Пользуясь формулой Стирлинга [5]

$$
k! = \sqrt{2\pi k}(k/e)^k e^{\frac{1}{12k}(1+o(1))} \tag{46}
$$

и проведя тождественные преобразования, получаем

$$
\begin{aligned}
|T_s^0(n)| &\sim \frac{\sqrt{2\pi(2^s-1)v}[(2^s-1)v]^{(2^s-1)v}}{(2\pi v)^{s/2}(2\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot 2^{s-2}2^{s-1})^{1/2}v^{v(2^s-1)}2^{((s-2)2^s+2)v}}\\
&\sim \frac{2^{s(2^s-1)v}}{(2\pi v)^{(s-1)/2}e^v(2^2 2^3\dots 2^{s-2})^{1/2}2^{((s-2)2^s+2)v}}\\
&= \frac{2^{(2^{s+1}-s-2)v}}{(2\pi v)^{(s-1)/2}e^v(2\cdot 2^2\cdot\ldots 2^{s-2})^{1/2}}\\
&= \frac{2^n}{(2\pi v)^{(s-1)/2}e^v(2^2 2^3\dots 2^{s-2})^{1/2}}.
\end{aligned}
$$

Так как $n = v\sum_{i=1}^{s}(2^i - 1)$, то $v = n/(2^{s+1} - s - 2)$. Следовательно, $e^{-v} \sim \exp(-n2^{-s-1})$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть* $n = v\sum_{i=1}^{s}(2^i - 1)$, *где* v *— натуральное число,* $s \in [\frac{1}{2}\log n + 2\log\log n, \log n - \log\log n + 2]$, *а параметры* $w_1, \ldots, w_s$ *таковы, что* $|r_1 - (2^s - 1)v| \leqslant 3(2^s v)^{1/2}\ln(2^s v)$, $|r_i - r_{i+1} - 2^{s-i}v| \leqslant (2^{s-i}v)^{1/2}\ln(2^{s-i}v)$ *при* $1 \leqslant i \leqslant s-1$ *и* $|r_s - v| \leqslant v^{1/2}\ln v$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$|T_s(n, w_1, \ldots, w_s)| = |T_s^0(n)|\exp\left(\frac{x_1^2}{2^{s+1}v} - \frac{x_s^2}{2v} - \sum_{i=1}^{s-1}\frac{(x_i - x_{i+1})^2}{v2^{s-i+1}}\right).$$

Доказательство. Согласно лемме 1 имеем

$$|T_s(n, w_1, \ldots, w_s)| = \prod_{i=1}^{s-1}\binom{r_i}{r_{i+1}}, \tag{47}$$

где $r_i = \sum_{j=i}^{s} w_j$, $1 \leqslant i \leqslant s$. Каждое r_i представим в виде

$$r_i = (2^{s+1-i} - 1)v + x_i$$

(заметим, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_s = 0$). Тогда из (47) следует, что

$$|T_s(n, w_1, \ldots, w_s)| = \prod_{i=1}^{s-1}\binom{(2^{s+1-i} - 1)v + x_i}{(2^{s-i} - 1)v + x_{i+1}}$$
$$= [(2^s - 1)v + x_1]!\Big/\left\{(v + x_s)!\prod_{i=1}^{s-1}(2^{s-i}v + x_i - x_{i+1})!\right\}.$$

Известно, что если $|x| \leqslant 3\sqrt{n}\ln n$, то при $n \to \infty$

$$(n + x)! = n!n^x\exp\left(\frac{x^2}{2n} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\right). \tag{48}$$

Поэтому

$$[(2^s - 1)v + x_1]! = [(2^s - 1)v]!((2^s - 1)v)^{x_1}\exp\left(\frac{x_1^2}{2(2^s - 1)v} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{2^s v}}\Big)\right),$$
$$(v + x_s)! = v!v^{x_s}\exp\left(\frac{x_s^2}{2v} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{v}}\Big)\right)$$

и при любом i, $1 \leqslant i \leqslant s-1$,

$$(2^{s-i}v + x_i - x_{i+1})!$$
$$= (2^{s-i}v)!(2^{s-i}v)^{x_i - x_{i+1}}\exp\left(\frac{(x_i - x_{i+1})^2}{2^{s+1-i}v} + o(1/(2^{s-i}v)^{1/2})\right).$$

Следовательно,

$$|T_s(n,w_1,\dots,w_s)| = |T_s^0(n)|\frac{((2^s-1)v)^{x_1}}{v^{x_s}\prod\limits_{i=1}^{s-1}(2^{s-i}v)^{x_i-x_{i+1}}}$$

$$\times\exp\left(\frac{x_1^2}{2(2^s-1)v}-\frac{x_s^2}{2v}-\sum_{i=1}^{s-1}\frac{(x_i-x_{i+1})^2}{2^{s+1-i}v}+\sum_{i=1}^{s-1}o(1/(v2^{s-i})^{1/2})\right)$$

$$= |T_s^0(n)|\frac{(2^s-1)^{x_1}}{\prod\limits_{i=1}^{s-1}2^{(s-i)(x_1-x_{i+1})}}\exp\left(\frac{x_1^2}{2(2^s-1)v}-\frac{x_s^2}{2v}-\sum_{i=1}^{s-1}\frac{(x_i-x_{i+1})^2}{2^{s+1-i}v}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{s-1}o(1/(v2^{s-i})^{1/2})\right). \tag{49}$$

В свою очередь,

$$\prod_{i=1}^{s-1}2^{(s-i)(x_i-x_{i+1})} = 2^{(s-1)x_1-x_2-\dots-x_s} = (\text{ибо } -x_1-x_2-\dots-x_s=0) = 2^{sx_1}, \tag{50}$$

а при s, удовлетворяющем условию доказываемой леммы,

$$(2^s-1)^{x_1}\sim 2^{sx_1}. \tag{51}$$

Подставляя (50) и (51) в (49), получаем

$$|T_s(n,w_1,\dots,w_s)|\sim|T_0(n)|\exp\left(\frac{x_1^2}{2(2^s-1)v}-\frac{x_s^2}{2v}\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{s-1}\frac{(x_i-x_{i+1})^2}{2^{s+1-i}v}+\sum_{i=1}^{s-1}o(1/(v2^{s-i})^{1/2})\right)$$

$$\sim|T_s^0(n)|\exp\left(\frac{x_1^2}{2^{s+1}v}-\frac{x_s^2}{2v}-\sum_{i=1}^{s-1}\frac{(x_i-x_{i+1})^2}{2^{s+1-i}v}\right).$$

Лемма 6 доказана.

