

УДК 519.714.23

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПРАВИЛЬНОЙ РАБОТЫ НЕИСПРАВНЫХ ЧАСТЕЙ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ*)

В. Н. Носков

Предлагается метод преобразования выделенной части произвольной схемы из функциональных элементов в подсхему, в которой при появлении неисправностей из заданного класса возможно восстановление ее правильной работы с помощью фиксирования подходящих значений на некоторых входных полюсах. Эти значения определяются по результатам тестирования схемы. Работа базируется на разработанной ранее автором методике преобразования схем, позволяющей строить комбинационные схемы, допускающие тестирование схем с хорошей локализацией возникающих в них неисправностей широкого класса.

§ 1. Формулировка основного результата

Поиск методов синтеза схем из функциональных элементов, удобных для контроля возникающих в них неисправностей, представляется перспективным направлением в теории контроля управляющих систем. С. Редди [9], В. И. Шевченко [7], А. П. Горяшко [1], Н. П. Редькин [6] и другие предложили различные методы синтеза легкотестируемых схем из функциональных элементов. Авторы таких методов обычно рассматривают неисправности, связанные с неправильной работой базисных элементов схемы. При этом существенно ограничивается класс допустимых неисправностей (самым изученным оказался класс константных неисправностей на входах и выходах элементов схем). Кроме того, для построения схем используется элементный базис, удовлетворяющий некоторым ограничениям.

В [2, 3–5] автором предложены новые методы синтеза удобных для контроля комбинационных схем, в которых допускаются неисправности, более разнообразные, чем обычно предполагается, а элементный базис

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01634) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (код проекта 473).

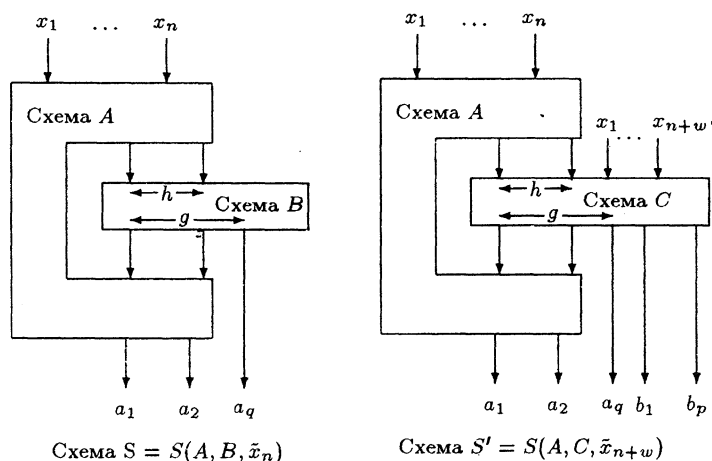


Рис. 1

является полным и произвольным. В [4] мы предложили метод преобразования любой части произвольной схемы из функциональных элементов в подсхему, для которой возможен тестовый контроль с хорошей локализацией возникающих в ней неисправностей. В [5] предложена модификация этого метода для восстановления правильного функционирования неисправной схемы. В этой работе описано преобразование произвольной схемы S из функциональных элементов в схему S' . При этом преобразовании произвольно заданная часть B схемы многократным дублированием ее элементов и добавлением некоторой управляющей части превращается в схему C , а оставшаяся часть схемы S не изменяется.

Схема S' имеет больше входов и выходов, чем схема S (рис. 1). Здесь и ниже полагаем $\tilde{x}_r = (x_1, \dots, x_r)$.

Исправная схема S' при подаче констант 0 на дополнительные входы на основных выходах реализует те же функции от своих основных входов, что и схема S . При появлении в части схемы S' неисправностей из заданного класса возможно восстановление правильной работы ее части C с помощью фиксирования подходящих значений на некоторых входных полюсах. Эти значения определяются по итогам предложенного тестирования схемы S' .

Настоящая работа, так же как и [5], базируется на результатах статьи [4], в которой предложен метод преобразования схемы в такую схему, что в заданной ее части возможна хорошая локализация неисправностей с помощью тестирования. Мы достигаем результатов, подобных описанным в [5], с помощью более совершенного управления переключениями в схеме. Для этого в схему C вводится управляющая переключениями подсхема Δ . Управление самой схемой Δ осуществляется с внешних

полюсов схемы. Это усовершенствование в ряде случаев позволяет избежать слишком большого дублирования элементов схемы для возможности восстановления правильной работы выделенной части схемы. Так, в преобразовании схемы, описанном в [5], каждый элемент схемы B заменялся $m + 1$ копиями (здесь m — верхняя граница числа допустимых неисправностей, которые могут в C возникнуть одновременно).

В настоящей статье описывается схема C , для которой возможна более гибкая организация восстановления ее правильной работы, благодаря чему в ряде случаев можно ограничиться менее чем $m + 1$ копиями элементов. (Например, при построении схемы C можно взять лишь по 2 дубля каждого элемента из B ; если возникшие в схеме C неисправности таковы, что из каждых двух дублей любого элемента β из B в C хоть один дубль является исправным, а прочие элементы в C исправны, то возможно восстановление правильной работы схемы C .) Разумеется, класс допустимых неисправностей в C , при которых возможно восстановление ее правильной работы, существенно зависит от k , т. е. от числа дублей в C для каждого элемента из B . Как и в [5], для восстановления правильной работы схемы мы требуем, чтобы непродублированные элементы схемы C работали правильно на тестовых входных наборах.

Возможность ограничиться небольшим числом копий элементов из B при построении схемы C представляется особенно полезной в тех случаях, когда дублируемые элементы имеют высокую стоимость (это могут быть сложные микросхемы, встроенные в большую схему). Кроме того, ограничения на число дублей могут быть возникнуть из-за большого физического веса или объема дублируемых элементов.

Есть еще одно отличие рассматриваемой здесь схемы C от подобной схемы, описанной в [5]. Ниже мы не ограничиваем число выходов схемы C , тогда как описанная в [5] схема C имеет лишь один дополнительный выход. Это вызвано попыткой упростить изложение материала. Нет никаких препятствий для использования в рассматриваемом случае дополнительной подсхемы, позволяющей сократить число дополнительных выходов до одного (в [5] эта подсхема обозначена через B_3).

Основной результат работы изложен в виде теоремы (см. формулировку ниже в этом параграфе). В ней указаны оценки сложности преобразованной схемы и длины теста.

Перейдем к описанию класса допустимых неисправностей схемы. Пусть схема S из функциональных элементов над произвольным конечным полным базисом $\mathcal{B} = \{\varphi_i\}$, $1 \leq i \leq s$, реализует систему q произвольных булевых функций от переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Обозначим через a_1, \dots, a_q выходы схемы S . Выделим в S произвольную совокупность функциональных элементов и обозначим ее через B . Множество

остальных элементов из S обозначим через A . Обозначив схему S через $S(A, B, \tilde{x}_n)$, представим ее в виде соединения частей A и B так, как показано на рис. 1.

Пусть схема B имеет h входов, g выходов, а C — некоторая схема из функциональных элементов с $h + n + w$ входами и $g + p$ выходами. Заменяя в схеме $S(A, B, \tilde{x}_n)$ подсхему B на схему C так, как показано на рис. 1, получим новую схему $S(A, C, \tilde{x}_{n+w})$.

Обозначим через $S_a(A, C, \tilde{x}_{n+w})$ и $S_a(A, B, \tilde{x}_n)$ вектор-функции, реализуемые на выходах a_1, \dots, a_q схем $S(A, C, \tilde{x}_{n+w})$ и $S(A, B, \tilde{x}_n)$ соответственно. Через $S_b(A, C, \tilde{x}_{n+w})$ обозначим вектор-функцию, реализуемую на выходах b_1, \dots, b_p схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+w})$.

Объясним, что понимается под допустимыми неисправностями в схеме $S(A, C, \tilde{x}_{n+w})$. Пусть β — произвольный элемент схемы C с t входами и одним выходом, а v_1, \dots, v_t — входные полюсы элемента β , на которые могут поступать сигналы 0 и 1. Считаем v_1, \dots, v_t булевыми переменными. В схеме C на выходе элемента β реализуется булева функция $\beta(v_1, \dots, v_t)$, а при появлении в C допустимых неисправностей элемент β может превратиться в элемент β^* , реализующий произвольную булеву функцию $\beta^*(v_1, \dots, v_t)$ от переменных v_1, \dots, v_t . Предполагаем, что в C одновременно могут быть неисправными не более m элементов.

Полагаем, что в подсхеме A схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+w})$ могут появляться произвольные неисправности, при которых схема A превращается в схему A^* , которая имеет те же входные и выходные полюсы, что и схема A , и при этом вся схема остается схемой из функциональных элементов. Описанные неисправности схем A и C будем называть *допустимыми*.

При преобразовании схемы B в схему C каждый элемент β из B заменяется на k одинаковых подсхем, которые будем называть *дублями элемента β* (подробнее дубли элементов будут описаны в § 4 (п. 4.3)).

В схеме C множество всех элементов разбивается на два подмножества: множество главных и множество вспомогательных элементов. *Главными элементами* являются все копии элементов из B и элементы, тесно примыкающие в схеме к ним. Остальные элементы схемы C считаются *вспомогательными элементами*. (Точные определения главных и вспомогательных элементов будут приведены в § 5.)

Введем следующие обозначения:

A^* и C^* — схемы, в которые превращаются схемы A и C при появлении в них допустимых неисправностей;

$S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+w})$ — схема, в которую переходит схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+w})$, когда ее подсхемы A и C превращаются в схемы A^* и C^* ;

h и t — число входов и число элементов в подсхеме B ;

k — число дублей в C для каждого элемента из B ;

$r = \max r(i)$, где $r(i)$ — число входов базисного элемента φ_i , а максимум берется по всем элементам базиса;

если D — произвольная схема, то $L(D)$ — ее сложность, т. е. число элементов в D ;

m — произвольное натуральное число;

\log — логарифм по основанию 2.

