

МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ПРОТИВОСТОЯНИЯ ДВУХ КОАЛИЦИЙ*)

Ю. В. Шамардин

Предлагается модель оценки соотношения сил двух противостоящих коалиций с помощью обобщенных показателей наступательной способности и взаимного сдерживания. Модель базируется на традиционных положениях, но не требует задания уровней допустимых или недопустимых потерь в предполагаемом конфликте.

Одним из направлений в теории исследования операций является разработка математических подходов к сравнению сил двух конфликтующих коалиций [1–5]. В основе моделей сравнения лежит исследование ущерба, наносимого сторонами друг другу в ходе предполагаемого конфликта. В данной статье, также использующей традиционный подход и развивающей идеи работы [4], предлагается модель оценки соотношения сил коалиций, не требующая задания уровней допустимых или недопустимых потерь в конфликте.

В п. 1 вводятся конструкции модели и определяются величины, характеризующие противостояние коалиций. Это показатели наступательных способностей и взаимного сдерживания. В п. 2 описывается модель конфликта, с использованием которой рассчитываются упомянутые показатели. В п. 3 обсуждаются алгоритмические вопросы расчета выходных характеристик модели.

1. Конструкции модели

Силовые множества

Пусть имеются две коалиции (обозначим их 1 и 2), находящиеся в условиях конфронтации. Коалицию 1 будем считать нападающей стороной. Обозначим через W_1 множество способов нападения коалиции 1,

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01582).

а через $W_2(w_1)$ — множество вариантов ответных действий коалиции 2, если коалиция 1 использует способ $w_1 \in W_1$.

Обозначим через $h_1(w_1, w_2)$ и $h_2(w_1, w_2)$ относительные потери объектов экономического потенциала коалиций 1 и 2, когда они применяют способы действий $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2(w_1)$, и введем множество L_1 пар чисел (α, β) , $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, удовлетворяющих условию: найдется способ нападения $w_1 \in W_1$ такой, что для всех вариантов ответных действий $w_2 \in W_2(w_1)$ выполняются неравенства

$$h_1(w_1, w_2) \leq \alpha, \quad h_2(w_1, w_2) \geq \beta. \quad (1)$$

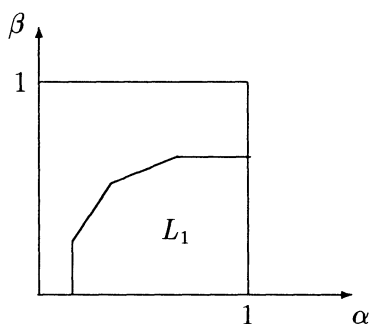


Рис. 1. Силовое множество L_1

Множество L_1 описывает силовые возможности коалиции 1. Его общий вид изображен на рис. 1.

Для более компактного описания L_1 введем вспомогательные величины:

$$\begin{aligned} f_1(w_1, w_2, \alpha, \beta) &= \min\{\alpha - h_1(w_1, w_2), h_2(w_1, w_2) - \beta\}, \\ g_1(\alpha, \beta) &= \max_{w_1 \in W_1} \min_{w_2 \in W_2(w_1)} f_1(w_1, w_2, \alpha, \beta). \end{aligned} \quad (2)$$

Неравенства (1) равносильны условию $f_1(w_1, w_2, \alpha, \beta) \geq 0$. Поэтому множество L_1 состоит из пар (α, β) , удовлетворяющих неравенству $g_1(\alpha, \beta) \geq 0$.

Считая теперь нападающей коалицию 2, введем аналогичные определения:

W_2 — множество способов нападения коалиции 2;

$W_1(w_2)$ — множество вариантов ответных действий коалиции 1, если коалиция 2 применяет способ $w_2 \in W_2$;

$$\begin{aligned} f_2(w_1, w_2, \alpha, \beta) &= \min\{\alpha - h_2(w_1, w_2), h_1(w_1, w_2) - \beta\}, \\ g_2(\alpha, \beta) &= \max_{w_2 \in W_2} \min_{w_1 \in W_1(w_2)} f_2(w_1, w_2, \alpha, \beta) \end{aligned} \quad (3)$$

— вспомогательные показатели;

$$L_2 = \{(\alpha, \beta) \mid g_2(\alpha, \beta) \geq 0\}$$

— силовое множество коалиции 2. Его общий вид тот же, что и на рис. 1.