Теорема 2. *Пусть* $n = v\sum\limits_{i=1}^{s}(2^i-1)$, *где* v — *натуральное число и* $s\in\left[\frac{1}{2}\log n+2\log\log n,\ \log n-\log\log n+2\right]$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$|B_s(n)|\sim 2^n\exp(-n2^{-s-1}).$$

Доказательство. Пусть

$$T_s^*(n)=\cup T_s(n,\ w_1,\dots,w_s),$$

где объединение берется по таким $w_1, \dots, w_s$, что

$$|r_1 - v(2^s - 1)| \leqslant 3(2^s v)^{1/2} \ln(2^s v),$$
$$|r_i - r_{i+1} - 2^{s-i} v| \leqslant (2^{s-i} v)^{1/2} \ln(2^{s-i} v), \ 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Ясно, что

$$(2^{s-i} v)^{1/2} \ln(2^{s-i} v) < (2^{s-i+1} - 1)v - (2^{s-i} - 1)v = 2^{s-i} v$$

при любом i, $2 \leqslant i \leqslant s$, и любом достаточно большом n. Отсюда и из леммы 6 следует, что

$$|T_s^*(n)| \sim |T_s^0(n)| g(n,s), \tag{52}$$

где

$$\begin{aligned} g(n,s) &= \sum{}' \exp\left\{ \frac{x_1^2}{2^{s+1} v} - \frac{x_s^2}{2v} - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{(x_i - x_{i+1})^2}{2^{s+1-i} v} \right\} \\ &= \sum{}' \exp\left\{ - \frac{1}{2^{s+1} v} \left(- x_1^2 + 2^s x_s^2 + \sum_{i=1}^{s-1} 2^i (x_i - x_{i+1})^2 \right) \right\}, \end{aligned} \tag{53}$$

а $\sum'$ берется по целым $x_1, \dots, x_s$ таким, что $x_1 + \dots + x_s = 0$, $|x_1| \leqslant 3(2^s v)^{1/2} \ln(2^s v)$ и $|x_i - x_{i+1}| \leqslant (2^{s-i} v)^{1/2} \ln(2^{s-i} v)$, $1 \leqslant i \leqslant s$.

Сначала убедимся в том, что квадратичная форма

$$f(x_1, \dots, x_s) = -x_1^2 + 2^s x_s^2 + \sum_{i=1}^{s-1} 2^i (x_i - x_{i+1})^2 \tag{54}$$

является положительно определенной. Положим

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & - & x_2 & = & y_1 \\ x_2 & - & x_3 & = & y_2 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ x_{s-1} & - & x_s & = & y_{s-1} \\ x_s & & & = & y_s. \end{array}$$

Тогда имеем $y_1 + \dots + y_s = x_1$. Поэтому положительная определенность квадратичной формы (54) следует из неравенства

$$f'(y_1, \dots, y_s) = -(y_1 + \dots + y_s)^2 + \sum_{i=1}^{s} 2^i y_i^2 > 0, \tag{55}$$

верного при любых $y_1, \dots, y_s$ таких, что $|y_1| + \dots + |y_s| > 0$.

Так как

$$(y_1 + \dots + y_s)^2 \leqslant (|y_1| + \dots + |y_s|)^2,$$

то справедливость неравенства (55) достаточно установить только для неотрицательных $y_1, \ldots, y_s$, сумма которых отлична от нуля. С помощью частных производных нетрудно убедиться в том, что если эта сумма фиксирована, то $\sum\limits_{i=1}^{s} 2^i y_i^2$ принимает минимальное значение, когда $y_{i+1} = y_i/2$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant s-1$. В этом случае имеем

$$- (y_1 + y_1/2 + \ldots + y_1/2^{s-1})^2 + \sum_{i=1}^{s} 2^i (y_1/2^{i-1})^2$$

$$= -(2y_1 - y_1/2^{s-1})^2 + 2y_1^2 \sum_{i=0}^{s-1} 2^{-i} = -4y_1^2(1-2^{-s+1})^2 + 2y_1^2(2-2^{-s+1}) > 0.$$

Следовательно, неравенство (55) выполняется при любых $y_1, \ldots, y_s$ таких, что $|y_1| + \ldots + |y_s| > 0$.

После тождественных преобразований в (54) получаем

$$f(x_1, \ldots, x_s) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 3\sum_{i=2}^{s} 2^{i-1}x_i^2 - \sum_{i=2}^{s-1} 2^{i+1}x_ix_{i+1}.$$

Заменим x_1 на $-x_2 - \ldots - x_s$, ибо $x_1 + \ldots + x_s = 0$. В результате получим функцию

$$\begin{aligned} &f^1(x_2, \ldots, x_s) \\ &= (x_2 + \ldots + x_s)^2 + 4x_2(x_2 + \ldots + x_s) + 3\sum_{i=2}^{s} 2^{i-1}x_i^2 - \sum_{i=2}^{s-1} 2^{i+1}x_ix_{i+1} \\ &= 11x_2^2 + \sum_{i=3}^{s}(3 \cdot 2^{i-1} + 1)x_i^2 - 2x_2x_3 + 6x_2(x_4 + \ldots + x_s) \\ &+ 2\sum_{3 \leqslant i < j \leqslant s} x_ix_j - \sum_{i=3}^{s-1} 2^{i+1}x_ix_{i+1}. \end{aligned} \tag{56}$$

Пусть

$$h(n,s) = \sum \exp\Big\{ -\frac{1}{2^{s+1}v} f^1(x_2, \ldots, x_s)\Big\},$$

где суммирование осуществляется по всем целым $x_2, \ldots, x_s$. Найдем асимптотическую формулу для $h(n,s)$ и затем покажем, что $h(n,s) \sim g(n,s)$ при $n \to \infty$.

Ясно, что если $a \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} \exp\Big(-\frac{i^2}{a}\Big) \sim \int_0^{\infty} \exp\Big(-\frac{x^2}{a}\Big)dx.$$

Поскольку в рассматриваемом случае это условие соблюдается ($v \to \infty$ при $n \to \infty$), от суммирования можно перейти к интегрированию. Далее, так как квадратичная форма $f^1(x_2, \dots, x_s)$ является положительно определенной, то функции $\frac{1}{2^{s+1}v} f^1(x_2, \dots, x_s)$ можно поставить в соответствие ковариационную матрицу A порядка $s-1$, определенную перед леммой 2. Тогда, как известно (см., например, [1, с. 58]), имеем

$$h(n,s) \sim \sqrt{\frac{(2\pi)^{s-1}}{|A|}}. \tag{57}$$

Из леммы 2 и (57) следует, что

$$h(n,s) \sim \frac{(2^{s+1}\pi v)^{(s-1)/2}}{(2^2 2^3 \dots 2^{s-2} 2^{2s+2})^{1/2}}.$$

Пользуясь этим соотношением и леммой 5, при $n \to \infty$ получаем

$$|T_s^0(n)| h(n,s) \sim 2^{n-1} \exp(-n 2^{-s-1}).$$

Отсюда и из равенства $|B_s(n)| = 2|T_s(n)|$ следует, что для завершения доказательства теоремы 2 остается показать, что при $n \to \infty$

$$|T_s^+(n)| \sim |T_s^0(n)| h(n,s) \text{ и } |B_s(n)| = 2|T_s^+(n)|.$$

Это будет сделано в конце доказательства теоремы 3, поскольку аналогичный факт необходимо устанавливать и для теоремы 3, а доказательства в обоих случаях не различаются.