Теорема. Пусть $S(A, B, \tilde{x}_n)$ — схема из функциональных элементов в конечном базисе, реализующая систему булевых функций от переменных x_1, \dots, x_n . Тогда существуют множество \mathcal{P} ($\mathcal{P} \subset \{0, 1\}^{n+w}$, $w = m(\lceil \log t \rceil + \lceil \log k \rceil) + 3$) мощности $2^{t+2} + 4$ и такая схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+w})$, что справедливы следующие утверждения:

(a) $L(C) < c(mt \log k + kt + hm)$, где c — константа, зависящая лишь от базиса.

(b) $S_a(A, B, \tilde{x}_n) \equiv S_a(A, C, \tilde{x}_n, \underbrace{0, \dots, 0}_w)$.

(c) Если $S_b(A^*, C^*, \tilde{\alpha}_{n+w}) = S_b(A, C, \tilde{\alpha}_{n+w})$ при фиксированных схемах A^*, C^* и каждом $\tilde{\alpha}_{n+w} \in \mathcal{P}$, то $S_a(A', B, \tilde{x}_n) \equiv S_a(A', C^*, \tilde{x}_n, \underbrace{0, \dots, 0}_w)$. Здесь и ниже (в d.2) A' — произвольная схема, в которую может превратиться схема A при появлении в ней допустимых неисправностей.

(d) Множество неисправностей схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+w})$ можно разбить на два класса так, что

d.1. Если при некотором $\tilde{\alpha}_{n+w} \in \mathcal{P}$ справедливо неравенство $S_b(A^*, C^*, \tilde{\alpha}_{n+w}) \neq S_b(A, C, \tilde{\alpha}_{n+w})$, то в C^* есть неисправные элементы, причем если на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+w})$ последовательно подать наборы из \mathcal{P} , то по значениям, появившимся на выходах этой схемы, можно выяснить, к какому из двух классов принадлежат появившиеся в схеме неисправности.

d.2. Если в схеме $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+w})$ возникли неисправности первого класса, то, последовательно подав наборы из \mathcal{P} на входы этой схемы, по появившимся значениям на выходах схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+w})$ можно указать набор (e_1, \dots, e_w) из нулей и единиц такой, что $S_a(A', C^*, \tilde{x}_n, e_1, \dots, e_w) \equiv S_a(A', B, \tilde{x}_n)$.

d.3. Если в $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+w})$ возникли неисправности второго класса, то выполняется по крайней мере одно из условий:

(i) в C^* есть неисправные вспомогательные элементы;

(ii) в C^* неисправны все k дублей некоторого элемента из B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы конструктивно: указывается последовательность преобразований, которые превращают схему $S(A, B, \tilde{x}_n)$ в схему $S(A, C, \tilde{x}_{n+w})$, обладающую свойствами, указанными в формулировке теоремы. Предложен алгоритм для выяснения того, к какому из двух классов принадлежат возникшие в $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+w})$ неисправности.

Преобразования начинаются с дублирования некоторых элементов в подсхеме B : один элемент заменяется несколькими его копиями. Одновременно к схеме добавляются дополнительные входы и несколько экземпляров специальной подсхемы-коммутатора Ω . Далее к полученной схеме добавляется специальная схема Δ , выходы которой подключаются к входам схем Ω . Схема Δ управляет работой схем Ω так, что из нескольких дублей элемента можно выбрать исправный и «включить» его в активную работу схемы, «отключив» при этом другие дубли элемента. Работой самой схемы Δ можно управлять, пользуясь входными сигналами, подаваемыми на ее входы с внешних полюсов всей схемы.

После указанных преобразований схема B обозначается через B' . Далее на линиях между внутренними полюсами в схеме B' добавляются по два экземпляра специальной подсхемы K , также играющей роль коммутатора, работающего в двух режимах. При работе в первом режиме коммутаторы проводят без изменения сигналы от некоторых своих входов к выходам. Этот режим работы коммутаторов используется при функционировании схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+w})$, когда на ее основных выходах реализуется система функций, которую должна реализовать схема $S(A, B, \tilde{x}_n)$.

Работая во втором режиме, коммутаторы позволяют передать значения с входных полюсов схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+w})$ на входы некоторых ее элементов. Этот режим работы коммутаторов используется при диагностике неисправностей схемы. Он позволяет добиться слабой зависимости значений друг от друга на выходах элементов схемы, что обеспечивает должный уровень локализации неисправностей в контролируемой схеме.

Переключение режимов работы коммутаторов осуществляется подачей подходящих значений с входов схемы на входы коммутаторов.

Ниже через c_1, c_2, \dots обозначаются константы, зависящие только от базиса.

§ 2. Схемы Ω и Δ

2.1. Схема Ω . Эта схема имеет $k + \lceil \log k \rceil$ входов и один выход. Здесь и далее полагаем $\mu(\sigma_1, \dots, \sigma_j) = 1 + \sum_{i=1}^j \sigma_i 2^{j-i}$. Пусть на входы с номерами $1, \dots, k$ схемы Ω подаются значения переменных z_1, \dots, z_k , а на входы с номерами $k+1, \dots, k + \lceil \log k \rceil$ — значения переменных

$y_1, \dots, y_{\lceil \log k \rceil}$. Тогда на выходе схемы Ω реализуется булева функция

$$\Omega(z_1, \dots, z_k, y_1, \dots, y_{\lceil \log k \rceil}) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log k \rceil})} z_{\mu(\sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log k \rceil})} y_1^{\sigma_1} \dots y_{\lceil \log k \rceil}^{\sigma_{\lceil \log k \rceil}}, \quad (2.1)$$

где дизъюнкция берется по всем наборам $(\sigma_1 \dots \sigma_{\lceil \log k \rceil})$ таким, что $\mu(\sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log k \rceil}) \in \{1, \dots, k\}$. Здесь

$$y^\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если } y = \sigma; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, если $(\sigma_1 \dots \sigma_{\lceil \log k \rceil})$ есть двоичное представление числа $t - 1$, то $\Omega(z_1, \dots, z_k, \sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log k \rceil}) = z_t$.

Функцию, определенную равенством (2.1), можно реализовать схемой сложности не более $c_1 k$ в базисе $\{\wedge, \vee, -\}$. Действительно, согласно [8] систему всех конъюнкций $\{y_1^{\sigma_1} \dots y_{\lceil \log k \rceil}^{\sigma_{\lceil \log k \rceil}}\}$ можно реализовать схемой (многополюсником) сложности $2^{\lceil \log k \rceil} + \lceil \log k \rceil - 4$. Взяв этот многополюсник, k элементов \wedge и k элементов \vee , следуя (2.1), получаем схему Ω , реализующую функцию $\Omega(z_1, \dots, z_k, y_1, \dots, y_{\lceil \log k \rceil})$ такую, что $L(\Omega) \leq c_2 k$. Отсюда следует, что в произвольном базисе можно построить такую схему Ω , что

$$L(\Omega) \leq c_3 k. \quad (2.2)$$

2.2. Схема Δ . Для произвольного булева вектора $(\sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log t \rceil})$ такого, что $\mu(\sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log t \rceil}) \leq t$, и любого числа j из $\{1, \dots, \lceil \log k \rceil\}$ определим булеву функцию

$$g_{\mu(\sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log t \rceil}), j} = \bigvee_{i=1}^m y_{i,j} z_{i,1}^{\sigma_1} z_{i,2}^{\sigma_2} \dots z_{i,\lceil \log t \rceil}^{\sigma_{\lceil \log t \rceil}}. \quad (2.3)$$

Изменяя значения параметров j и $\sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log t \rceil}$, получим $t \lceil \log k \rceil$ булевых функций $g_{d,j}$, $1 \leq d \leq t$; $1 \leq j \leq \lceil \log k \rceil$, зависящих от $m(\lceil \log t \rceil + \lceil \log k \rceil)$ переменных.

Схема Δ реализует систему этих функций. Эта схема имеет $m(\lceil \log t \rceil + \lceil \log k \rceil)$ входов и $t \lceil \log k \rceil$ выходов.

Сложность схемы Δ . Пусть схема $U(i)$, $1 \leq i \leq m$, реализует систему всех конъюнкций вида $z_{i,1}^{\sigma_1} \dots z_{i,\lceil \log t \rceil}^{\sigma_{\lceil \log t \rceil}}$, где булевы наборы $(\sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log t \rceil})$ принимают все возможные значения. Согласно [8] для построения схемы $U(i)$ в базисе $\{\wedge, \vee, -\}$ достаточно иметь $2^{\lceil \log t \rceil + 1} + \lceil \log t \rceil - 4$ элементов. Для построения всех m схем $U(i)$, $1 \leq i \leq m$ понадобится не более $m(2^{\lceil \log t \rceil + 1} + \lceil \log t \rceil - 4)$ элементов. Если уже построены все схемы $U(i)$, то согласно формуле (2.3) для реализации одной функции $g_{\mu(\sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log t \rceil}), j}$ достаточно использовать еще m элементов \wedge и $m - 1$ элементов \vee . Таким образом, для построения схемы Δ достаточно иметь

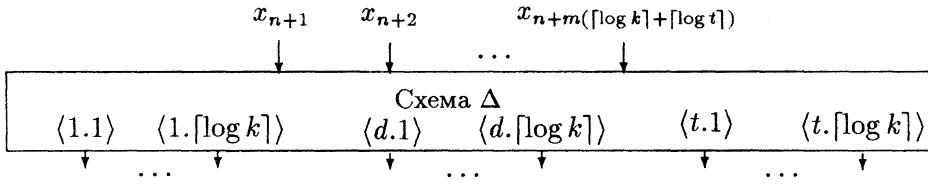


Рис. 2

$m(2^{\lceil \log t \rceil + 1} + \lceil \log t \rceil + 4) + 2mt\lceil \log k \rceil$ элементов базиса $\{\wedge, \vee, -\}$. Следовательно, для произвольного базиса имеем

$$L(\Delta) \leq c_4 mt \log k. \quad (2.4)$$

Заменим переменные $y_{i,j}$ и $z_{s,l}$ на $x_{n+1}, \dots, x_{n+m(\lceil \log t \rceil + \lceil \log k \rceil)}$:

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= x_{n+1}, & \dots, & & y_{1,\lceil \log k \rceil} &= x_{n+\lceil \log k \rceil}, \dots \\ y_{m,1} &= x_{n+(m-1)\lceil \log k \rceil + 1}, & \dots, & & y_{m,\lceil \log k \rceil} &= x_{n+m\lceil \log k \rceil}; \dots \\ z_{1,1} &= x_{n+m\lceil \log k \rceil + 1}, & \dots, & & z_{1,\lceil \log t \rceil} &= x_{n+m\lceil \log k \rceil + \lceil \log t \rceil}, \dots \\ z_{m,1} &= x_{n+m\lceil \log k \rceil + (m-1)\lceil \log t \rceil + 1}, \dots, & & & z_{m,\lceil \log t \rceil} &= x_{n+m(\lceil \log k \rceil + \lceil \log t \rceil)}. \end{aligned}$$

Будем считать, что выходам схемы Δ присвоены δ -метки — двух-разрядные векторы $\langle d.j \rangle$, $1 \leq d \leq t$ и $1 \leq j \leq \lceil \log k \rceil$. В схеме Δ на выходе с δ -меткой $\langle d.j \rangle$, где $1 \leq d \leq t$ и $1 \leq j \leq \lceil \log k \rceil$, реализуется функция $g_{d,j}$, определенная формулой (2.3). Внешние полюсы схемы Δ приведены на рис. 2.