Наступательные способности и стабильность

Используя множества L_1 и L_2 , построим числовые характеристики, с помощью которых будем проводить сравнение коалиций и оценку их противостояния. Введем величину

$$\beta_1 = \max\{\beta \mid (\alpha, \beta) \in L_1\}$$

максимального ущерба, который способна нанести противнику коалиция 1. Возьмем произвольную точку $(\alpha, \beta) \in L_1$ и будем трактовать величину β/β_1 как вероятность нанесения противнику неприемлемых потерь, а величину $1 - \alpha/\beta_1$ как вероятность получения своих потерь в допустимых пределах. Тогда произведение

$$\omega_1(\alpha, \beta) = (1 - \alpha/\beta_1)\beta/\beta_1$$

есть вероятность «победы» коалиции 1, если в результате конфликта она получает относительный ущерб α , а коалиция 2 — ущерб β . Максимальное значение

$$\gamma_1 = \max\{\omega_1(\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta) \in L_1\}$$

назовем показателем наступательной способности коалиции 1 (рис. 2).

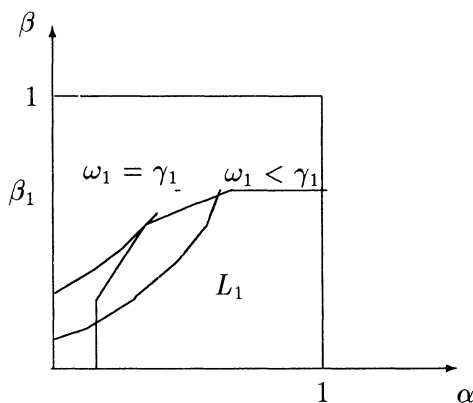


Рис. 2. Геометрическая интерпретация показателя γ_1

Аналогично полагая

$$\beta_2 = \max\{\beta \mid (\alpha, \beta) \in L_2\}, \quad \omega_2(\alpha, \beta) = (1 - \alpha/\beta_2)\beta/\beta_2,$$

определяем показатель γ_2 наступательной способности коалиции 2:

$$\gamma_2 = \max\{\omega_2(\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta) \in L_2\}.$$

Рассматривая величины γ_1 и γ_2 как вероятности совершения нападения, определим вероятность $\gamma = (1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)$ того, что противостояние коалиций не ведет к конфликту между ними. Величину γ будем называть показателем стабильности бесконфликтного противостояния, или мерой взаимного сдерживания. Величины γ_1 , γ_2 , γ — это основные показатели, которые предлагается использовать в анализе противостояния коалиций.

Наряду с непрерывными количественными характеристиками можно ввести дискретные шкалы. Считая критической вероятностью нападения, равную 0.5, оценим противостояние как

- устойчивое равновесие, если $\gamma_1 < 0.5$, $\gamma_2 < 0.5$;
- неустойчивое равновесие, если $\gamma_1 \geq 0.5$, $\gamma_2 \geq 0.5$;
- наступательное превосходство коалиции 1, если $\gamma_1 \geq 0.5$, $\gamma_2 < 0.5$;
- наступательное превосходство коалиции 2, если $\gamma_1 < 0.5$, $\gamma_2 \geq 0.5$.

Далее, считая критическими показатели стабильности, равные 0.5 и 0.25, оценим ее как

- высокую, если $\gamma > 0.5$;
- среднюю, если $0.25 < \gamma \leq 0.5$;
- низкую, если $\gamma \leq 0.25$.

