ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 1997. Серия 2. Том 4, № 1, 30–39

УДК 519.8

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ПОГАШЕНИЯ ВЗАИМНЫХ ДОЛГОВ ПРЕДПРИЯТИЙ*)

Э. Х. Гимади, Н. И. Глебов, В. В. Залюбовский

Предлагаются две математические модели погашения взаимных долгов предприятий. Первая модель касается задачи целесообразного перераспределения долгов предприятий с учетом их важности (приоритетов, весов и т. п.) и допустимых объемов долгов, получаемых в результате перераспределения, вторая модель — задачи целесообразного использования дополнительных (кредитных) ресурсов, направляемых на погашение взаимных долгов. Решение возникающих при этом оптимизационных задач основано на сведении их к хорошо известной задаче о циркуляции минимальной стоимости. Приводится информация о практической реализации рассматриваемых задач и возможных направлениях дальнейшего развития предлагаемого подхода.

Введение

Необходимость разработки рассматриваемых моделей вызвана высоким уровнем взаимных неплатежей, которые в условиях сильных инфляционных процессов привели к резкому сокращению налоговых поступлений и увеличению дефицита бюджета. Невыполнение платежных обязательств предприятиями, областными администрациями и федеральными органами приводит к длительным задержкам зарплаты, общему спаду производства и усиливает социально-экономическую напряженность в стране.

Проблема неплатежей, несомненно, очень сложна и многогранна. В силу этого авторы не ставят перед собой цель всестороннего исследования причин этого явления и способов его устранения. Ограничимся рассмотрением достаточно простой ситуации, когда для некоторого множества предприятий известна информация об их задолженности друг другу в виде простых соотношений типа «предприятие x должно предприятию y сумму $d(x,y)$». В качестве показателя напряженности такой системы используем сумму величин $d(x,y)$ либо их взвешенную сумму.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01591).

Известны по крайней мере два пути снижения суммы взаимных задолженностей предприятий: перераспределение долгов и проведение циклических взаимозачетов.

Первый из этих возможных способов снижения напряженности рассматриваемой системы заключается в проведении некоторого перераспределения долгов предприятий, направленного на уменьшение суммарной задолженности.

Основным аргументом в пользу применения такой процедуры является тот факт, что для большого числа предприятий сумма его долгов сравнима с суммой средств, которые ему должны другие предприятия. В работах [1–3] рассмотрена постановка задачи зачета взаимных долгов предприятий, в которой в качестве функционала фигурирует сумма квадратов долгов предприятий, остающихся после перераспределения. Такой выбор целевой функции представляется искусственным, поскольку не выражает существа дела и может быть объяснен пристрастием авторов к методу неопределенных множителей Лагранжа.

В работах [4, 5] приводится постановка задачи с более естественным функционалом, равным сумме всех долгов предприятий. С математической точки зрения рассматриваемая задача тривиально сводится к нахождению произвольного допустимого решения транспортной задачи, когда стоимость транспортировки не учитывается. Предложенные в [4, 5] способы получения таких решений транспортной задачи давно и хорошо известны специалистам в области исследования операций. Так, в [4] используется алгоритм, являющийся, по сути, вариацией метода «северо-западного» угла. В [5] перераспределение долгов производится пропорционально балансам платежей предприятий.

Несмотря на многообещающее название статьи [4], используемый подход имеет ряд существенных недостатков. Один из них заключается в том, что рассматриваемые в модели долги характеризуются только своими размерами. На практике же существует определенная дифференциация долгов, связанная с их важностью для предприятия либо системы в целом. Например, платежи в бюджет, просроченная задолженность предприятия, на которую производится начисление пени, и т. п.

Частичный учет этого фактора возможен, если с каждым долгом $d(x,y)$ связать некоторую величину $c(x,y)$, которую будем называть *ценой единичной задолженности предприятия x предприятию y*. В качестве $c(x,y)$ могут быть взяты приоритет долга $d(x,y)$, взимаемый штраф либо премия за его ликвидацию. При этом в качестве целевой функции естественно взять сумму величин $c(x,y)f(x,y)$, где $f(x,y)$ — долг предприятия x предприятию y после процедуры перераспределения. Очевидно, что в этом случае предложенные в [4, 5] методы не гарантируют получение точного решения.