2.3. Особое свойство схемы Δ . Если на входы схемы Δ подается набор $\tilde{e} = (e_1, \dots, e_t)$, то на выходах этой схемы реализуется $t\lceil \log k \rceil$ -компонентный вектор $(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{t,\lceil \log k \rceil})$, причем $a_{i,j}$ реализуется на выходе с δ -меткой $\langle i.j \rangle$. Разобьем этот вектор на подвекторы $\tilde{\Delta}(\tilde{e}, i)$, $1 \leq i \leq t$, каждый из которых состоит из $\lceil \log k \rceil$ компонент так, что

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(\tilde{e}, 1) &= (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,\lceil \log k \rceil}), \\ \tilde{\Delta}(\tilde{e}, 2) &= (a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,\lceil \log k \rceil}), \\ &\dots \dots \dots \\ \tilde{\Delta}(\tilde{e}, t) &= (a_{t,1}, a_{t,2}, \dots, a_{t,\lceil \log k \rceil}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Обозначим через $\{\mathcal{D}_i \mid 1 \leq i \leq u\}$ множество всех неупорядоченных выборок по $1, 2, \dots, t$ элементов из множества α -меток $\{ \langle d.j \rangle \mid 1 \leq d \leq t, 1 \leq j \leq k \}$. Здесь $u = \sum_{i=1}^m \binom{kt}{i}$. Пусть s — произвольное число из $\{1, \dots, t\}$. \mathcal{D}_s называется *хорошей выборкой*, если при любом d , $1 \leq d \leq t$, в \mathcal{D}_s содержится не более $k-1$ меток с первыми компонентами, равными d .

Лемма 1. Если \mathcal{D}_s — хорошая выборка, то существует вектор $\tilde{e} = (e_1, \dots, e_t)$ такой, что если на входы схемы Δ подать $\tilde{e} = (e_1, \dots, e_t)$, то на ее выходе получится набор слов $\tilde{\Delta}(\tilde{e}, 1), \dots, \tilde{\Delta}(\tilde{e}, t)$, обладающий свойством: если $d \in \{1, \dots, t\}$, $p \in \{1, \dots, k\}$ и α -метка (d, p) принадлежит \mathcal{D}_s , то $\mu(\tilde{\Delta}(\tilde{e}, d)) \neq p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть \mathcal{D}_s — хорошая выборка. Обозначим через $\{d_1, d_2, \dots, d_v\}$ множество первых компонент всех меток из \mathcal{D}_s . Если $v < t$, то множество $\{d_1, d_2, \dots, d_v\}$ дополним такими числами d_{v+1}, \dots, d_m из $\{1, \dots, t\}$, чтобы полученное множество $\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ состояло из m чисел. Пусть $(\delta_1(i), \dots, \delta_{\lceil \log k \rceil}(i))$ — булев вектор такой, что $\mu(\delta_1(i), \dots, \delta_{\lceil \log k \rceil}(i)) \notin \{j | (d_i, j) \in \mathcal{D}_s\}$ и $\mu(\delta_1(i), \dots, \delta_{\lceil \log k \rceil}(i)) < k$. Вектор $(\delta_1(i), \dots, \delta_{\lceil \log k \rceil}(i))$ с этими свойствами существует, так как в любой хорошей выборке содержится не более $k - 1$ меток с одинаковыми первыми компонентами. Пусть $(\gamma_1(i), \dots, \gamma_{\lceil \log t \rceil}(i))$ — такой булев вектор, что $\mu(\gamma_1(i), \dots, \gamma_{\lceil \log t \rceil}(i)) = d_i$. В формуле (2.3) полагаем $z_{i,q} = \gamma_q(i)$ при $1 \leq q \leq \lceil \log t \rceil$ и $y_{i,j} = \delta_j(i)$ при $1 \leq j \leq \lceil \log k \rceil$. Нетрудно видеть, что при таких значениях аргументов имеем $g_{d,j} = 0$ при $d \in \{1, \dots, t\} \setminus \{d_1, \dots, d_m\}$ и $g_{d_i,j} = \delta_j(i)$ при $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, \lceil \log k \rceil$.

Определим вектор $\tilde{e} = (e_1, \dots, e_{m(\lceil \log k \rceil + \lceil \log t \rceil)})$ следующим образом:

$$e_s = \begin{cases} \delta_s(1), & \text{если } s \leq \lceil \log k \rceil; \\ \delta_s(2), & \text{если } (\lceil \log k \rceil < s \leq 2\lceil \log k \rceil); \\ \dots & \dots \\ \delta_s(m), & \text{если } (m-1)\lceil \log k \rceil < s \leq m\lceil \log k \rceil; \\ \gamma_s(1), & \text{если } m\lceil \log k \rceil < s \leq m\lceil \log k \rceil + \lceil \log t \rceil; \\ \gamma_s(2), & \text{если } m\lceil \log k \rceil + \lceil \log t \rceil < s \leq m\lceil \log k \rceil + 2\lceil \log t \rceil; \\ \dots & \dots \\ \gamma_s(m), & \text{если } m\lceil \log k \rceil + (m-1)\lceil \log t \rceil < s \leq m(\lceil \log k \rceil + \lceil \log t \rceil). \end{cases}$$

Из сказанного следует: при любых $d \in \{1, \dots, t\}$ и $p \in \{1, \dots, k\}$ если $(d, p) \in \mathcal{D}_s$, то $\mu(\tilde{\Delta}(\tilde{e}, d)) \neq p$. Лемма доказана.

§ 3. k -Преобразование схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$

При k -преобразовании схема $S(A, B, \tilde{x}_n)$ превращается в схему $S(A, B', \tilde{x}_{n+t})$, т. е. подсхема A не изменяется, а подсхема B преобразуется в подсхему B' . Последняя состоит из базисных функциональных элементов, а также схем Ω и Δ .

3.1. β -шаги при k -преобразовании. Пусть схема $S(A, B, \tilde{x}_n)$ состоит из N элементов. Занумеруем их числами $1, \dots, N$ так, чтобы числами $1, 2, \dots, t$ оказались занумерованными элементы из B .

Ярусы в $S(A, B, \tilde{x}_n)$. Это понятие определим индуктивно. К первому ярусу отнесем элементы схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$, входы которых присоединены только к входным полюсам.

Пусть в $S(A, B, \tilde{x}_n)$ определены i первых ярусов. Каждый элемент схемы, который не попал ни в один из i первых ярусов, а все входы которого присоединены к выходам элементов из ярусов с номерами $1, \dots, i$ или к входным полюсам, относится к $(i+1)$ -му ярусу. Процесс образования ярусов продолжается до включения каждого элемента из $S(A, B, \tilde{x}_n)$ в соответствующий ярус.

Схема $S(A, B', \tilde{x}_{n+1})$ строится последовательно. Сначала строится описанная выше схема Δ . Дальнейшие процедуры разбиваются на этапы, выполняемые последовательно друг за другом. Эти этапы будем называть шагами.

Каждый шаг состоит в следующем. Выбрав элемент β в B , из базисных элементов и схем Ω мы образуем некоторый фрагмент схемы и присоединяем его к ранее построенной части схемы. Состав добавляемого к схеме фрагмента и способ его присоединения к ранее построенной части определяется тем, какую функцию реализует β , и тем, как этот элемент присоединен к элементам в $S(A, B, \tilde{x}_n)$. Шаг построения фрагмента схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$, начинающийся выбором элемента β , называется β -шагом. В схеме $S(A, B', \tilde{x}_{n+1})$ всем элементам присваиваются α -метки, являющиеся двухрядными векторами.

Опишем β -шаги. Пусть β — элемент первого яруса в $S(A, B, \tilde{x}_n)$ и j — номер этого элемента. Рассмотрим два случая.

Случай 1. β принадлежит подсхеме A . Возьмем копию элемента β . Выбранной копии присвоим α -метку $(j,*)$. Если i -й вход элемента β в $S(A, B, \tilde{x}_n)$ присоединен к полюсу x_s , то i -й вход копии присоединяется к полюсу x_s . (Здесь и далее внешний полюс схемы обозначается так же, как и переменная, значение которой подается на этот полюс.)

Случай 2. β является элементом из B . Возьмем k копий элемента β и присвоим им α -метки $(j,1), (j,2), \dots, (j,k)$. Входы каждой копии присоединим к входным полюсам новой схемы так же, как присоединены в $S(A, B, \tilde{x}_n)$ соответствующие входы элемента β .