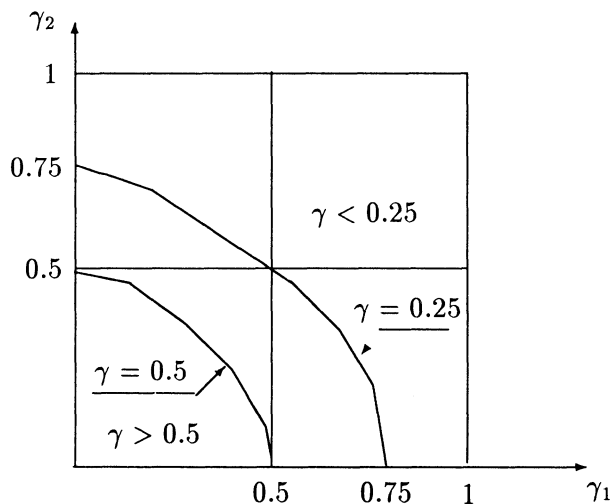


Рис. 3. Области дискретных шкал

Соотношение между дискретными шкалами поясняет рис. 3. Как видно, в плоскости переменных γ_1 , γ_2 область высокой стабильности

состоит из точек устойчивого равновесия, область средней стабильности включает часть точек устойчивого равновесия и наступательного превосходства, область низкой стабильности содержит все точки неустойчивого равновесия и часть точек наступательного превосходства коалиций.

2. Модель конфликта

Будем говорить о типах объектов, относя к одному типу те объекты, которые можно считать примерно равными по важности, защищенности, территориальному расположению и другим необходимым характеристикам. То же замечание справедливо и для ударных средств, под которыми будем понимать ракетные установки. Исходные данные модели разобьем на три группы: параметры объектов, параметры средств и параметры поражения целей.

Параметры объектов

Параметры коалиции 1:

I_1 — число типов объектов;

A_{1i} , c_{1i} — число объектов и показатель важности одного объекта типа i ($i = 1, \dots, I_1$).

Обозначим через I_2 , A_{2k} , c_{2k} аналогичные величины коалиции 2 ($k = 1, \dots, I_2$).

Параметры средств

Параметры коалиции 1:

J_1 — число типов средств;

N_{1j} — число средств типа j ;

n_{1j} — число головных частей на одном средстве типа j ;

d_{1j} — доля средств типа j , применяемых коалицией 1 в ответном встречном ударе ($j = 1, \dots, J_1$).

Для коалиции 2 введем аналогичные данные: J_2 , N_{2l} , n_{2l} , d_{2l} ($l = 1, \dots, J_2$).

Параметры поражения целей

Будем считать объекты площадными, а пусковые установки точечными целями. Поэтому функции ущерба объектов $\psi(t)$ и поражения пусковых установок $\varphi(t)$ возьмем следующие:

$$\psi(t) = \min\{1, t\}, \quad \varphi(t) = 1 - \exp(-t), \quad (4)$$

где t — величина поражающего потенциала, приходящегося на одну цель.

Введем характеристики поражения целей:

q_{1jk}^0 — средний ущерб, доставляемый одной головкой типа j коалиции 1 объекту типа k коалиции 2;

p_{1jl}^0 — вероятность поражения одной головкой типа j коалиции 1 пусковой установки средства типа l коалиции 2.

Величины q_{2li}^0, p_{2lj}^0 имеют аналогичный смысл для коалиции 2.

Будем различать два вида оборонительных систем, которые назовем *общей обороной* (система дальнего действия) и *локальной обороной* (система ближнего действия). Оборонительные системы коалиции 1 задаются следующими величинами:

ρ_{1l} — вероятность поражения головки (или средства) типа l коалиции 2 общей обороной коалиции 1;

σ_{1i}, τ_{1j} — вероятности поражения локальной обороной коалиции 1 головки, атакующей объект типа i или пусковую установку средства типа j .

Оборонительные системы коалиции 2 описываются аналогичными параметрами: $\rho_{2j}, \sigma_{2k}, \tau_{2l}$.

Уравнения модели конфликта

Способы действий сторон зададим векторами

$$x_1 = (x_{1jl}), \quad y_1 = (y_{1jk}), \quad x_2 = (x_{2lj}), \quad y_2 = (y_{2li}),$$

со следующими компонентами:

x_{1jl}, y_{1jk} — число средств типа j , направляемых коалицией 1 на пусковые установки средств типа l и объекты типа k коалиции 2;

x_{2lj}, y_{2li} — число средств типа l , направляемых коалицией 2 на пусковые установки средств типа j и объекты типа i коалиции 1.