§ 5. Число слов в $B_s(n)$ при $\frac{1}{2}\log n + 2\log\log n \leqslant s < \log n - \log\log n + 2$. Случай 2

В этом параграфе рассматривается случай, когда n представимо в виде $n = v\sum_{i=1}^{s}(2^i - 1) + t$, где v — натуральное число, $s \in [\frac{1}{2}\log\log n, \log n - \log\log n + 2]$ и t удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant t < \sum_{i=1}^{s}(2^i - 1) = 2^{s+1} - s - 2$. Представим t в виде $t = t_1 + t_2 + \ldots + t_s$, где $t_1 = \lceil t/2 \rceil$, а при каждом i, $2 \leqslant i \leqslant s$, число $t_i = \lceil (t - t_1 - \ldots - t_{i-1})/2 \rceil$. В частности, $t_s = 0$.

В этом случае в качестве специального множества (обозначим его через $T_s^1(n)$) возьмем такое множество $T_s(n, w_1, \dots, w_s)$, что $w_i = 2^{s-i}v + t_i - t_{i+1}$, т. е. в i-й строке схемы (начиная сверху) содержится $(2^i - 1)v + t_{s+1-i}$ единиц.

Лемма 7. *Пусть* $n = v\sum_{i=1}^{s}(2^i-1)+t$, *где* v — *натуральное число*, $s\in[\frac{1}{2}\log n+2\log\log n,\ \log n-\log\log n+2]$, t *удовлетворяет неравенствам* $1\leqslant t<2^{s+1}-s-2$ *и* $t=t_1+t_2+\ldots+t_s$, а t_i, $1\leqslant i\leqslant s$, *определены выше. Тогда при* $n\to\infty$

$$|T_s^1(n)|\sim\frac{2^n}{(2\pi(v+t2^{-s-1})^{(s-1)/2}(2^2\cdot 2^3\cdot\ldots\cdot 2^{s-2})^{1/2}}\exp(-n2^{-s-1}).$$

Доказательство. Согласно лемме 1 имеем

$$|T_s^1(n)|=\{(2^s-1)v+t_1\}!\Big/\Big\{v!\prod_{i=1}^{s-1}(2^iv+t_{s-i}-t_{s-i+1})\Big\}!.$$

Пользуясь соотношением (46), получаем

$$|T_s^1(n)|\sim\frac{(2\pi(2^s-1)v+t_1))^{1/2}}{\Big\{2\pi v\prod_{i=1}^{s-1}(2\pi(2^iv+t_{s-i}-t_{s-i+1}))\Big\}^{1/2}v^v}\\ \times\frac{\{(2^s-1)v+t_1\}^{(2^s-1)v+t_1}}{\prod_{i=1}^{s-1}(2^iv+t_{s-i}-t_{s-i+1})^{2^iv+t_{s-i}-t_{s-i+1}}}. \quad (58)$$

Положим

$$F(s,v,t)=\{(2^s-1)v+t_1\}^{(2^s-1)v+t_1}\\ \Big/\Big\{v^v\prod_{i=1}^{s-1}(2^iv+t_{s-i}-t_{s-i+1})^{2^iv+t_{s-i}-t_{s-i+1}}\Big\}. \quad (59)$$

При соблюдении условий леммы и $n\to\infty$ имеем

$$\{(2^s-1)v+t_1\}^{(2^s-1)v+t_1}=(2^sv+t_1)^{(2^s-1)v+t_1}\left(1-\frac{v}{2^sv+t_1}\right)^{(2^s-1)v+t_1}\\ \sim(2^sv+t_1)^{(2^s-1)v+t_1}e^{-v}=\left\{2^sv\left(1+\frac{t_1}{2^sv}\right)\right\}^{(2^s-1)v+t_1}e^{-v}, \quad (60)$$

$$\prod_{i=1}^{s-1}(2^iv+t_{s-i}-t_{s-i+1})^{2^iv}=\prod_{i=1}^{s-1}\left\{2^iv\left(1+\frac{t_{s-i}-t_{s-i+1}}{2^iv}\right)\right\}^{2^iv}\\ =2^{((s-2)2^s+2)v}v^{(2^s-2)v}\prod_{i=1}^{s-1}\left(1+\frac{t_{s-i}-t_{s-i+1}}{2^iv}\right)^{2^iv}, \quad (61)$$

$$\prod_{i=1}^{s-1}(2^iv+t_{s-i}-t_{s-i+1})^{t_{s-i}-t_{s-i+1}}=(\text{ибо } t_s=0)$$

$$=(2^{s-1}v+t_1-t_2)^{t_1}\prod_{i=1}^{s-2}\left(\frac{2^iv+t_{s-i}-t_{s-i+1}}{2^{i+1}v+t_{s-i-1}-t_{s-i}}\right)^{t_{s-i}}$$

$$=(2^{s-1}v)^{t_1}\left(1+\frac{t_1-t_2}{2^{s-1}v}\right)^{t_1}\prod_{i=1}^{s-2}\left\{2^{-t_{s-i}}\left(\frac{2^{i+1}v+2t_{s-i}-2t_{s-i+1}}{2^{i+1}v+t_{s-i-1}-t_{s-i}}\right)^{t_{s-i}}\right\}$$

$$=(2^{s-1}v)^{t_1}\left(1+\frac{t_1-t_2}{2^{s-1}v}\right)^{t_1}2^{-t+t_1}\prod_{i=1}^{s-2}\left(1-\frac{t_{s-i-1}-3t_{s-i}+2t_{s-i+1}}{2^{i+1}v+t_{s-i-1}-t_{s-i}}\right)^{t_{s-i}}. \qquad (62)$$

Подставляя (60)–(62) в (59), получаем

$$F(s,v,t)\sim 2^{(2^s-s-2)v+t}e^{-v}\left(1+\frac{t_1}{2^sv}\right)^{(2^s-1)v+t_1}\Big/\left\{\left(1+\frac{t_1-t_2}{2^{s-1}v}\right)^{t_1}\right.$$

$$\left.\times\prod_{i=1}^{s-1}\left(1+\frac{t_{s-i}-t_{s-i+1}}{2^iv}\right)^{2^iv}\prod_{i=1}^{s-2}\left(1-\frac{t_{s-i-1}-3t_{s-i}+2t_{s-i+1}}{2^{i+1}v+t_{s-i-1}-t_{s-i}}\right)^{t_{s-i}}\right\}. \qquad (63)$$