Сделав соответствующие β -шаги для всех элементов первого яруса, получим часть схемы $S(A, B', \tilde{x}_{n+1})$. Далее делаем β -шаги, выбирая β во втором, затем в третьем ярусах, и т. д. Предположим, что сделаны β -шаги для всех β из i первых ярусов схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$. Пусть β — элемент из $(i+1)$ -го яруса схемы и j — номер элемента β . Опишем β -шаг для такого β . Будем различать два случая.

Случай 1. β находится в подсхеме A . Возьмем копию элемента β , присвоим ей α -метку $(j,*)$ и входы этой копии присоединим к уже

построенной части схемы следующим образом.

- Если вход с номером l элемента β присоединен к полюсу x_s , то l -й вход элемента с α -меткой $(j.*)$ присоединяется к полюсу x_s .
- Если l -й вход элемента β присоединен к выходу элемента γ с номером s , то в строящейся схеме l -й вход элемента с α -меткой $(j.*)$ присоединяется к выходу элемента с α -меткой $(s.*)$.

Описанную процедуру повторим для каждого входа рассматриваемой копии элемента β .

На рис. 3 сверху приведен пример преобразования, соответствующего β -шагу для рассмотренного случая. Слева размещен фрагмент схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$. В нем трехвходовый элемент β имеет номер d , его первый и третий входы присоединены в $S(A, B, \tilde{x}_n)$ к элементам из B с номерами a и c , а второй вход — к элементу из A с номером b . Справа размещен соответствующий фрагмент схемы $S(A, B', \tilde{x}_{n+1})$. Элемент с α -меткой $(d.*)$ является копией элемента с номером d .

Случай 2. β является элементом из B . Возьмем k копий элемента β , присвоим им α -метки $(j.1), (j.2), \dots, (j.k)$. Входы копий присоединим к элементам схемы следующим образом.

- Если l -й вход элемента β присоединен в $S(A, B, \tilde{x}_n)$ к полюсу x_s , то l -й вход каждой копии присоединяется в $S(A, B', \tilde{x}_{n+1})$ к полюсу x_s .
- Если l -й вход элемента β присоединен в $S(A, B, \tilde{x}_n)$ к элементу с номером s , то l -й вход каждой копии присоединяется к выходу элемента с α -меткой $(s.*)$.

Описанные процедуры повторяются для всех входов каждой копии элемента β . Затем берется экземпляр схемы Ω и ему присваивается α -метка $(j.*)$. Вход с номером l схемы Ω подключим следующим образом. Если $1 \leq l \leq k$, то l -й вход подключается к выходу элемента с α -меткой $(j.l)$. Если $l = k + s$, $1 \leq s \leq \lfloor \log k \rfloor$, то рассматриваемый вход подключается к выходу с δ -меткой $\langle j.s \rangle$ схемы Δ .

На этом описываемый β -шаг завершается.

На рис. 3 снизу приведен пример преобразования, которое соответствует β -шагу для случая, когда β является элементом из B .

k -преобразование схемы считается законченным, когда будут сделаны β -шаги для всех элементов β , выбираемых в схеме B . Полученная схема обозначается через $S(A, B', \tilde{x}_{n+1})$.

3.2. Сложность схемы B' . Пусть $L(B) = c_5 t$ — сложность схемы B . Схема B' содержит из t схем Ω и k копий каждого элемента из B . Кроме того, в B' содержится схема Δ . Отсюда и из (2.2) и (2.4) следует, что

$$L(B') \leq c_6 k t + c_4 m t \log k. \quad (3.1)$$

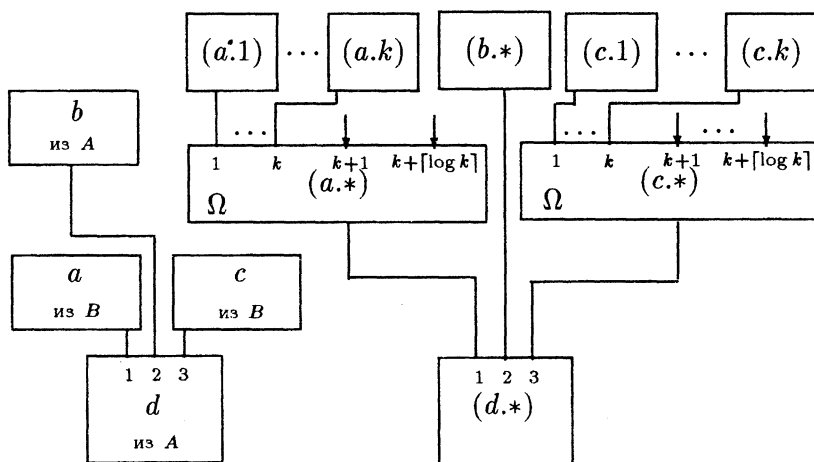
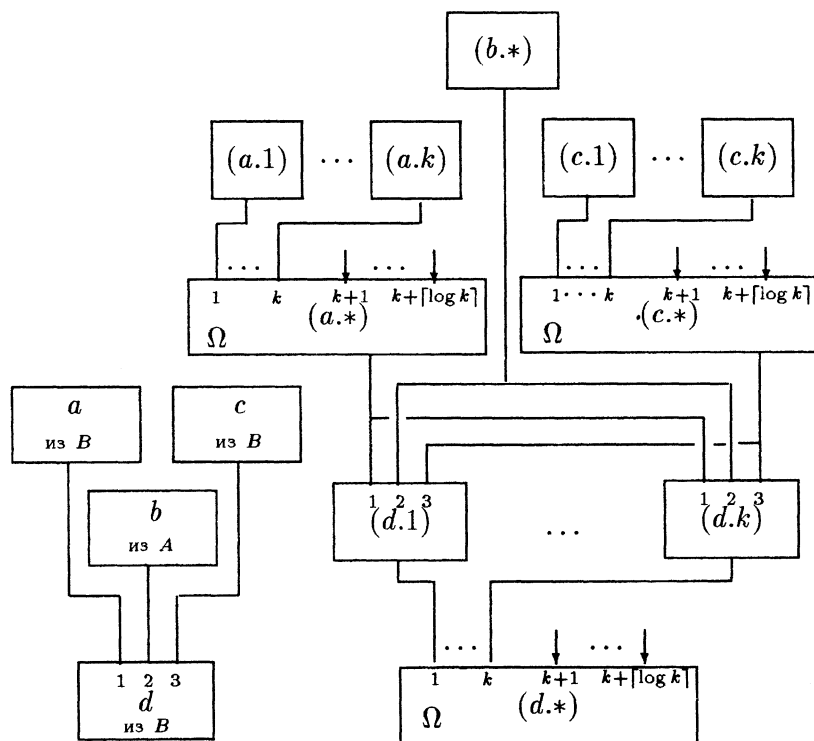
Фрагмент из $S(A, B, \tilde{x}_n)$ Фрагмент из $S(A, B', \tilde{x}_{n+l})$ Фрагмент из $S(A, B, \tilde{x}_n)$ Фрагмент из $S(A, B', \tilde{x}_{n+l})$

Рис. 3

§ 4. Схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$

Эта схема получается двумя последовательными преобразованиями схемы $S(A, B', \tilde{x}_{n+l})$. Входы и выходы схемы B' принадлежат множествам входов и выходов схемы C .

4.1. Первое преобразование. Опишем подсхемы Q и D схемы R (рис. 4).

СХЕМА Q . Если на первый, второй и третий входы схемы Q подаются значения k, v и w , то на ее выходе реализуется функция $\bar{k}v \vee kw$.

СХЕМА D . Эта схема осуществляет отображение $(a_1, \dots, a_{2m+1}) \rightarrow b(a_1, \dots, a_{2m+1})$, где

$$b(a_1, \dots, a_{2m+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^{2m+1} a_i > m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

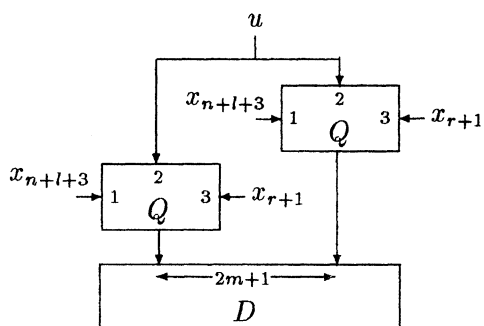


Рис. 4. Схема R

Ясно, что если схема D исправна, а в R содержится не более m неисправных схем Q , то R — самокорректирующаяся схема.

Функция $b(a_1, \dots, a_{2m+1})$ является симметрической булевой функцией от $2m+1$ переменных. Известно ([8], с. 369), что ее можно реализовать схемой в базисе $\{\wedge, \vee, \neg\}$, содержащей не более $c_7 m$ элементов. Отсюда в произвольном базисе имеем

$$L(R) \leq c_8 m. \quad (4.1)$$

Пусть w_{i_1}, \dots, w_{i_s} — полюсы схемы A , не являющиеся входными полюсами схемы $S(A, B', \tilde{x}_{n+l})$, и пусть к полюсам w_{i_1}, \dots, w_{i_s} схемы $S(A, B', \tilde{x}_{n+l})$ подключены входные полюсы схемы B' . Выполним следующие преобразования. Вход схемы B' , подключенный к полюсу w_{i_1} , переключим на выход схемы R , а к полюсу w_{i_1} подключим вход схемы R . Аналогичные переключения выполним для полюсов w_{i_2}, \dots, w_{i_s} , используя каждый раз новый экземпляр схемы R . В результате между полюсами w_{i_1}, \dots, w_{i_s} и входными полюсами схемы B' появятся s одинаковых схем R .

Метки в D . Всем базисным элементам из D присвоим одноразрядные α -метки (ψ).

На этом первое преобразование схемы $S(A, B', \tilde{x}_{n+1})$ заканчивается. Схему, в которую превратилась схема B' после первого преобразования, обозначим через B_1 .