Более существенным недостатком является то, что в результате подобного перераспределения могут возникнуть новые отношения «должник — заемщик» между предприятиями, не связанными ранее между собой никакими реальными обязательствами. В условиях децентрализованной экономики и самостоятельности предприятий реализация подобных отношений может оказаться затруднительной либо невыполнимой.

Второй из упомянутых способов снижения суммы взаимных задолженностей предприятий — метод циклических взаимозачетов — предполагает абсолютное запрещение новых долговых связей. Вследствие этого каждое предприятие может производить расчеты только с теми предприятиями, с которыми оно изначально связано отношениями «должник — заемщик». Очевидно, в силу столь жесткого ограничения эффект циклического взаимозачета может быть меньше, чем в случае перераспределения долгов, но он представляется более удобным с точки зрения практической реализации. Кроме того, эффект такого взаимозачета может быть существенно увеличен за счет использования кредитных ресурсов.

Отличительной особенностью предлагаемого в настоящей статье подхода является то, что для любых двух предприятий x и y задается диапазон допустимых значений величины, полученной в ходе перераспределения долгов задолженности предприятия x предприятию y. В этом случае мы имеем дело с обобщением упомянутых выше подходов. Действительно, если положить верхние границы всех диапазонов равными достаточно большому числу, а нижние границы — нулю, то получим задачу перераспределения долгов. Если же верхние границы считать равными $d(x, y)$, а нижние — нулю, то будем иметь модель циклических взаимозачетов. Кроме того, в целевой функции мы допускаем взвешенное суммирование долгов предприятий.

В настоящей статье предлагаются две математические модели погашения долгов. Решение возникающих при этом оптимизационных задач основано на сведении их к хорошо известной задаче о циркуляции минимальной стоимости [6, 7]. Под *сводимостью задачи A к задаче B* будем понимать возможность построения исходных данных задачи B по исходным данным задачи A и получения по оптимальному решению задачи B оптимального решения задачи A.

В разд. 1 вводятся необходимые обозначения и описывается базовая математическая модель. В разд. 2 рассматривается обобщенная задача целесообразного перераспределения долгов предприятий с учетом упомянутой выше функции $c(x, y)$. Разд. 3 посвящен решению задачи целесообразного использования дополнительных ресурсов, направляемых на погашение взаимных долгов. В заключении приводится информация о практической реализации рассматриваемых задач и возможных направлениях дальнейшего развития предлагаемого подхода.

1. Базовая математическая модель

Для описания базовой модели введем ориентированный граф $G = (V, U)$ с множеством вершин V и множеством дуг $U \subset V \times V$.

Для непересекающихся подмножеств X и Y из V через (X, Y) обозначим множество всех дуг графа G, ведущих из $x \in X$ в $y \in Y$.

Для любой функции w, определенной на множестве U, обозначим через $\operatorname{div}_w(x)$ дивергенцию функции w в вершине $x \in V$, вычисляемую по формуле

$$\operatorname{div}_w(x) = \sum_{u \in A(x)} w(u) - \sum_{u \in B(x)} w(u),$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — множества дуг в графе G, выходящих из вершины x и входящих в вершину x соответственно.

Функцию f, определенную на множестве U, называют циркуляционным потоком, или *циркуляцией*, если $\operatorname{div}_f(v) = 0$ для всякого $v \in V$.

Задача о циркуляции минимальной стоимости (ЗЦМС) на графе $G = (V, U)$ может быть записана в следующем виде.

Минимизировать

$$\sum_{u \in U} c(u) f(u) \tag{1}$$

при выполнении следующих ограничений:

$$\operatorname{div}_f(v) = 0 \text{ при каждом } v \in V, \tag{2}$$

$$\check{a}(u) \leqslant f(u) \leqslant \hat{a}(u) \text{ при каждом } u \in U, \tag{3}$$

где $c(u)$ — цена прохождения единичного потока по дуге u; $\check{a}(u)$ и $\hat{a}(u)$ — ограничения снизу и сверху на величину потока по дуге $u \in U$.