Нетрудно понять, что при любом i, $1\leqslant i\leqslant s$,

$$t2^{-i}-1<t_i<t2^{-i}+1. \qquad (64)$$

Поэтому

$$\left(1+\frac{t_1-t_2}{2^{s-1}v}\right)^{t_1}\sim\left(1+\frac{t_1}{2^sv}\right)^{t_1}, \qquad (65)$$

$$\left(1+\frac{t_1}{2^sv}\right)^{(2^s-1)v}=\left(1+\frac{t_1}{2^sv}\right)^{2^sv}\exp\left\{v\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{t_1^j}{j(2^sv)^j}\right\}\sim(\text{ибо } t<2^{s+1})$$

$$\sim\left(1+\frac{t_1}{2^sv}\right)^{2^sv}\exp(-t_12^{-s})\sim\left(1+\frac{t_1}{2^sv}\right)^{2^sv}\exp(-t2^{-s-1}), \qquad (66)$$

$$\prod_{i=1}^{s-2}\left(1-\frac{t_{s-i-1}-3t_{s-i}+2t_{s-i+1}}{2^{i+1}v+t_{s-i-1}-t_{s-i}}\right)^{t_{s-i}}$$

$$=\prod_{i=1}^{s-2}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t_{s-i}(t_{s-i-1}-3t_{s-i}+2t_{s-i+1})^j}{j(2^{i+1}v+t_{s-i-1}-t_{s-i})^j}\right\}\sim(\text{см. }(64))$$

$$\sim\exp\left\{-\sum_{i=1}^{s-2}\frac{t_{s-i}(t_{s-i-1}-3t_{s-i}+2t_{s-i+1})}{2^{i+1}v+t_{s-i-1}-t_{s-i}}\right\}$$

$$=\exp\left\{-\left(1+O\left(\frac{1}{v}\right)\right)\sum_{i=1}^{s-2}\frac{t(t_{s-i-1}-3t_{s-i}+2t_{s-i+1})}{2^{s+1}v}\right\}$$

$$=\exp\left\{\frac{t}{2^{s+1}v}(t_{s-1}+2t_2-t_1)+\frac{O(ts)}{2^{s+1}v^2}\right\}\sim 1. \qquad (67)$$

Подставляя (65)–(67) в (63) и пользуясь тем, что $2^{(2^s-s-2)v+t} = 2^n$, получаем

$$F(s,v,t) \sim 2^n \exp(-v - t2^{-s-1})\left(1+\frac{t_1}{2^s v}\right)^{2^s v} \Big/ \prod_{i=1}^{s-1}\left(1+\frac{t_{s-i}-t_{s-i+1}}{2^i v}\right)^{2^i v}. \tag{68}$$

Далее имеем

$$\left(1+\frac{t_1}{2^i v}\right)^{2^s v} \Big/ \prod_{i=1}^{s-1}\left(1+\frac{t_{s-i}-t_{s-i+1}}{2^i v}\right)^{2^i v}$$
$$= \exp\left\{2^s v\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{t_1^j}{j(2^s v)^j} + \sum_{i=1}^{s-1} 2^i v \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{(t_{s-i}-t_{s-i+1})^j}{j(2^i v)^j}\right\}. \tag{69}$$

В свою очередь,

$$\frac{2^s v t_1}{2^s v} - \sum_{i=1}^{s-1} 2^i v \frac{t_{s-i}-t_{s-i+1}}{2^i v} = t_1 - \sum_{i=1}^{s-1}(t_{s-i}-t_{s-i+1}) = t_s = 0. \tag{70}$$

Предположим, что $t \leqslant 2^{s/2}$. Тогда, используя (64), имеем

$$2^s v \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{t_1^j}{j(2^s v)^j} = o(1) \tag{71}$$

и

$$\sum_{i=1}^{s-1} 2^i v \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j \frac{(t_{s-i}-t_{s-i+1})^j}{j(2^i v)^j}$$
$$= v \sum_{i=\lfloor s/2\rfloor-1}^{s-1} 2^i \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\frac{(t2^{-s+i-1}+O(1))^j}{j(2^i v)^j}$$
$$= v \sum_{i=\lfloor s/2\rfloor-1}^{s-1} 2^i \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\frac{(t+O(2^{s+1-i}))^j}{j(2^{s+1}v)^j}$$
$$= v \sum_{i=\lfloor s/2\rfloor-1}^{s-1} 2^i \frac{(t+O(2^{s+1-i}))^2}{2(2^{s+1}v)^2}(1+o(1)) = o(1). \tag{72}$$

Подставив (70)–(72) в (69) и воспользовавшись (68), при $t \leqslant 2^{s/2}$ получаем

$$F(s,v,t) \sim 2^n \exp(-v - t2^{-s-1}). \tag{73}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $t > 2^{s/2}$. Пользуясь (64), имеем

$$\begin{aligned}
2^s v \sum_{j=3}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{t_1^j}{j(2^s v)^j} &= 2^s v \sum_{j=3}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{(t/2+O(1))^j}{j(2^s v)^j} \\
&= \sum_{j=3}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{t^j(1+O(\frac{1}{t}))^j}{2j(2^{s+1}v)^{j-1}} \\
&= \sum_{j=3}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{t^j}{2j(2^{s+1}v)^{j-1}}\exp\Big(j\ln\Big(1+O\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)\Big) \\
&= \sum_{j=3}^{\infty}\Big\{(-1)^{j+1}\frac{t^j}{2j(2^{s+1}v)^{j-1}}\exp\Big(O\Big(\frac{j}{t}\Big)\Big)\Big\} \\
&= \sum_{j=3}^{\infty}\Big\{(-1)^{j+1}\frac{t^j}{2j(2^{s+1}v)^{j-1}}\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(O\Big(\frac{j}{t}\Big)\Big)^k\Big)\Big\} \\
&= \sum_{j=3}^{\infty}\Big\{(-1)^{j+1}\frac{t^j}{2j(2^{s+1}v)^{j-1}}\Big\}+o(1). \qquad (74)
\end{aligned}$$