Модель рассчитывает величины:

$\hat{N}_{1j}(x_2), \hat{N}_{2l}(x_1)$ — средние количества средств типа j коалиции 1 и типа l коалиции 2, пораженных первым ударом противника;

$\hat{A}_{1i}(y_2), \hat{A}_{2k}(y_1)$ — средние количества объектов типа i коалиции 1 и типа k коалиции 2, пораженных в ходе конфликта.

Пусть первый удар совершает коалиция 1. Предполагая, что атакующие средства равномерно распределяются среди однотипных целей, среднее число пораженных целей будем рассчитывать по формулам

$$\hat{N}_{2l}(x_1) = N_{2l}(1 - d_{2l})\varphi \left(\sum_{j=1}^{J_1} p_{1jl} n_{1j} x_{1jl} / N_{2l} \right), \quad (5)$$

$$\hat{A}_{2k}(y_1) = A_{2k}\psi \left(\sum_{j=1}^{J_1} q_{1jk} n_{1j} y_{1jk} / A_{2k} \right), \quad (6)$$

$$\hat{A}_{1i}(y_2) = A_{1i}\psi \left(\sum_{l=1}^{J_2} q_{2li} n_{2l} y_{2li} / A_{1i} \right). \quad (7)$$

Если первый удар наносит коалиция 2, то среднее число пораженных целей рассчитывается по формулам (6), (7) и

$$\hat{N}_{1j}(x_2) = N_{1j}(1 - d_{1j})\varphi\left(\sum_{l=1}^{J_2} p_{2lj}n_{2l}x_{2lj}/N_{1j}\right). \quad (8)$$

В выражениях (5)–(8) введены обозначения эффективностей головок с учетом оборонительных систем:

$$p_{1jl} = -\ln(1 - (1 - \rho_{2j})(1 - \tau_{2l})p_{1jl}^0), \quad (9)$$

$$p_{2lj} = -\ln(1 - (1 - \rho_{1l})(1 - \tau_{1j})p_{2lj}^0), \quad (10)$$

$$q_{1jk} = (1 - \rho_{2j})(1 - \sigma_{2k})q_{1jk}^0, \quad q_{2li} = (1 - \rho_{1l})(1 - \sigma_{1i})q_{2li}^0. \quad (11)$$

Функции ущерба $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ имеют вид (4).

Силовые множества

Используя модель конфликта, конкретизируем конструкции, введенные в п. 1. Пусть нападение совершает коалиция 1. Способ нападения w_1 — это пара (x_1, y_1) векторов $x_1 = (x_{1jl})$, $y_1 = (y_{1jk})$, описывающих распределение ударных средств по целям. Множество W_1 способов нападения представляет собой совокупность векторов $w_1 = (x_1, y_1)$, компоненты которых удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{l=1}^{J_2} x_{1jl} + \sum_{k=1}^{I_2} y_{1jk} \leq N_{1j}, \quad j = 1, \dots, J_1, \quad x_{1jl}, \quad y_{1jk} \geq 0. \quad (12)$$

Способ w_2 ответных действий коалиции 2 — это вектор $y_2 = (y_{2li})$, описывающий распределение средств по объектам коалиции 1. Множество $W_2(w_1)$ способов $w_2 = y_2$ ответных действий задается ограничениями

$$\sum_{i=1}^{I_1} y_{2li} \leq N_{2l} - \hat{N}_{2l}(x_1), \quad l = 1, \dots, J_2, \quad y_{2li} \geq 0.$$

Если первый удар наносит коалиция 2, то множество W_2 ее способов нападения есть совокупность пар $w_2 = (x_2, y_2)$ векторов $x_2 = (x_{2lj})$, $y_2 = (y_{2li})$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j=1}^{J_1} x_{2lj} + \sum_{i=1}^{I_1} y_{2li} \leq N_{2l}, \quad l = 1, \dots, J_2, \quad x_{2lj}, \quad y_{2li} \geq 0,$$

а множество $W_1(w_2)$ ответных действий $w_1 = y_1 = (y_{1jk})$ коалиции 1 описывается ограничениями

$$\sum_{k=1}^{I_2} y_{1jk} \leq N_{1j} - \hat{N}_{1j}(x_2), \quad j = 1, \dots, J_1, \quad y_{1jk} \geq 0.$$