Сложность схемы B_1 . Эта схема есть соединение схемы B' и h схем R . Отсюда и из (2.4), (3.1) и (4.1) получаем

$$L(B_1) \leq c_6 kt + c_7 hm + c_4 mt \log k. \quad (4.2)$$

4.2. Второе преобразование. Это преобразование схемы (A, B, \tilde{x}_n) связано с добавлением схем K на линиях, соединяющих некоторые пары элементов в подсхеме B_1 . При этом схема B_1 преобразуется в схему C . Некоторые подсхемы схемы C получают γ -метки, являющиеся трехразрядными векторами. Эти операции изображены на рис. 5–8. Пусть φ_i, φ_q — базисные элементы. На рисунках справа приведены фрагменты схемы C , в которые преобразуются соответствующие фрагменты схемы B_1 , показанные слева. При этом для всех фрагментов схемы B_1 , указанных в левых частях рис. 5–8, и в схемах, полученных из B_1 такими преобразованиями, проводятся аналогичные преобразования до тех пор, пока в полученной схеме не исчезнут фрагменты, показанные в левых частях рассматриваемых рисунков. Преобразования проводятся только в тех случаях, когда базисные элементы φ_i и φ_q , изображенные слева, находятся вне схем Q и K .

Схема K . Эта схема имеет три входа и один выход. Если на ее входы с номерами 1, 2, 3 подаются значения x, y, z , то на выходе схемы K реализуется функция $\bar{x}y \vee xz$.

Обозначим через C схему, полученную из B_1 указанными преобразованиями. Элементы схемы C , находящиеся вне схем K и Q , будем называть *выделенными*. Всем схемам Q, K и выделенным элементам ставятся в соответствие γ -метки (трехразрядные векторы) по следующему правилу (см. рис. 5–8).

- Схемы Q получают γ -метки $(Q, *, r+1)$.
- Выделенные элементы φ_i получают γ -метки $(\varphi_i, K, *)$, $i = 1, \dots, g$.
- Схема K получает γ -метку

(K, Q, i) , если ее вход подключен к выходу схемы Q , а выход — к i -му входу выделенного элемента;

$(K, \varphi_i, r+1)$, если ее вход подключен к выходу базисного элемента φ_i , $i = 1, \dots, g$;

$(K, i, r+1)$, если ее вход подключен к полюсу x_i , $i \neq r+1$;

$(K, r+1, j)$, если ее вход подключен к полюсу x_{r+1} , а выход — к j -му входу выделенного элемента;

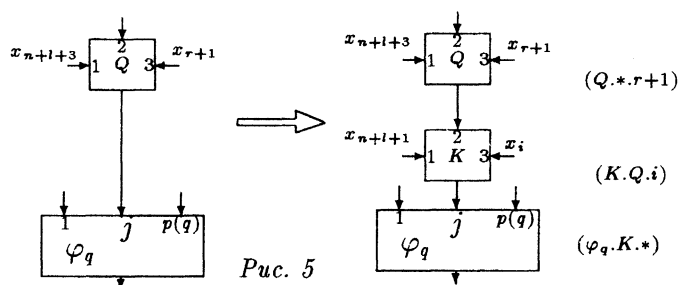


Рис. 5

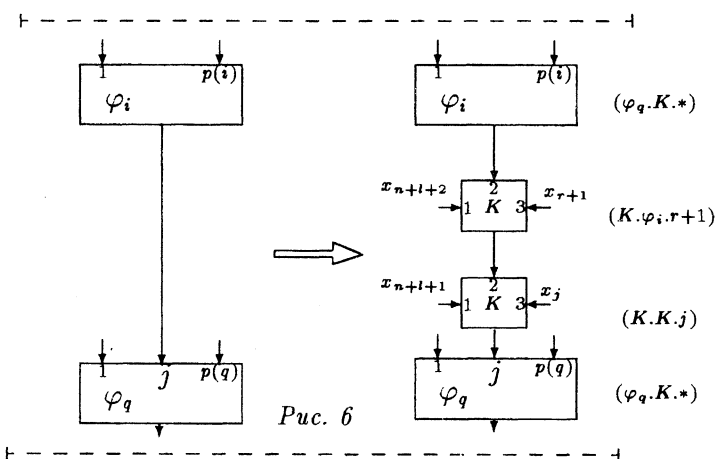


Рис. 6

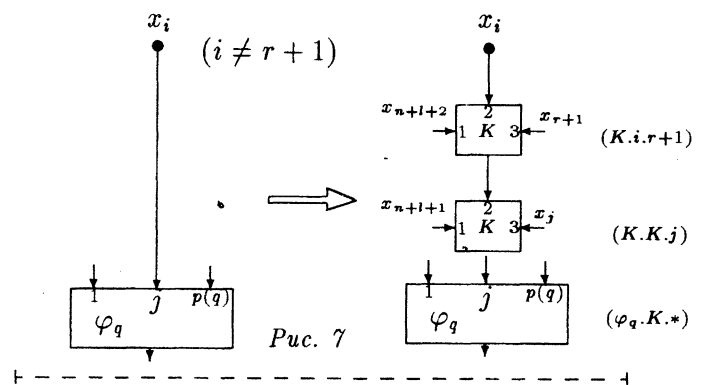


Рис. 7

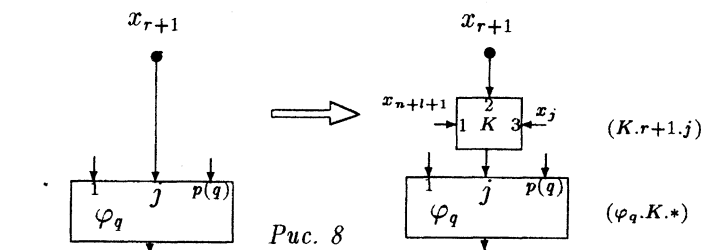


Рис. 8

(K, K, j) , если ее вход подключен к полюсу с γ -меткой $(K, i, r+1)$ или к полюсу с γ -меткой $(K, \varphi_i, r+1)$, а выход — к j -му входу выделенного элемента.

Блоки в C . Будем считать *блоками схемы C* все ее части, отмеченные γ -метками. Таким образом, блоками в C являются все схемы Q и K , а также отдельные функциональные элементы.

Выходные полюсы схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$. Будем считать, что выход каждого блока в C является одновременно и выходом схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$.

Сложность схемы C . Поскольку C получается из B_1 добавлением не более $2rt$ схем K сложности 4 (в базисе $\{\wedge, \vee, \neg\}$), то

$$L(C) < c_6 kt + c_7 hm + c_4 mt \log k + c_8 rt. \quad (4.3)$$

4.3. Гирлянды, подсхемы, дубли и метки элементов в C .

Гирлянды в C . Пусть к j -му входу элемента β в подсхеме C присоединен выход схемы K , а к входу последней присоединен выход еще одной схемы K . Такая пара схем K называется *гирляндой*, подвешенной к j -му входу элемента β .

Если к j -му входу элемента β присоединен выход схемы K , а к входу последней присоединен элемент, не являющийся схемой K , то упомянутая схема K тоже называется гирляндой, подвешенной к j -му входу элемента β .

На рис. 5–8 изображены гирлянды из одной и двух схем K . Вход с номером 2 верхней схемы K (рис. 6), называется *выходом гирлянды*. Для гирлянды, состоящей из одной схемы K , входом называется второй вход этой схемы K .

α -метки в C . Будем считать, что все элементы схемы C , находящиеся вне схем Q и K , получают те же α -метки, которыми были отмечены соответствующие элементы в схеме B' . Некоторым схемам K присваиваются α -метки. Если вход схемы K подключен к выходу элемента с α -меткой (a, j) , $a \in \{1, \dots, t\}$, $j \in \{1, \dots, k\}$, то эта схема K получает α -метку (a, j, K) . Схеме K , вход которой присоединен к выходу элемента с α -меткой (a, j, K) , присваивается α -метка (a, j, K, K) .

Схемы \hat{R} . Пусть R' — одна из схем R в B' . Обозначим через \hat{R}' подсхему в C , состоящую из элементов схемы R' с α -метками (ψ) , и из схем K , входящих в гирлянды, подвешенные к входам элементов из R' с α -метками (ψ) .

Пусть u — выходной полюс схемы A , к которому присоединены входы подсхем Q из \hat{R} . Тогда полюс u называется входом схемы \hat{R} .

СХЕМЫ $\hat{\Omega}$. Пусть Ω' — схема Ω с α -меткой $(d.*)$ в B' . Обозначим через $\hat{\Omega}'$ подсхему в C , состоящую из базисных элементов схемы Ω' с α -метками (ω) и из схем K , входящих в гирлянды, подвешенные к входам элементов из Ω' с α -метками (ω) . В схеме $\hat{\Omega}'$ содержится ровно $k + \lceil \log k \rceil$ гирлянд, входы которых присоединены к элементам с двухразрядными α -метками или к полюсам x_{n+1}, \dots, x_{n+l} . Входы этих гирлянд будем считать входами рассматриваемой схемы $\hat{\Omega}'$. Таким образом, схема $\hat{\Omega}'$ имеет $k + \lceil \log k \rceil$ входов. Схеме $\hat{\Omega}'$ присваивается α -метка $(d.*)$, т. е. такая же α -метка, которой помечена схема Ω' в B' .

Обозначим через $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$ схему, в которую превращается схема $S(A, B, \tilde{x}_n)$ в результате описанных преобразований. На рис. 1 справа показано соединение подсхем A и C в схеме $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$ ($w = l + 3$).

Дубли в C для элемента β из B . Пусть элемент β из B в схеме $S(A, B, \tilde{x}_n)$ имеет номер d . Подсхему в C , образованную тройкой элементов с α -метками $(d.j), (d.j.K), (d.j.K.K)$, назовем *дублем элемента β* . Отметим, что в соответствии с этим определением в C содержится k дублей каждого элемента β .

§ 5. Свойства схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$

5.1. Типы элементов в C . Два класса неисправностей в схеме. Класс допустимых неисправностей в схеме $S(A, C, \tilde{x}_{n+w})$ определен в § 1. Полагая $w = l + 3$, получим, что допустимые неисправности для $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$ определены.