Эффективные методы решения ЗЦМС имеются, например, в [6–8]. В [8] содержится обширный материал, посвященный особенностям реализации методов решения ЗЦМС и сравнительному анализу различных алгоритмов.

2. Обобщенная задача перераспределения долгов предприятий

Обозначим через $N = \{1, \dots, n\}$ множество предприятий. На множестве $E = \{(i, j) \mid i \neq j,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ заданы функции $d(e), c(e)$ и $a(e)$, равные для $e = (i, j)$ соответственно долгу, цене единичной задолженности и максимально допустимой величине задолженности предприятия i предприятию j. Естественно предположить, что $d(e) \geqslant 0$ и $a(e) \geqslant 0$ при любом $e \in E$.

Для функции d, определенной на множестве E, дивергенцию $\operatorname{div}_d(x)$ в вершине $x \in N$ для простоты будем обозначать через $\Delta(x)$.

Обобщенная задача перераспределения долгов предприятий (далее ЗПДП) может быть сформулирована следующим образом: *при заданных функциях $d(e)$, $c(e)$ и $a(e)$ найти такое перераспределение долгов $f(e)$, которое минимизирует функцию*

$$\sum_{e \in E} c(e) f(e) \tag{4}$$

при условии совпадения дивергенции функции f с дивергенцией искомой функции d, т. е. при каждом $x \in N$

$$\mathrm{div}_f(x) = \Delta(x), \tag{5}$$

и выполнении ограничений на задолженности, т. е. при каждом $e \in E$

$$0 \leqslant f(e) \leqslant a(e). \tag{6}$$

Утверждение 1. ЗПДП (4)–(6) *сводится к* ЗЦМС (1)–(3).

Доказательство. Очевидно, что пара (N, E) образует ориентированный граф. Покажем, что ЗПДП может быть сведена к ЗЦМС на некотором расширенном графе $\widetilde{G} = (V, U)$, где $V = N \cup \{s\}$, $U = E \cup (s, S) \cup (T, s)$, s — фиктивная вершина, а множества S и T определены следующим образом:

$$S = \{x \in N \mid \Delta(x) > 0\}; \quad T = \{x \in N \mid \Delta(x) < 0\}.$$

Множество S состоит из предприятий, чей суммарный долг участникам рассматриваемой системы больше суммарной задолженности участников системы этому предприятию. В дальнейшем такие предприятия будем называть *дебиторами системы*. Предприятия, составляющие множество T, будем называть *кредиторами системы*.

По исходным данным ЗПДП построим ЗЦМС на графе $\widetilde{G} = (V, U)$ со следующими значениями функций $c(u)$, $\check{a}(u)$ и $\hat{a}(u)$:

$$c(u) = \begin{cases} c(u), & \text{если } u \in E, \\ 0, & \text{если } u \in (s, S) \cup (T, s); \end{cases} \tag{7}$$

$$\check{a}(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \in E, \\ \Delta(x), & \text{если } u = (s, x) \in (s, S), \\ -\Delta(x), & \text{если } u = (x, s) \in (T, s); \end{cases} \tag{8}$$

$$\hat{a}(u) = \begin{cases} a(u), & \text{если } u \in E, \\ \Delta(x), & \text{если } u = (s, x) \in (s, S), \\ -\Delta(x), & \text{если } u = (x, s) \in (T, s). \end{cases} \tag{9}$$

Пусть $\tilde{f}(u)$ — оптимальное решение ЗЦМС на расширенном графе $\widetilde{G} = (V, U)$. Покажем, что $f(e) = \tilde{f}(e)$, $e \in E$, является оптимальным решением ЗПДП.