Относительные потери $h_1(w_1, w_2)$ и $h_2(w_1, w_2)$ рассчитываются по формулам

$$h_1(w_1, w_2) = \frac{\sum_{i=1}^{I_1} c_{1i} \hat{A}_{1i}(y_2)}{\sum_{i=1}^{I_1} c_{1i} A_{1i}},$$

$$h_2(w_1, w_2) = \frac{\sum_{k=1}^{I_2} c_{2k} \hat{A}_{2k}(y_1)}{\sum_{k=1}^{I_2} c_{2k} A_{2k}}.$$

Теперь силовые множества L_1 и L_2 строятся, как было указано в п. 1, на основе решения задач (2) и (3).

3. Алгоритмические аспекты

Будем предполагать, что параметры (9)–(11) представимы в виде

$$p_{1jl} = s_{1j} u_{1l}, \quad q_{1jk} = t_{1j} v_{1k}, \quad p_{2lj} = s_{2l} u_{2j}, \quad q_{2li} = t_{2l} v_{2i}. \quad (13)$$

Первое из равенств (13) означает, что эффективности головок всех средств коалиции 1 пропорциональны эффективностям u_{1l} некоторого эталонного образца. Коэффициент s_{1j} соизмеряет головку средства типа j с эталоном. Аналогичный смысл имеют и другие соотношения (13).

На примере коалиции 1 поясним построение силового множества L_1 . Введем переменные x_{1l} , y_{1k} , y_{2i} , равные суммарным количествам эталонных головок:

$$x_{1l} = \sum_{j=1}^{J_1} s_{1j} n_{1j} x_{1jl}, \quad y_{1k} = \sum_{j=1}^{J_1} t_{1j} n_{1j} y_{1jk}, \quad y_{2i} = \sum_{l=1}^{J_2} t_{2l} n_{2l} y_{2li}. \quad (14)$$

В силу условия (13) выражения (5)–(7) принимают вид

$$\hat{N}_{2l}(x_1) = N_{2l}(1 - d_{2l})\varphi(u_{1l}x_{1l}/N_{2l}),$$

$$\hat{A}_{2k}(y_1) = A_{2k}\psi(v_{1k}y_{1k}/A_{2k}), \quad \hat{A}_{1i}(y_2) = A_{1i}\psi(v_{2i}y_{2i}/A_{1i}).$$

Это обстоятельство позволяет ввести в задаче (2) переменные X_1 , Y_1 , Y_2 по формулам

$$X_1 = \sum_{l=1}^{J_2} x_{1l}, \quad Y_1 = \sum_{k=1}^{I_2} y_{1k}, \quad Y_2 = \sum_{i=1}^{I_1} y_{2i} \quad (15)$$

и преобразовать ее к виду

$$g_1(\alpha, \beta) = \max_{X_1, Y_1} \min_{Y_2} \{\alpha - H_1(Y_2), H_2(Y_1) - \beta\}.$$

Здесь величина $H_1(Y_2)$ равна относительным потерям коалиции 1 и определяется равенством

$$H_1(Y_2) = \max_{(y_{2i})} \sum_{i=1}^{I_1} c_{1i} A_{1i} \psi(v_{2i} y_{2i} / A_{1i}) / \sum_{i=1}^{I_1} c_{1i} A_{1i}, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^{I_1} y_{2i} = Y_2, \quad y_{2i} \geq 0.$$

Величина $H_2(Y_1)$ — относительные потери коалиции 2 — суть

$$H_2(Y_1) = \max_{(y_{1k})} \sum_{k=1}^{I_2} c_{2k} A_{2k} \psi(v_{1k} y_{1k} / A_{2k}) / \sum_{k=1}^{I_2} c_{2k} A_{2k}, \quad (17)$$

$$\sum_{k=1}^{I_2} y_{1k} = Y_1, \quad y_{1k} \geq 0.$$

Выясним ограничения на переменные X_1 и Y_1 . Рассмотрим опорную функцию $E(\lambda, \mu)$ множества допустимых пар (X_1, Y_1) :

$$E(\lambda, \mu) = \max\{\lambda X_1 + \mu Y_1\},$$

где максимум берется при условиях (12), (14), (15). В результате получаем

$$E(\lambda, \mu) = \sum_{j=1}^{J_1} \max\{0, \lambda s_{1j}, \mu t_{1j}\} n_{1j} N_{1j}.$$