Обозначим через i_0 максимальное i такое, что $t_{s-i} \leqslant 6$. Тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{s-1} 2^i v \sum_{j=3}^{\infty}(-1)^j\frac{(t_{s-i}-t_{s-1+1})^j}{j(2^i v)^j} &= \sum_{i=1}^{i_0} 2^i v \sum_{j=3}^{\infty}(-1)^j\frac{c^j}{j(2^i v)^j} \\
&+ \sum_{i=i_0+1}^{s-1} 2^i v \sum_{j=3}^{\infty}(-1)^j\frac{(t2^{-s+i-1}+O(1))^j}{j(2^i v)^j} \\
&= o(1) + \sum_{i=i_0+1}^{s-1} 2^i v \sum_{j=3}^{\infty}(-1)^j\frac{(t+O(2^{s+1-i}))^j}{j(2^{s+1}v)^j} \\
&= o(1) + \sum_{j=3}^{\infty}(-1)^j \sum_{i=i_0+1}^{s-1} 2^i v \frac{t^j}{j(2^{s+1}v)^j}\Big(1+O\Big(\frac{j\cdot 2^{s+1-i}}{t}\Big)\Big) \\
&= o(1) + \sum_{j=3}^{\infty}\frac{t^j}{2j(2^{s+1}v)^{j-1}}. \qquad (75)
\end{aligned}$$

Подставив (70), (74) и (75) в (69), получаем

$$\begin{aligned}
F(s,v,t) &\sim 2^n\exp(-v-t2^{-s-1})\exp\Big\{-\frac{2^s v t_1^2}{2(2^s v)^2}+\sum_{i=1}^{s-1}\frac{2^i v(t_{s-i}-t_{s-i+1})^2}{2(2^i v)^2}\Big\} \\
&\sim 2^n\exp(-v-t2^{-s-1})\exp\Big\{\frac{1}{2}\Big[-\frac{t^2}{2^{s+2}v}+\sum_{i=1}^{s-1}\frac{(t_{s-i}-t_{s-i+1})^2}{2^i v}\Big]\Big\}. \qquad (76)
\end{aligned}$$

Так как при любых a и b, $0 < a < b$, справедливо равенство

$$\frac{a^2}{b} = a\ln\left(1+\frac{a}{b}\right) + a\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}\left(\frac{a}{b}\right)^k,$$

то

$$\sum_{i=1}^{s-1}\frac{(t_{s-i}-t_{s-i+1})^2}{2^i v} = \sum_{i=1}^{s-1}\left\{(t_{s-i}-t_{s-i+1})\ln\left(1+\frac{t_{s-i}-t_{s-i+1}}{2^i v}\right)\right\}$$
$$+\sum_{i=1}^{s-1}\left\{(t_{s-i}-t_{s-i+1})\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{j}\left(\frac{t_{s-i}-t_{s-i+1}}{2^i v}\right)^j\right\}. \quad (77)$$

В свою очередь,

$$\prod_{i=1}^{s-1}\left(1+\frac{t_{s-i}-t_{s-i+1}}{2^i v}\right)^{t_{s-i}-t_{s-i+1}}$$
$$=\prod_{i=1}^{s-1}\left(\frac{2^i v+t_{s-i}-t_{s-i+1}}{2^i v}\right)^{t_{s-i}}\Big/\prod_{i=1}^{s-1}\left(\frac{2^i v+t_{s-i}-t_{s-i+1}}{2^i v}\right)^{t_{s-i+1}}$$
$$=2^{t-st_1}v^{-t_1}\prod_{i=1}^{s-1}\{(2^i v+t_{s-i}-t_{s-i+1})^{t_{s-i}}/(2^i v+t_{s-i}-t_{s-i+1})^{t_{s-i+1}}\}$$
$$=(\text{см. } (62)) = \left(1+\frac{t_1-t_2}{2^{s-1}v}\right)^{t_1}\prod_{i=1}^{s-2}\left(1-\frac{t_{s-i-1}-3t_{s-i}+2t_{s-i+1}}{2^{i+1}v+t_{s-i-1}-t_{s-i}}\right)^{t_{s-i}}$$
$$\sim(\text{см. } (67))\sim\left(1+\frac{t_1-t_2}{2^{s-1}v}\right)^{t_1}\sim\left(1+\frac{t}{2^{s+1}v}\right)^{t_1}.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{s-1}\{(t_{s-i}-t_{s-i+1})\ln\left(1+\frac{t_{s-i}-t_{s-i+1}}{2^i v}\right) = t_1\ln\left(1+\frac{t}{2^{s+1}v}\right)+o(1). \quad (78)$$

Далее имеем

$$\sum_{i=1}^{s-1}\left\{(t_{s-i}-t_{s-i+1})\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{j}\left(\frac{t_{s-i}-t_{s-i+1}}{2^i v}\right)^j\right\}$$
$$=\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\frac{(t_{s-i}-t_{s-i+1})^{j+1}}{j(2^i v)^j} = (\text{см. } (64))$$
$$=\sum_{i=i_0+1}^{s-1}\sum_{j=2}^{\infty}\left\{(-1)^j\frac{(t2^{-s+i-1}+O(1))^{j+1}}{j(2^i v)^j}\right\}+o(1)$$

$$= \sum_{i=i_0+1}^{s-1} \sum_{j=2}^{\infty} \Big\{(-1)^j \Big[\frac{t}{2^{s+1-i}j}\Big(\frac{t}{2^{s+1}v}\Big)^j + O\Big(\Big(\frac{t}{2^s v}\Big)^j\Big)\Big]\Big\} + o(1)$$

$$= \sum_{i=i_0+1}^{s-1} t2^{-s+i-1}\Big[-\ln\Big(1+\frac{t}{2^{s+1}v}\Big) + \frac{t}{2^{s+1}v}\Big] + O(v^{-2})\Big\} + o(1)$$

$$= o(1) + \frac{t(2^s-2)}{2^{s+1}}\Big[-\ln\Big(1+\frac{t}{2^{s+1}v}\Big) + \frac{t}{2^{s+1}v}\Big]$$

$$= o(1) + \frac{t^2}{2^{s+2}v} - t_1 \ln\Big(1+\frac{t}{2^{s+1}v}\Big). \tag{79}$$

Из (77)–(79) следует, что

$$\sum_{i=1}^{s-1} \frac{(t_{s-i}-t_{s-i+1})^2}{2^i v} = \frac{t^2}{2^{s+2}v} + o(1).$$

Воспользовавшись этим равенством и (76), получаем

$$F(s,v,t) \sim 2^n \exp(-v - t2^{-s-1}). \tag{80}$$

Из (58), (59), (73) и (80) следует, что

$$|T_s^1(n)| \sim \frac{(2\pi((2^s-1)v+t_1))^{1/2}2^n}{\Big\{2\pi v \prod_{i=1}^{s-1}(2\pi(2^i v + t_{s-i} - t_{s-i+1}))\Big\}^{1/2}} \exp(-v - t2^{-s-1})$$

$$\sim \frac{(2\pi(2^s v + t_1))^{1/2}2^n}{\Big(2\pi v \prod_{i=1}^{s-1}(2\pi(2^i v + t2^{-s+i-1}))\Big)^{1/2}} \exp(-v - t2^{-s-1})$$

$$\sim \frac{2^{n+s/2}}{\prod_{i=1}^{s-1}(2\pi(2^i v + t2^{-s+i-1}))^{1/2}} \exp(-v - t2^{-s-1})$$

$$\times \frac{2^n}{(2\pi(v+t2^{-s-1}))^{(s-1)/2}(2^2\cdot 2^3\cdot\ldots\cdot 2^{s-2})^{1/2}} \exp(-v - t2^{-s-1}).$$