Пусть $A(x)$, $B(x)$ — множества дуг в графе G, выходящих из вершины x и входящих в вершину x соответственно. Используем обозначения $\widetilde{A}(x)$, $\widetilde{B}(x)$ для аналогичных множеств в графе $\widetilde{G}$. Очевидно, что

$$\widetilde{A}(x) = \begin{cases} A(x), & \text{если } x \in S, \\ A(x) + \tilde{f}(x, s), & \text{если } x \in T; \end{cases} \tag{10}$$

$$\widetilde{B}(x) = \begin{cases} B(x) + \tilde{f}(s, x), & \text{если } x \in S, \\ B(x), & \text{если } x \in T. \end{cases} \tag{11}$$

С учетом равенств (2), (10), (11) и очевидного соотношения $\tilde{f}(s, x) = \Delta(x)$ при $x \in S$ и $\tilde{f}(x, s) = -\Delta(x)$ при $x \in T$ следует выполнение ограничений (5) для всякого $x \in N$:

$$0 = \operatorname{div}_{\tilde{f}}(x) = \sum_{u \in \widetilde{A}(x)} \tilde{f}(u) - \sum_{u \in \widetilde{B}(x)} \tilde{f}(u) = \sum_{e \in A(x)} f(e) - \sum_{e \in B(x)} f(e) - \Delta(x)$$
$$= \operatorname{div}_f(x) - \Delta(x).$$

Выполнение ограничения (6) непосредственно следует из (3), поскольку для всякого $e \in E$ в силу (8)–(9) справедливы равенства $\breve{a}(e) = 0$ и $\hat{a}(e) = a(e)$.

Наконец, из (7) следует совпадение оптимального значения целевой функции ЗЦМС на графе $\widetilde{G}$ со значением целевой функции ЗПДП на указанном решении $f(e)$, $e \in E$. Отсюда непосредственно следуют оптимальность решения $f(e)$, $e \in E$, и сводимость ЗПДП к ЗЦМС. Утверждение 1 доказано.

3. Задача целесообразного кредитования для погашения долгов предприятий

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ — множество предприятий, а $\mathscr{A} \subset E = \{(i, j) \mid i \neq j,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ — подмножество пар (i, j), для которых заданы долги d_{ij} предприятия i предприятию j. Известен также суммарный кредит Q, предоставляемый предприятиям для погашения долгов.

Каждому предприятию $i \in N$, в принципе, предоставляется возможность взятия некоторого кредита $q_i, 0 \leqslant q_i \leqslant Q$, и в результате дальнейших взаиморасчетов некоторая сумма p_i может оказаться на «свободном» счете этого предприятия.

Далее сумму значений произвольной функции w по дугам, соединяющим непересекающиеся множества X и Y, будем обозначать соответствующей заглавной буквой:

$$W(X,Y) = \sum_{(i,j)\in(X,Y)} w_{ij}.$$

Рассмотрим следующую *задачу целесообразного кредитования: найти систему выплат* f_{ij}, *кредитования* q_i *предприятий и «чистых» возвратов долгов* p_i, *минимизирующую сумму оставшихся долгов*

$$\sum_{j=1}^{n} q_j + \sum_{(i,j)\in\mathscr{A}} (d_{ij} - f_{ij}) \tag{12}$$

при следующих условиях:

• *сумма использованного кредитного ресурса не превышает лимита предоставляемого ресурса, т. е. при любом* $j \in N$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \leqslant Q, \quad q_j \geqslant 0; \tag{13}$$

• *выплата предприятия* i *предприятию* j *не превышает величины его долга, т. е. при любых* $(i,j) \in \mathscr{A}$

$$0 \leqslant f_{ij} \leqslant d_{ij}; \tag{14}$$

• *сумма средств, поступающих предприятию в виде кредита и выплат от других предприятий, равно сумме средств, оставляемых на «свободном» счете предприятия, и выплат его кредиторам, т. е. при любом* $i \in N$

$$F(N,i) + q_i = F(i,N) + p_i. \tag{15}$$

Задачу (12)–(15) обозначим через ЗЦК.

Отметим некоторые свойства величин p_i и q_i, $i \in N$.