Обозначим через A^* и C^* произвольные схемы, в которые могут превратиться схемы A и C при появлении в них допустимых неисправностей. Тогда $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ — схема с подсхемами A^* и C^* .

Пусть u — точка схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$, к которой присоединен вход какого-либо элемента из B , причем u является либо входным полюсом в $S(A, B, \tilde{x}_n)$, либо выходом некоторого элемента подсхемы A . Тогда u есть *входной полюс подсхемы B* . Если к выходу v некоторого элемента β из подсхемы B присоединен либо выходной полюс схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$, либо вход какого-либо элемента из A , то v есть *выходной полюс подсхемы B* . Обозначим через u_1, \dots, u_h и v_1, \dots, v_g входные и выходные полюсы подсхемы B схемы $S(A, B, \tilde{x}_n)$. Условимся так же обозначать соответствующие полюсы в схеме $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$. Кроме входных полюсов u_1, \dots, u_h в схеме C есть еще входные полюсы $x_{n+1}, \dots, x_{n+l+3}$.

ДВА ТИПА ЭЛЕМЕНТОВ В C . Элемент из C называется *главным элементом*, если он имеет α -метку вида $(a.j)$ или $(a.j.K)$ (здесь a и j — любые числа из множеств $\{1, \dots, t\}$ и $\{1, \dots, \lceil \log k \rceil\}$ соответственно).

	\mathcal{P}_1	\mathcal{P}_2	\mathcal{P}_3
x_1	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$
x_2	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	x_1
\dots	\dots	\dots	\dots
x_r	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	x_1
x_{r+1}	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$
x_{r+2}	x_1	x_1	x_1
\dots	\dots	\dots	\dots
x_{n+l}	x_1	x_1	x_1
x_{n+l+1}	1	0	1
x_{n+l+2}	0	1	1
x_{n+l+3}	1	1	1

Элемент схемы C называется *вспомогательным элементом*, если он не является главным элементом и при этом не входит в состав какой-либо схемы Q или K .

Вспомогательный элемент схемы C , отличный от схемы Q и элементов с α -метками $(d.j.K.K)$, где $d = 1, \dots, t$; $j = 1, \dots, k$, называется *внутренним вспомогательным элементом*.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится таблица, определяющая три множества $(n + l + 3)$ -мерных булевых векторов. Эти множества обозначаются через \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 , \mathcal{P}_3 .

В таблице определено множество \mathcal{P} , элементами которого являются векторы \tilde{x} из $\{0, 1\}^{n+l+3}$. Первый столбец задает множество \mathcal{P}_1 векторов x_1, \dots, x_{n+l+3} из $\{0, 1\}^{n+l+3}$ таких, что

- x_{r+2}, \dots, x_{n+l} равны значению x_1 ;
- x_{n+l+1} и x_{n+l+3} равны единице;
- $x_{n+l+2} = 0$;
- x_1, \dots, x_{r+1} принимают произвольные значения.

Аналогично определяются множества \mathcal{P}_2 и \mathcal{P}_3 . Множества \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 содержат по 2^{r+1} векторов, а множество \mathcal{P}_3 — четыре вектора. В таблице определено множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$, состоящее из $4 + 2^{r+2}$ векторов.

Допустим, что \mathcal{J} — некоторое множество из векторов из $\{0, 1\}^{n+l+3}$. Схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ называется \mathcal{J} -нормальной относительно блока β из C^* , если в схемах $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$ и $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ на выходе β реализуются функции, которые не различаются на множестве \mathcal{J} .

Классы неисправностей в C^* . Обозначим через $\mathcal{C}^*(1)$ множество, образованное всеми α -метками вида $(d.v)$ такими, что если $(d.v) \in \mathcal{C}^*(1)$, то среди элементов из C^* с α -метками $(d.v)$, $(d.v.K)$ или $(d.v.K.K)$

есть хотя бы один неисправный элемент. Будем говорить, что неисправности в C^* принадлежат *первому классу неисправностей*, если выполняются следующие условия:

- (с-1) при любом d , $1 \leq d \leq t$, множество $\mathcal{C}^*(1)$ содержит не более $k-1$ меток, в каждой из которых первая компонента равна d ;
- (с-2) в схеме C^* исправны все внутренние вспомогательные элементы;
- (с-3) все элементы с α -метками $(d.j.K.K)$, $1 \leq d \leq t$, $1 \leq j \leq k$, являются \mathcal{P}_1 -нормальными;
- (с-4) все элементы Q являются $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ -нормальными.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Используя понятие дубля элемента, условие (с-1) можно заменить на эквивалентное: в схеме C среди k дублей любого элемента β из B есть хотя бы один исправный.

Будем считать, что допустимые неисправности в схеме C^* , не вошедшие в первый класс, относятся ко *второму классу неисправностей*.

Подсхемы B и C^* схем $S(A^*, B, \tilde{x}_n)$ и $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ будем рассматривать как самостоятельные схемы. Пусть на полюсы u_1, \dots, u_h схем B и C^* подаются произвольные значения, на полюсы $x_{h+l+1}, x_{h+l+2}, x_{h+l+3}$ схемы C^* — нулевые значения, а на полюсы x_{h+1}, \dots, x_{h+l} схемы C^* подаются значения $e_{n+1}, \dots, e_{n+l+3}$ такие, что на выходах с δ -метками $\langle 1.1 \rangle, \langle 1.2 \rangle, \dots, \langle 1. \lfloor \log k \rfloor \rangle, \dots, \langle t.1 \rangle, \langle t.2 \rangle, \dots, \langle t. \lfloor \log k \rfloor \rangle$ исправной схемы Δ возникают соответственно значения $a_{1.1}, a_{1.2}, \dots, a_{1. \lfloor \log k \rfloor}, \dots, a_{t.1}, a_{t.2}, \dots, a_{t. \lfloor \log k \rfloor}$.

Сильный входной набор для схемы C^* . Предположим, что если на входы схемы Δ подается набор $\tilde{e} = (e_{n+1}, \dots, e_{n+l})$, то на ее выходе с δ -меткой $\langle s.j \rangle$, $1 \leq s \leq t$; $1 \leq j \leq \lfloor \log k \rfloor$ реализуется значение $a_{s.j}$. Если $(s. \mu(a_{s.1}, \dots, a_{s. \lfloor \log k \rfloor})) \notin \mathcal{C}^*(1)$ при любом $s \in \{1, \dots, t\}$, то набор $\tilde{e}_{l+3} = (e_{n+1}, \dots, e_{n+l}, 0, 0, 0)$ называется *сильным входным набором для C^** .

Лемма 2. Если неисправности схемы C^* относятся к первому классу, то существует сильный входной набор для C^* .

Эта лемма есть прямое следствие леммы 1.

Лемма 3. Пусть

неисправности в C^* относятся к первому классу;

на полюсы u_1, \dots, u_h и u_1^*, \dots, u_h^* схем B и C^* подается (d_1, \dots, d_h) — произвольный набор из нулей и единиц, а на полюсы $x_{n+1}, \dots, x_{n+l+3}$ схемы C^* подается $(e_{n+1}, \dots, e_{n+l+3})$ — сильный входной набор для C^* .

Тогда значение, реализуемое на выходе схемы $\hat{\Omega}$ из C^* с α -меткой $(s.*)$, $1 \leq s \leq t$, совпадает со значением, реализуемым на выходе элемента δ с номером s из B .

Прежде чем перейти к доказательству леммы, сформулируем три утверждения.

Утверждение 1. Пусть \hat{R} — подсхема в C^* . Тогда в условиях леммы 3 значения на входе и выходе подсхемы \hat{R} совпадают.

В самом деле, в \hat{R} исправны все элементы с α -метками (ψ) и все схемы K из гирлянд, подвешенных к входам элементов с α -метками (ψ) . Так как эти элементы и схемы являются вспомогательными, то они исправны (по условию леммы 3 исправны все внутренние вспомогательные элементы). Поскольку по условию леммы 3 справедливо $x_{n+l+1} = x_{n+l+2} = 0$, то значения второго входа и выхода любой исправной схемы K одинаковы. В таком случае схема \hat{R} является самокорректирующейся. Отсюда следует утверждение 1.

Утверждение 2. В условиях леммы 3 значения на входе и выходе гирлянды, состоящей из схем K без α -меток и подвешенной к входу произвольного элемента δ^* из C^* , одинаковы.

Для гирлянды, состоящей из исправных схем K , справедливость утверждения 2 очевидна. Схемы K без α -меток являются внутренними вспомогательными элементами. По условию леммы 3 они исправны.

Утверждение 3. Пусть $\hat{\Omega}$ — схема с α -меткой $(s,*)$. Если выполнены условия леммы 3, то значение на входе с номером $\mu(\tilde{\Delta}(\tilde{e}, s))$ схемы $\hat{\Omega}$ совпадает со значением на выходе схемы $\hat{\Omega}$.

Справедливость утверждения прямо следует из определений схемы $\hat{\Omega}$ и сильного входного набора для схемы C^* . При этом мы пользуемся утверждением 2 и предположением из леммы 3 об исправности всех внутренних вспомогательных элементов.

Доказательство леммы 3 проведем индукцией по номерам ярусов, на которые разбивается множество элементов подсхемы C^* .

Ярусы в C^* . Предположим, что входы всех гирлянд, подвешенных к входам произвольного элемента β с α -меткой (a, j) , $1 \leq a \leq t$; $1 \leq j \leq k$, присоединены к выходам схем \hat{R}' или к входным полюсам x_1, \dots, x_{n+l} . Тогда элемент β принадлежит первому ярусу. Если элемент с α -меткой (a, j) отнесен к первому ярусу, то к этому же ярусу должны быть отнесены и все элементы с α -метками $(a, 1), (a, 1), \dots, (a, k)$, так как входы этих элементов подключены так же, как и соответствующие входы элемента с α -меткой (a, j) . Вместе с указанными элементами к первому ярусу относится и схема $\hat{\Omega}$ с α -меткой $(a, *)$.