Наконец, из соотношения $n = v\sum_{i=1}^{s}(2^i-1)+t$ следует, что $v = (n-t)/(2^{s+1}-s-2)$. Поэтому при соблюдении условий леммы 7 и $n\to\infty$ имеем

$$\exp(-v - t2^{-s-1}) = \exp\Big(-\frac{n-t}{2^{s+1}-s-2} - t2^{-s-1}\Big)$$

$$= \exp\Big(-\frac{n}{2^{s+1}-s-2} + \frac{(s+2)t}{2^{s+1}(2^{s+1}-s-2)}\Big) \sim \exp(-n2^{-s-1}).$$

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть* $n = v\sum_{i=1}^{s}(2^s - 1) + t$, *где* v — *натуральное число,* $s \in [\frac{1}{2}\log n + 2\log\log n, \log n - \log\log n + 2]$, t *удовлетворяет неравенствам* $1 \leqslant t < 2^{s+1} - s - 2$ *и* $t = t_1 + t_2 + \ldots + t_s$, *а* t_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, *определены перед леммой* 5. *Тогда если параметры* $w_1, \ldots, w_s$ *таковы, что*

$$|r_1 - (2^s - 1)v| \leqslant 3(2^s v)^{1/2}\ln(2^s v),$$
$$|r_i - r_{i+1} - 2^{s-i}v| \leqslant (2^{s-i}v)^{1/2}\ln(2^{s-i}v), \ 1 \leqslant i \leqslant s-1,$$

и $|w_s - v| \leqslant v^{1/2}\ln v$, *то при* $n \to \infty$

$$|T_s(n, w_1, \ldots, w_s)|$$
$$\sim |T_s^1(n)| \exp\left\{\frac{x_1^2}{2(2^s v + t/2)} - \frac{x_s^2}{2(v + t2^{-s+1})} - \sum_{i=1}^{s-1}\frac{(x_i - x_{i+1})^2}{2(2^{s-i}v + t2^{-i-1})}\right\}.$$

Доказательство. Согласно лемме 1 имеем

$$|T_s(n, w_1, \ldots, w_s)| = \prod_{i=1}^{s-1}\binom{r_i}{r_{i+1}}, \tag{81}$$

где $r_i = \sum_{j=i}^{s} w_j$, $1 \leqslant i \leqslant s$. Каждое r_i представим в виде

$$r_i = (2^{s+1-i} - 1)v + t_i + x_i,$$

где $x_1 + x_2 + \ldots + x_s = 0$. Тогда из (81) следует, что

$$|T_s(n, w_1, \ldots, w_s)| = \prod_{i=1}^{s-1}\binom{(2^{s+1-i} - 1)v + t_i + x_i}{(2^{s-i} - 1)v + t_{i+1} + x_{i+1}}$$
$$= \{(2^s - 1)v + t_1 + x_1\}!/\{(v + x_s)!\prod_{i=1}^{s-1}(2^{s-i}v + t_i - t_{i+1} + x_i - x_{i+1})!\}.$$

Пользуясь (48), получаем

$$\{(2^s - 1)v + t_1 + x_1\}! = \{(2^s - 1)v + t_1\}!((2^s - 1)v + t_1)^{x_1}$$
$$\times \exp\left\{\frac{x_1^2}{2((2^s - 1)v + t_1)} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{2^s v}}\Big)\right\},$$
$$(v + x_s)! = v!v^{x_s}\exp\left(\frac{x_s^2}{2v} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{v}}\Big)\right)$$

и при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant s-1$,

$$(2^{s-i}v + t_i - t_{i+1} + x_i - x_{i+1})! = (2^{s-i}v + t_i - t_{i+1})!(2^{s-i}v + t_i - t_{i+1})^{x_i - x_{i+1}}$$
$$\times \exp\left\{\frac{(x_i - x_{i+1})^2}{2(2^{s-i}v + t_i - t_{i+1})} + o((1/2^{s-i}v)^{1/2})\right\}.$$

Следовательно, при рассматриваемых $w_1, \dots, w_s$ имеем

$$|T_s(n, w_1, \dots, w_s)| \sim |T_s^1(n)| \frac{((2^s-1)v+t_1)^{x_1}}{v^{x_s}\prod\limits_{i=1}^{s-1}(2^{s-i}v+t_i-t_{i+1})^{x_i-x_{i+1}}}$$

$$\times \exp\left\{\frac{x_1^2}{2((2^s-1)v+t_1)} - \frac{x_s^2}{2v} - \sum_{i=1}^{s-1}\frac{(x_i-x_{i+1})^2}{2(2^{s-i}v+t_i-t_{i+1})}\right\}. \quad (82)$$

В свою очередь, если $n \to \infty$, то

$$((2^s-1)v+t_1)^{x_s} \sim (2^s v+t_1)^{x_1} = (2^s v)^{x_1}\Big(1+\frac{t_1}{2^s v}\Big)^{x_1},$$

$$\prod_{i=1}^{s-1}(2^{s-i}v+t_i-t_{i+1})^{x_i-x_{i+1}}$$

$$\sim \prod_{i=1}^{s-1}(2^{s-i}v+t_{i+1})^{x_i-x_{i+1}} = \prod_{i=1}^{s-1}\left\{2^{s-i}v\Big(1+\frac{t_{i+1}}{2^{s-i}v}\Big)\right\}^{x_i-x_{i+1}}.$$

Пользуясь двумя последними соотношениями, при $n \to \infty$ получаем

$$\frac{((2^s-1)v+t_1)^{x_1}}{v^{x_s}\prod\limits_{i=1}^{s-1}(2^{s-i}v+t_i-t_{i+1})^{x_i-x_{i+1}}} \sim \frac{2^{sx_1}\Big(1+\frac{t_1}{2^s v}\Big)^{x_1}}{\prod\limits_{i=1}^{s-1}\left\{2^{s-i}\Big(1+\frac{t_{i+1}}{2^{s-i}v}\Big)\right\}^{x_i-x_{i+1}}}$$

$$= \frac{2^{x_1+\ldots+x_s}\Big(1+\frac{t_1}{2^s v}\Big)^{x_1}}{\prod\limits_{i=1}^{s-1}\Big(1+\frac{t_{i+1}}{2^{s-i}v}\Big)^{x_i-x_{i+1}}} = (\text{ибо } x_1+\ldots+x_s=0)$$

$$= \Big(1+\frac{t_1}{2^s v}\Big)^{x_1}\prod_{i=1}^{s-1}\Big(1+\frac{t_{i+1}}{2^{s-i}v}\Big)^{x_i-x_{i+1}} = \left(\text{ибо } \Big(1+\frac{t_s}{2v}\Big)^{x_s}=1\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{s-1}\left\{\Big(1+\frac{t_i}{2^{s+1-i}v}\Big)\Big/\Big(1+\frac{t_{i+1}}{2^{s-i}v}\Big)\right\}^{x_i} = (\text{см. } (64))$$

$$= \prod_{i=1}^{s-1}\Big(1+\frac{O(1)}{2^{s-i}v}\Big)^{x_i} \sim 1. \quad (83)$$