Утверждение 2. *Решение* ЗЦК *удовлетворяет соотношению*

$$\sum_{i\in N} q_i = \sum_{i\in N} p_i.$$

Доказательство. Просуммировав (15) по i, получим

$$\sum_{i\in N} F(N,i) + \sum_{i\in N} q_i = \sum_{i\in N} F(i,N) + \sum_{i\in N} p_i.$$

Отсюда в силу совпадения сумм потоков следует справедливость утверждения 2.

Утверждение 3. *В оптимальном решении* ЗЦК *при любом* $i \in N$ *выполняется равенство* $p_i q_i = 0$, *т. е. если* $q_i > 0$, *то* $p_i = 0$, *и если* $p_i > 0$, *то* $q_i = 0$.

Доказательство. Допустим, что в оптимальном решении для некоторого $i \in N$ справедливы неравенства $p_i > 0$ и $q_i > 0$. Тогда, не изменяя системы выплат f_{ij}, можно уменьшить кредит q_i, предоставленный предприятию i, и размер средств на «свободном» счете p_i на величину $\min(p_i, q_i) > 0$ и тем самым получить решение задачи с меньшим значением целевой функции. Полученное противоречие доказывает утверждение 3.

Воспользуемся обозначениями для множеств дебиторов и кредиторов системы, введенными в предыдущем разделе: $S = \{v \in N \mid \mathrm{div}_d(v) > 0\}$; $T = \{v \in N \mid \mathrm{div}_d(v) < 0\}$.

Имеют место следующие свойства оптимального решения ЗЦК.

Утверждение 4. *В оптимальном решении* ЗЦК *для всякого кредитора* $j \in T$ *кредит* q_j *равен* 0.

Доказательство. Допустим, что $q_j > 0$ для некоторого $j \in T$. Тогда из утверждения 2 следует, что

$$F(N, j) + q_j = F(j, N) \leqslant D(j, N) \leqslant D(N, j),$$

т. е. $F(N, j) < D(N, j)$, и, таким образом, найдется дуга $(i, j) \in \mathscr{A}$, для которой $f_{ij} < d_{ij}$. Положив $\delta = \min(q_j, d_{ij} - f_{ij}) > 0$ и перестроив поток $f'_{ij} = f_{ij} + \delta$, $q'_j = q_j - \delta$, $q'_i = q_i + \delta$, получим допустимый поток со значением целевой функции, уменьшенном на величину $\delta > 0$. Полученное противоречие доказывает утверждение 4.

Аналогичным способом может быть доказано

Утверждение 5. *В оптимальном решении* ЗЦК *для всякого дебитора* $i \in S$ *свободный остаток* p_i *равен* 0.

Доказательство. Пусть $p_i > 0$ для некоторого $i \in S$. Имеем

$$D(i, N) > D(N, i) \geqslant F(N, i) = F(i, N) + p_i > F(i, N),$$

откуда найдется дуга $(i, j) \in \mathscr{A}$, для которой $f_{ij} < d_{ij}$. Положив $\delta = \min(p_i, d_{ij} - f_{ij}) > 0$ и перестроив поток $f'_{ij} = f_{ij} + \delta$, $p'_i = p_i - \delta$, $p'_j = p_j + \delta$, получим допустимый поток со значением целевой функции, уменьшенном на величину $\delta > 0$, что противоречит оптимальности решения ЗЦК. Утверждение 5 доказано.

Утверждение 6. ЗЦК (12)–(15) *сводится к* ЗЦМС (1)–(3).