Пусть в C^* определены i первых ярусов. Каждый элемент β , не попавший в i первых ярусов и имеющий α -метку (a, j) , $1 \leq a \leq t$; $1 \leq j \leq k$, или α -метку $(a, *)$, $1 \leq a \leq t$, отнесем к $(i + 1)$ -му ярусу, если

вход гирлянды, подвешенной к любому входу элемента β , присоединен к одному из следующих элементов схемы:

- к выходу схемы \hat{R}' ;
- к одному из входных полюсов x_1, \dots, x_{n+l} ;
- к выходу элемента из предшествующего яруса.

Пусть схема $\hat{\Omega}$ с α -меткой $(s,*)$ находится в первом ярусе схемы C^* . Тогда входы всех гирлянд, подвешенных к входам рассматриваемой схемы $\hat{\Omega}$, присоединены к выходам элементов из C^* с α -метками $(s,1), (s,2), \dots, (s, \lfloor \log k \rfloor)$ или к выходам схемы Δ . Элементы с α -метками $(s,1), (s,2), \dots, (s, \lfloor \log k \rfloor)$ размещены в C^* в первом ярусе. Поэтому входы подвешенных к их входам гирлянд подключены к выходам схем \hat{R} или к входным полюсам $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$.

Из определения сильного входного набора и утверждений 1 и 2 следует, что в условиях леммы 3 в C^* на выходе элемента первого яруса с α -меткой (s, j_s) реализуется то же значение, которое реализуется на выходе элемента с номером s в схеме B . В условиях леммы 3 из того, что схема $\hat{\Omega}$ с α -меткой $(s,*)$ исправна, следует, что схема Δ на своих выходах с δ -метками $\langle s,1 \rangle, \dots, \langle s, \lfloor \log k \rfloor \rangle$ реализует соответственно значения $a_{s,1}, \dots, a_{s, \lfloor \log k \rfloor}$ такие, что $\mu(a_{s,1}, \dots, a_{s, \lfloor \log k \rfloor}) = j_s$. Отсюда следует, что на выходе рассматриваемой схемы $\hat{\Omega}$ реализуется то значение, которое появляется на ее j_s -м входе, т. е. значение, появившееся на выходе элемента в C^* с α -меткой (s, j_s) . Это значение, как отмечено выше, равно значению на выходе элемента с номером s в схеме B . Таким образом, утверждение леммы 3 справедливо для схемы $\hat{\Omega}$ из первого яруса в C^* .

Пусть схема $\hat{\Omega}$ с α -меткой $(s,*)$ находится в $(i+1)$ -м ярусе схемы C^* и $i+1 > 1$. Обозначим эту схему через $\hat{\Omega}'$. Предположим, что для всех схем $\hat{\Omega}$ из C^* , находящихся на предыдущих ярусах, утверждение леммы 3 справедливо. Входы всех гирлянд, подвешенных к входам рассматриваемой схемы $\hat{\Omega}'$, присоединены к выходам, расположенным в $(i+1)$ -м ярусе схемы C^* элементов с α -метками $(s,1), (s,2), \dots, (s, \lfloor \log k \rfloor)$, или к выходам схемы Δ . Входы гирлянд, подвешенных к входам элементов с α -метками $(s,1), (s,2), \dots, (s, \lfloor \log k \rfloor)$, присоединены либо к выходам схем $\hat{\Omega}$, расположенных в ярусах схемы C^* с номерами, не превышающими i , либо к выходам схем \hat{R} .

Обозначим через $\Gamma_v(s, j)$ гирлянду, подвешенную к v -му входу элемента с α -меткой (s, j) из C^* . Пусть вход гирлянды $\Gamma_v(s, j)$ подключен к выходу схемы R , а вход этой схемы R — к входному полюсу u_p^* схемы C^* . Отсюда следует, что v -й вход элемента с номером s схемы B подключен к входному полюсу u_p схемы B . Пользуясь утверждениями 1 и 2, получаем, что на выходе гирлянды $\Gamma_v(s, j)$ реализуется значение d_p (то самое значение, которое подается на входной полюс u_i^*

схемы C^*). По условию леммы 3 то же значение d_p подается и на входной полюс u_p схемы B . Значит, в условиях леммы значение d_p одновременно появляется как на v -м входе элемента с номером s из схемы B , так и на выходе гирлянды $\Gamma_v(s, j)$ схемы C^* .

Пусть вход гирлянды $\Gamma_v(s, j)$ подключен к выходу схемы $\hat{\Omega}''$ с α -меткой $(p, *)$, причем $\hat{\Omega}''$ находится на ярусе с номером, меньшим $i + 1$. По предположению индукции на выходе схемы $\hat{\Omega}''$ реализуется то же значение, что и на выходе элемента с номером p в схеме B . Почти дословно повторяя предыдущие рассуждения, приходим к выводу, что и в рассматриваемом случае на v -м входе элемента с номером s из схемы B и на выходе гирлянды $\Gamma_v(s, j)$ из схемы C^* появляются одинаковые значения. Отсюда и из утверждений 2 и 3 следует лемма 3.

Лемма 4. Пусть неисправности схемы C^* из $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l})$ относятся к первому классу и \tilde{e}_{l+3} — сильный входной набор для C^* . Тогда

$$S_a(A', C^*, \tilde{x}_n, \tilde{e}_{l+3}) \equiv S_a(A', B, \tilde{x}_n),$$

где A' — произвольная схема, в которую может превратиться схема A при появлении в ней допустимых неисправностей.

Доказательство. Входные полюсы подсхемы A' в $S(A', C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ присоединены только к внешним полюсам и к выходам элементов $\hat{\Omega}$ схемы C^* . Отсюда и из леммы 3 следует, что в условиях леммы 4 на выходных полюсах подсхемы A' из $S(A', C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ и на соответствующих полюсах схемы A' из $S(A', B, \tilde{x}_n)$ реализуются равные значения. Если β^* является элементом схемы C^* , выход которого есть выходной полюс схемы $S(A', C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$, то выход элемента β^* является выходом некоторой схемы $\hat{\Omega}$. Из леммы 3 следует, что на выходе этого элемента и на соответствующем выходном полюсе в $S(A', B, \tilde{x}_n)$ реализуются одинаковые значения. Отсюда следует утверждение леммы 4.

Лемма 5. Если схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$ исправна, то

$$S_a(A, C, \tilde{x}_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{l+3}) \equiv S_a(A, B, \tilde{x}_n).$$

Эта лемма является очевидным следствием леммы 2.

5.2. О диагностике неисправностей в $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$.

Окрестность блока. Для каждого блока β из C укажем совокупность блоков, составляющих *окрестность блока* β , обозначаемую через $O(\beta)$.

- Если β является блоком K , вход которого присоединен к выходу блока Q , то $O(\beta)$ состоит из блоков K и Q .
- Если β является базисным элементом, то $O(\beta)$ состоит из блока β и всех блоков K , выходы которых присоединены к входам блока β .
- Если β является блоком K , вход которого присоединен к выходу блока, являющегося базисным элементом φ , то $O(\beta)$ состоит из блоков β , φ и блоков K , выходы которых присоединены к входам блока φ .
- Если β является блоком K , вход которого присоединен к выходу другого блока K , то $O(\beta)$ состоит из этих двух блоков K .
- Если β является блоком K , второй вход которого присоединен к полюсу x_i , $i \in \{1, \dots, n + l + 3\}$, то $O(\beta)$ состоит только из блока β .
- Если β является блоком Q , то $O(\beta)$ состоит только из блока β .

Пусть β — произвольная подсхема схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$. Обозначим через β' схему, в которую превращается схема β при появлении в $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$ допустимых неисправностей, т. е. при преобразовании схемы $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$ в схему $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$. Ниже используются одинаковые обозначения для схем β и β' ; например, обе схемы могут быть обозначены через β . Это не приведет к неоднозначности в рассуждениях, поскольку будет указано, для какой из схем, $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$ или $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$, схема β является подсхемой. Ввиду этого соглашения можно полагать, что в схеме $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ определены подсхемы C , K , Q и т. д.

Условимся считать, что если схема β из $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$ является блоком, то β из $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ тоже является блоком. Если блок δ входит в окрестность блока β из $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$, то в этом и только в этом случае соответствующий блок δ из $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ входит в окрестность блока β из $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$.

Допустим, что \mathcal{J} — некоторое множество из $\{0, 1\}^{n+l+3}$. Схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ называется \mathcal{J} -правильной относительно блока β , если в схемах $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$ и $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ на выходе любого блока δ из окрестности блока β реализуются функции, которые не различаются на множестве \mathcal{J} .

Обозначим через \hat{C}^* совокупность блоков в C^* , не являющихся блоками типа Q . Положим

$$\mathcal{P}(U, V, W) = \begin{cases} \mathcal{P}_1, & \text{если } (U, V, W) \in \{(\varphi_i, K, *)\}, i = 1, \dots, p; \\ \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3, & \text{если } (U, V, W) \in \{(K, K, j), (K, Q, j), \\ & (K, r+1, j)\}, j = 1, \dots, r; \\ \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, & \text{если } (U, V, W) \in \{(K, \varphi_i, r+1), (K, j, r+1)\}, \\ & i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, r, r+2, \dots, n; \\ \mathcal{P}, & \text{если } (U, V, W) = (Q, *, r+1). \end{cases}$$

Пусть (U, V, W) является γ -меткой блока $\beta \in \hat{C}^*$. Схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ называется \mathcal{P} -совершенной относительно блока β , если она является $\mathcal{P}(U, V, W)$ -правильной относительно β .

Лемма 6. Пусть $\beta \in \hat{C}^*$. Тогда

если $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ не является \mathcal{P} -совершенной схемой относительно β , то в окрестности β найдется неисправный блок;

если $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ является \mathcal{P} -совершенной схемой относительно β , то блок β исправен.

Доказательство этих утверждений приведено в ([4], леммы 3 и 4).

Замечание 2. Отметим, что выяснение того, является ли схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ \mathcal{P} -совершенной относительно блока β , может быть осуществлено путем подачи всех наборов из \mathcal{P} на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ и наблюдением значений, появляющихся при этом на одном из выходных полюсов схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$. Подходящий выходной полюс — выход блока β (выход блока β является и выходом всей схемы).