Подставляя (83) в (82) и используя (64), получаем

$$|T_s(n, w_1, \dots, w_s)| \sim |T_s^1(n)|$$

$$\times \exp\left\{\frac{x_1^2}{2((2^s-1)v+t_1)} - \frac{x_s^2}{2v} - \sum_{i=1}^{s-1}\frac{(x_i-x_{i+1})^2}{2(2^{s-i}v+t_i-t_{i+1})}\right\} \sim |T_s^1(n)|$$

$$\times \exp\left\{\frac{x_1^2}{2((2^s-1)v+t/2)} - \frac{x_s^2}{2(v+t2^{-s+1})} - \sum_{i=1}^{s-1}\frac{(x_i-x_{i+1})^2}{2(2^{s-i}v+t2^{-i-1})}\right\}.$$

Лемма 8 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $n = v\sum_{i=1}^{s}(2^i-1)+t$, *где* v — *натуральное число,* $s \in [\frac{1}{2}\log n+2\log\log n,\ \log n-\log\log n+2]$ *и* t *удовлетворяет неравенствам* $1 \leqslant t < 2^{s+1}-s-2$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$|B_s(n)| \sim 2^n \exp(-n2^{-s-1}).$$

Доказательство. Пусть

$$T_s^+(n) = \cup T_s(n, w_1, \ldots, w_s),$$

где объединение берется по таким $w_1, \ldots, w_s$, что

$$|r_1-(2^s-1)-t_1| \leqslant 3(2^s v)^{1/2}\ln(2^s v)$$

и

$$|r_i - r_{i+1} - 2^{s-i}v - t_{s+1-i} + t_{s-i}| \leqslant (2^{s-i}v)^{1/2}\ln(2^{s-i}v), 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Пользуясь леммой 8, получаем

$$|T_s^+(n)| \sim |T_s^1(n)| g_1(n,s,t), \tag{84}$$

где

$$g_1(n,s,t) = \sum \exp\left\{\frac{x_1^2}{2^{s+1}v+t} - \frac{x_s^2}{2v+t2^{-s}} - \sum_{i=1}^{s-1}\frac{(x_i-x_{i+1})^2}{2(2^{s-i}v+t2^{-i-1})}\right\}$$
$$= \sum \exp\left\{\frac{1}{2^{s+1}v+t}\left(x_1^2 - 2^s x_s^2 - \sum_{i=1}^{s-1}2^i(x_i-x_{i+1})^2\right)\right\},$$

а $\sum$ берется по целым $x_1, \ldots, x_s$ таким, что $x_1+\ldots+x_s = 0$, $|x_1| \leqslant 3(2^s v)^{1/2}\ln(2^s v)$, при любом i, $1 \leqslant i \leqslant s^{-1}$,

$$|x_i - x_{i+1}| \leqslant (2^{s-i}v)^{1/2}\ln(2^{s-i}v)$$

и $x_s \leqslant v^{1/2}\ln v$.

После возведения $(x_i - x_{i+1})^2$ в квадрат и тождественных преобразований получаем

$$g_1(n,s,t)$$
$$= \sum \exp\left\{-\frac{1}{2^{s+1}v+t}\left(x_1^2 - 4x_1x_2 + 3\sum_{i=2}^{s}2^{i-1}x_i^2 - \sum_{i=2}^{s-1}2^{i+1}x_ix_{i+1}\right)\right\}.$$

Поскольку $x_1+\ldots+x_s = 0$, заменим x_1 на $-x_2-\ldots-x_s$. В результате получим

$$g_1(n,s,t) = \sum \exp\left\{-\frac{1}{2^{s+1}v+t}f^1(x_2,\ldots,x_s)\right\},$$

где $f^1(x_2,\dots,x_s)$ взято из (56).

Пусть

$$h_1(n,s,t)=\sum{}'\exp\Big\{-\frac{1}{2^{s+1}v+t}f^1(x_2,\dots,x_s)\Big\},\tag{85}$$

где суммирование осуществляется по всем целым $x_2,\dots,x_s$. Так как квадратичная форма $f^1(x_2,\dots,x_s)$ является положительно определенной (этот факт был установлен при доказательстве теоремы 2), то, заменив суммирование интегрированием, функции $\frac{1}{2^{s+1}v+t}f^1(x_2,\dots,x_s)$ можно поставить в соответствие ковариационную матрицу A' порядка $s-1$. В результате имеем

$$h_1(n,s,t)\sim\sqrt{\frac{(2\pi)^{s-1}}{|A'|}}.\tag{86}$$

Ясно, что каждый элемент матрицы A' получается из соответствующего элемента матрицы A, введенной перед леммой 2, умножением на $2^{s+1}v/(2^{s+1}v+t)$. Отсюда и из леммы 2 следует, что

$$|A'|=(2^{s+1}v/(2^{s+1}v+t))^{s+1}|A|=\frac{2^2\cdot2^3\cdot\ldots\cdot2^{s-1}\cdot2^{2s+2}}{(2^{s+1}v+t)^{s-1}}.\tag{87}$$

Подставляя (87) в (86), при $n\to\infty$ получаем

$$h_1(n,s,t)\sim(2\pi(2^{s+1}v+t))^{(s-1)/2}/(2^2\cdot2^3\cdot\ldots\cdot2^{s-1}\cdot2^{2s+2})^{1/2}.\tag{88}$$

Пользуясь леммой 7 и (88), имеем

$$|T_s^1(n)|h_1(n,s,t)\sim2^{n-1}\exp(-n2^{-s-1}).\tag{89}$$

Из (84), (85), (89) и равенства $|B_s(n)|=2|T_s(n)|$ следует, что для завершения доказательства теоремы остается убедиться в справедливости соотношения: при $n\to\infty$

$$g_1(n,s,t)\sim h_1(n,s,t),\tag{90}$$

$$|T_s(n)|-|T_s^+(n)|=o(|T_s^1(n)|h_1(n,s,t))\tag{91}$$

(доказательство теоремы 2 будет завершено, если взять $t=0$). Сначала докажем (90). Введем обозначения:

$$a_0=3(2^sv)^{1/2}\ln(2^sv),\ \ a_s=v^{1/2}\ln v$$

и при любом i, $1\leqslant i\leqslant s-1$,

$$a_i=(2^{s-i}v)^{1/2}\ln(2^{s-i}v).$$

Пусть

$$q^1(n,s,t) = \sum \exp\left\{ -\frac{1}{2^{s+1}v+t}\Big(-x_1^2 + 2^s x_s^2 + \sum_{i=1}^{s-1} 2^i (x_i - x_{i+1})^2 \Big) \right\}, \quad (92)$$