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный граф $\widetilde{G} = (V, U)$, где $V = N \cup \{s, t\}$ — множество вершин (s, t — фиктивные); $U = \mathscr{A} \cup (s, S) \cup (T, t) \cup (t, s)$ — множество дуг с параметрами

$$c(u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u \in \mathscr{A}, \\ 1, & \text{если } u \in (s, S), \\ 0, & \text{если } u \in (T, t) \cup (t, s); \end{cases} \tag{16}$$

$$\check{a}(u) = 0, \quad \text{если } u \in U; \tag{17}$$

$$\hat{a}(u) = \begin{cases} d(u), & \text{если } u \in \mathscr{A}, \\ Q, & \text{если } u \in (s, S) \cup (T, t) \cup (t, s). \end{cases} \tag{18}$$

Заметим, что если $\tilde{f}(u)$ — произвольное допустимое решение ЗЦМС на графе $\widetilde{G}$, то решение ЗЦК, определяемое как $f_{ij} = \tilde{f}(u)$ для $u = (i, j) \in \mathscr{A}$, также является допустимым и дает значение целевой функции, отличающееся от значения целевой функции ЗЦМС на постоянную величину $\sum\limits_{(i,j) \in \mathscr{A}} d_{ij}$. Отсюда следует, что сужение оптимального решения ЗЦМС на графе $\widetilde{G}$ на множество $\mathscr{A}$ дает оптимальное решение ЗЦК. Утверждение 6 доказано.

Заключение

На основе предложенных моделей авторами создано программное обеспечение, позволяющее решать реальные задачи погашения взаимных долгов предприятий на персональных компьютерах. Существующая версия позволяет получать решения задач, содержащих до 50000 клиентов и несколько миллионов связей (долгов) между ними. Эта размерность соответствует объему информации о предприятиях крупной области и даже региона. Время счета на компьютере с процессором Intel Pentium 200 и объемом оперативной памяти 64 Mb при случайно генерируемых данных составляет 15 минут при 1 млн. связей. При числе связей 2 млн. время работы программы увеличивается до 2,5 часов. Следует отметить, что при использовании реальных данных время работы программы, как правило, существенно меньше. К сожалению, в настоящее время авторы не располагают реальной информацией подобных размеров.

Разработанная программа используется в Национальном банке республики Бурятия (г. Улан-Удэ) и АКБ «Кузбасспромбанк» (г. Кемерово). Готовится ее внедрение в Красноярской расчетной палате и АИК-ПСБ «Омскпромстройбанк». Широкое внедрение программы сдерживается сложностью сбора необходимой информации и недостаточной правовой поддержкой процедуры проведения взаимозачета.

В качестве основных направлений развития предложенных моделей наиболее перспективными представляются следующие:

— учет приоритетов платежей в задаче целесообразного кредитования;

— учет товарообменных операций при проведении взаимозачета;

— возможность учета операций взаимозачета, не сохраняющих проплату.

Два первых направления, в принципе, могут быть реализованы в рамках задачи о циркуляции минимальной стоимости. Для решения последней задачи необходимо использование более общей модели, учитывающей изменение потока при прохождении определенных дуг графа.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Калиткин Н. Н.** Оптимальный взаимозачет долгов предприятий // Мат. моделирование. 1995. Т. 7, № 1. С. 11–21.
2. **Калиткин Н. Н.** Задача зачета взаимных долгов предприятий // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 1. С. 12–14.
3. **Калиткин Н. Н., Кузьмина Л. В.** О зачете взаимных долгов предприятий // Мат. моделирование. 1995. Т. 7, № 4. С. 64–72.
4. **Калиткин Н. Н., Михайлов А. П.** Идеальное решение задачи зачета взаимных долгов // Мат. моделирование. 1995. Т. 7, № 6. С. 111–117.
5. **Цициашвили Г. Ш.** Решение задачи о погашении взаимных долгов // Дальневосточный мат. сб. 1995. № 1. С. 126–131.
6. **Goldberg A. V., Tarjan R. E.** Finding mimimum-cost circulations by cancelling negative cycles // J. Assoc. Comput. Mach. 1989. V. 36, N 4. P. 873-886.
7. **Goldberg A. V., Tarjan R. E.** Finding mimimum-cost circulations by successive approximation // Math. Oper. Res. 1990. V. 15, N 3. P. 430-466.
8. **Johnson D. S., McGeoch C. C. (eds.)** Network flows and matching: first DIMACS implementation challenge. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. (DIMACS series in discrete mathematics and theoretical computer science; V. 12).

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
13 июня 1997 г.