Лемма 7. Если $S_b(A^*, C^*, \tilde{\delta}_{n+l+3}) = S_b(A, C, \tilde{\delta}_{n+l+3})$ при фиксированных схемах A^*, C^* и каждом $\tilde{\delta}_{n+l+3} \in \mathcal{P}$, то

$$S_b(A', C^*, \tilde{x}_n, 0, \dots, 0) \equiv S_b(A', B, \tilde{x}_n),$$

где A' — произвольная схема, в которую может превратиться A при появлении в ней допустимых неисправностей.

Доказательство. В условиях леммы 7 схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ является \mathcal{P} -совершенной относительно всех элементов из \hat{C}^* . Это означает, что по лемме 6 все внутренние вспомогательные элементы в C^* исправны. В этом случае вектор $\tilde{e}_{l+3} = (0, 0, \dots, 0)$ является сильным входным набором для C^* . Отсюда и из леммы 3 непосредственно следует утверждение леммы 7.

Лемма 8. Для того чтобы неисправности в подсхеме C^* схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ принадлежали первому классу, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия:

- (у-1) для любого $d \in \{1, \dots, t\}$ найдется $j \in \{1, \dots, k\}$, при котором схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ является \mathcal{P} -совершенной относительно элементов с α -метками $(d.j)$, $(d.j.K)$, $(d.j.K.K)$;
- (у-2) схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ является \mathcal{P} -совершенной схемой относительно любого внутреннего вспомогательного элемента.

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнены условия (у-1), (у-2) леммы 8. Тогда

из условия (у-1) прямо следует свойство (с-1), приведенное в определении первого класса неисправностей;

из условия (у-2) и леммы 6 непосредственно следует, что в C^* исправны все внутренние вспомогательные элементы, т. е. выполняется свойство (с-2);

поскольку к выходам элементов с α -метками $(d.j.K.K)$ подключены входы вспомогательных элементов β , имеющих одновременно α -метки (ω) и γ -метки вида $(\varphi_i.j.*)$, то условие, состоящее в том, что $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ является \mathcal{P} -совершенной схемой относительно β , означает, что схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ должна быть \mathcal{P}_1 -нормальной относительно элементов с α -метками $(d.j.K.K)$, т. е. справедливо (с-3);

свойство схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ быть \mathcal{P} -совершенной относительно элементов с γ -метками $(K.Q.i)$, $i \in \{1, \dots, r\}$, означает, что схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ должна быть $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ -нормальной относительно блоков Q , т. е. справедливо (с-4).

Таким образом, при условиях (у-1) и (у-2) выполняются свойства (с-1)–(с-4). Это означает, что неисправности в C^* принадлежат первому классу.

Необходимость. Предположим, что неисправности в C^* принадлежат первому классу, т. е. выполнены условия (с-1)–(с-4). Докажем, что тогда выполняются условия (у-1) и (у-2).

Пусть d — произвольное число из $\{1, \dots, t\}$. Из условия (с-1) следует, что найдется $j \in \{1, \dots, k\}$ такое, что $(d.j) \notin \mathcal{C}^*(1)$. Это означает, что блоки в C^* с α -метками $(d.j)$, $(d.j.K)$, $(d.j.K.K)$ исправны. Покажем, что в окрестностях этих блоков содержатся только исправные элементы.

Во-первых, окрестность блока с α -меткой $(d.j.K.K)$ состоит из него самого и блока с α -меткой $(d.j.K)$. Оба этих блока исправны.

Во-вторых, в окрестность блока с α -меткой $(d.j.K)$ входит он сам, блок β с α -меткой $(d.j)$, а также $p(d)$ блоков K , принадлежащих гирляндам, подвешенным к входам блока с α -меткой $(d.j)$ (здесь $p(d)$ — число входов блока с α -меткой $(d.j)$). Указанные $p(d)$ блоков K не имеют α -меток. Блоки без α -меток относятся к внутренним вспомогательным элементам и при условии (с-2) являются исправными. Число j выбрано

таким, что блоки с α -метками $(d.j)$ и $(d.j.K)$ исправны. Таким образом, в окрестности блока с α -меткой $(d.j.K)$ все блоки исправны.

В-третьих, окрестность блока с α -меткой $(d.j)$ содержится в окрестности блока с α -меткой $(d.j.K)$. Выше показано, что последняя окрестность состоит только из исправных блоков.

Из сказанного и леммы 6 следует, что схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ является \mathcal{P} -совершенной относительно элементов с α -метками $(d.j)$, $(d.j.K)$ и $(d.j.K.K)$, т. е. выполняется условие (y-1).

Пусть блок β является внутренним вспомогательным элементом. Рассмотрим случаи (i), (ii) и (iii), различающиеся составом окрестности элемента β .

(i) Если окрестность блока β состоит только из внутренних вспомогательных элементов, то все они исправны согласно условию (c-2). Пользуясь леммой 7, получаем, что схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ является \mathcal{P} -совершенной относительно β , т. е. справедливо (y-1).

(ii) Если блок β — внутренний вспомогательный элемент, в окрестности которого есть вспомогательный элемент, не являющийся внутренним, то β является либо элементом с α -меткой (ω) , либо схемой K , в окрестности которой находится схема Q . Если β является блоком с α -меткой (ω) , то β — один из базисных элементов. Пусть это элемент φ_i с $p(i)$ входами.

В окрестность блока β входит он сам, $p_2(i)$ блоков K без α -меток и $p_1(i)$ блоков K с α -метками вида $(s.j.K.K)$, где s — некоторое число из $\{1, \dots, t\}$, а j принимает $p_1(i)$ значений из $\{1, \dots, k\}$. При этом должно выполняться равенство $p_1(i) + p_2(i) = p(i)$ ($p_2(i)$ может принимать нулевое значение). Пусть $(K.K.j_1), (K.K.j_2), \dots, (K.K.j_{p(i)})$ — совокупность всех γ -меток, приписанных этим элементам. Из условия (c-3) следует, что элемент (блок) с α -меткой $(s.j_v.K.K)$, $1 \leq v \leq p(i)$, является \mathcal{P}_1 -нормальным. Рассмотрим значения, появляющиеся на входах блока β , когда на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ последовательно подаются наборы из \mathcal{P}_1 . На выходе блока с γ -меткой $(K.K.j_v)$ при значениях (a_1, \dots, a_{n+l+3}) из \mathcal{P}_1 , подаваемых на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$, реализуются значения a_{j_v} , $v = 1, \dots, p(i)$ (те же, что и в исправной схеме).

Таким образом, если на входы схем $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ и $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$ подается набор (a_1, \dots, a_{n+l+3}) из \mathcal{P}_1 , то в обеих схемах на входы блока β подается один и тот же набор значений. Если допустить, что в этом случае значения на выходах блоков β в $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ и $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$ различаются, то это означает, что в $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ блок β является неисправным блоком. Но это противоречит условию (c-2). Отсюда следует, что при любом наборе $(a_1, \dots, a_{n+l+3}) \in \mathcal{P}_1$, поданном на входы схемы $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$, значение, реализуемое на выходе блока β ,

совпадает со значением на выходе соответствующего блока β в $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$.

Из сказанного следует, что схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ является \mathcal{P}_1 -правильной относительно β . Поскольку $\mathcal{P}(\varphi_i, K, *) = \mathcal{P}_1$, то схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ является \mathcal{P} -совершенной схемой относительно β .

(iii) Почти те же рассуждения можно привести и для случаев, когда в окрестность блока β входит блок Q . В этом случае β является блоком с γ -меткой вида $(K.Q.i)$, $i \in \{1, \dots, r\}$. Поэтому схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ должна быть $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ -правильной относительно блока β и, следовательно, \mathcal{P} -совершенной схемой относительно блока β .

Таким образом, при выполнении условий (с-1)–(с-4) схема $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+l+3})$ является \mathcal{P} -совершенной относительно любого внутреннего вспомогательного элемента, т. е. выполняется условие (у-2). Лемма 8 доказана.

§ 6. Заключение

Убедимся в том, что определенная в § 4 схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+l+3})$ обладает свойствами, перечисленными в формулировке теоремы. Пусть выполнены условия:

\mathcal{P} — множество, определенное в § 5, его мощность равна $2^{r+2} + 4$;
 $c = \max(c_4, c_7, c_8)$, где c_4, c_7, c_8 — константы, фигурирующие в соотношении (4.3);

$$w = m(\lceil \log t \rceil + \lceil \log k \rceil) + 3.$$

Тогда

- утверждение (а) теоремы следует из (4.3);
- утверждение (b) следует из леммы 5;
- утверждение (с) следует из леммы 7;
- утверждение d.1 следует из леммы 8 и замечания 2;
- утверждение d.2 следует из леммы 4;
- утверждение d.3 следует из леммы 8.

Таким образом, все утверждения теоремы доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горяшко А. П. Синтез диагностируемых схем вычислительных устройств. М.: Наука, 1987.
2. Носков В. Н. Метод синтеза удобных для контроля комбинационных схем // Дискрет. математика. 1993. Т. 5, № 4. С. 3–23.
3. Носков В. Н. Преобразование схем из функциональных элементов к виду, удобному для контроля // Дискретный анализ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1994. С. 142–165. (Тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 27).

4. Носков В. Н. Диагностика частей схем из функциональных элементов // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 3. С. 60–96.
5. Носков В. Н. О преобразованиях комбинационных схем, повышающих надежность их частей // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 2. С. 33–61.
6. Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискрет. математика. 1989. Т. 1, № 3. С. 71–76.
7. Шевченко В. И. О синтезе самокорректирующихся схем с малой трудоемкостью тестирования // Комбинаторно-логические методы в прикладной математике. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1985. С. 133–143.
8. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
9. Reddy S. M. Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. 1972. V. 21, N 1. P. 124–141.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4.
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: noskov@math.nsc.ru

Статья поступила
8 июля 1997 г.