где суммирование осуществляется по таким $x_1, \ldots, x_s$, что среди чисел $|x_1|, |x_1-x_2|, \ldots, |x_{s-1}-x_s|, |x_s|$ имеется по крайней мере одно, например, число $|x_i - x_{i+1}|$ такое, что $|x_i - x_{i+1}| \geqslant a_i$. Очевидно, что (90) следует из соотношения

$$q^1(n,s,t) = o(h_1(n,s,t)). \quad (93)$$

Убедимся в справедливости (93). Сначала покажем, что в (92) можно ограничиться суммированием только по числам $|x_1 - x_2|, \ldots, |x_{s-1} - x_s|, |x_s|$ указанного вида. Это вытекает из следующего факта.

Утверждение 1. *Если x_1 таково, что $|x_1| \geqslant a_0$, то среди чисел $|x_1 - x_2|, \ldots, |x_{s-1} - x_s|, |x_s|$ имеется по крайней мере одно, например, число $|x_i - x_{i+1}|$ такое, что $|x_i - x_{i+1}| > a_i$.*

Для определенности положим, что $x_1 > 0$ (случай $x_1 < 0$ рассматривается аналогично).

Если $x_1 \geqslant a_0$ и $|x_1 - x_2| \geqslant a_1$, то утверждение 1 справедливо. Если же $x_1 \geqslant a_0$, то неравенство $|x_1 - x_2| < a_1$ может выполняться только при $x_2 > a_0 - a_1 > 3a_1$. В свою очередь, если $x_2 > 3a_1$, то неравенство $|x_2 - x_3| < a_2$ может выполняться только при $x_3 > 3a_2$ и т. д. Таким образом, если $|x_1 - x_2| < a_1$, $|x_2 - x_3| < a_2, \ldots, |x_i - x_{i+1}| < a_i$, то $x_2 > 3a_1$, $x_3 > 3a_2, \ldots, x_{i+1} > 3a_i$. Так как $x_1 + \ldots + x_s = 0$, то все x_i не могут быть положительными. Поэтому существует $i = j$ такое, что $x_j > 3a_{j-1}$ и $x_{j+1} < 0$. В этом случае $|x_j - x_{j+1}| > a_j$. Утверждение доказано.

Теперь перейдем к непосредственному доказательству (93). Пусть при произвольном j, $1 \leqslant j \leqslant s-1$, зафиксированы x_j и x_{j+1} такие, что $|x_j - x_{j+1}| \geqslant a_j$ (или $x_s \geqslant a_s$). Ясно, что число слагаемых в (93) при таких x_j и x_{j+1} меньше числа всех возможных слагаемых. Поэтому при фиксированных x_j и x_{j+1} имеем

$$\sum \exp\left\{ -\frac{1}{2^{s+1}v+t}\Big(-x_1^2 + 2^s x_s^2 + \sum_{i=1}^{s-1} 2^i (x_i - x_{i+1})^2 \Big) \right\} < h_1(n,s,t) \exp\Big(-\frac{(x_j - x_{j+1})^2}{2^{s+1-j} v} \Big). \quad (94)$$

Далее, согласно лемме 4 можно ограничиться $cn2^{-j}$ способами выбора x_j и x_{j+1} таких, что $|x_j - x_{j+1}| = \mathrm{const} > a_i$. Следовательно,

$$q^1(n,s,t) \leqslant cnh_1(n,s,t) \sum_{j=1}^{s} 2^{-j} \sum_{|x_j - x_{j+1}| \geqslant a_j} \Big(-\frac{(x_j - x_{j+1})^2}{2^{s+1} v} \Big) = o(h_1(n,s,t)),$$

т. е. (93) справедливо. Тем самым соотношение (90) доказано.

Справедливость (91) следует из (90) и следующего факта: при $n \to \infty$

$$\sum_{|x_1| \geqslant a_0} \prod_{j=1}^{|x_1|} \Big(1 - \frac{j}{2^s v + t}\Big) \sim \int\limits_{|x_1| \geqslant a_0} \exp\Big(-\frac{x_1^2}{2^{s+1} v}\Big) dx_1,$$

$$\sum_{|x_s| \geqslant a_s} \prod_{j=1}^{|x_s|} \Big(1 - \frac{j}{v}\Big) \sim \int\limits_{|x_s| \geqslant a_s} \exp\Big(-\frac{x_s^2}{2v}\Big) dx_s$$

и при любом i, $1 \leqslant i \leqslant s-1$,

$$\sum_{|x_i - x_{i+1}| \geqslant a_i} \prod_{j=1}^{|x_i - x_{i+1}|} \Big(1 - \frac{j}{2^{s-i} v}\Big) \sim \int\limits_{|y_i| \geqslant a_i} \exp\Big(-\frac{y_i^2}{2^{s-i+1} v}\Big) dy_i.$$

Теоремы 2 и 3 доказаны.

ЛИТЕРАТУРА .

1. **Боровков А. А.** Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
2. **Гончаров В. Л.** Из области комбинаторики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1944. Т. 8, № 1. С. 3–48.
3. **Новак С. Ю.** Асимптотические разложения в задаче о максимуме длин серий «успехов» в марковской цепи с двумя состояниями // Асимптотический анализ распределений случайных процессов. Новосибирск: Наука, 1989. С. 136-147. (Тр. /АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 13).
4. **Трунов А. Н.** Предельные распределения в задаче о размещении одинаковых частиц по различным ячейкам // Вероятностные задачи дискретной математики. М.: Наука, 1986. С. 147-164. (Тр. /АН СССР. Ин-т математики; Т. 177).
5. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. Т. I.
6. **Arratia R., Golgstein L., Gordon L.** Two moments suffice for Poisson approximation // Ann. Probab. 1989. V. 17, N 1. P. 9–25.

7. **Földes A.** The limit distribution of the length of the longest head-run // Information Theory Statistical Decision Functions Random Processes. V. C. Trans. of the Eighth Prague Conf. 1978. Prague: Acad. Praha, 1979. P. 95-104.
8. **Novak S. Yu.** Longest runs in a sequence of m-dependent random variables // Probab. Theory Related Fields. 1992. V. 91, N 3/4. P. 269–281.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: korshun@math.nsc.ru

Статья поступила
15 сентября 1997 г.