Множество допустимых пар (X_1, Y_1) описывается двухпараметрическим семейством неравенств

$$\lambda X_1 + \mu Y_1 \leq E(\lambda, \mu).$$

Параметры λ и μ принимают произвольные числовые значения. Нетрудно показать, что это семейство равносильно системе неравенств

$$t_{1m} X_1 + s_{1m} Y_1 \leq E(t_{1m}, s_{1m}), \quad m = 1, \dots, J_1, \quad X_1, Y_1 \geq 0.$$

Аналогичные рассуждения приводят к ограничениям на переменную Y_2 :

$$0 \leq Y_2 \leq N_2 - \hat{N}_2(X_1).$$

Величина N_2 равна сумме головок коалиции 2, выраженной в эталонных единицах:

$$N_2 = \sum_{l=1}^{J_2} t_{2l} n_{2l} N_{2l}.$$

Величина $\hat{N}_2(X_1)$ равна потерям средств коалиции 2, выраженным также в эталонных единицах:

$$\begin{aligned} \hat{N}_2(X_1) &= \max_{(x_{1l})} \sum_{l=1}^{J_2} t_{2l} n_{2l} N_{2l} (1 - d_{2l}) \varphi(u_{1l} x_{1l} / N_{2l}), \\ \sum_{l=1}^{J_2} x_{1l} &= X_1, \quad x_{1l} \geq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Полученное представление задачи (2) позволяет достаточно просто строить граничные точки силового множества L_1 . Возьмем некоторое целое число R (например, $R = 20$) и положим

$$\begin{aligned} a(r) &= \min \left\{ \frac{E(t_{1m}, s_{1m})}{t_{1m}(1 - r/R) + s_{1m}r/R} \mid m = 1, \dots, J_1 \right\}, \\ X_1(r) &= a(r)(1 - r/R), \quad Y_1(r) = a(r)r/R, \quad r = 0, 1, \dots, R. \end{aligned}$$

Точки $(\alpha(r), \beta(r))$ с координатами

$$\alpha(r) = H_1(N_2 - \hat{N}_2(X_1(r))), \quad \beta(r) = H_2(Y_1(r)), \quad (19)$$

лежат на границе множества L_1 , образуя дискретную сетку из $R + 1$ точки.

Используя величины (19), получаем выражение наступательной способности γ_1 коалиции 1:

$$\gamma_1 = \max\{\omega_1(r) \mid r = 0, 1, \dots, R\}, \quad \omega_1(r) = (1 - \alpha(r)/\beta(R))\beta(r)/\beta(R).$$

Рассмотрим алгоритм расчета величин $H_1(Y_2)$, $H_2(Y_1)$ и $\hat{N}_2(X_1)$, требуемых в (19). С учетом (4) задачи (16) и (17) имеют следующий общий вид:

$$H = \max_{(z_i)} \sum_{i=1}^n \min\{a_i, b_i z_i\}, \quad \sum_{i=1}^n z_i = Z, \quad z_i \geq 0. \quad (20)$$

Пусть нумерация переменных соответствует невозрастанию величин b_i , т. е.

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n.$$

Оптимальное решение (z_i^*) задачи (20) строится по формулам

$$\begin{aligned} z_1^* &= \min\{a_1/b_1, Z\}, \quad Z_1 = Z - z_1^*, \quad z_i^* = \min\{a_i/b_i, Z_{i-1}\}, \\ Z_i &= Z_{i-1} - z_i^*, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad z_n^* = Z_{n-1}, \end{aligned}$$

и величина H суть

$$H = \sum_{i=1}^n \min\{a_i, b_i z_i^*\}.$$

Задача (18) приближенно решается тем же алгоритмом, для чего предварительно делается аппроксимация

$$\varphi(u_{1l}x_{1l}/N_{2l}) \approx \min\{1, ax_{1l}/N_{2l}\}, \quad a = \min\{1, 0.515u_{1l}\}.$$

Силовое множество L_2 коалиции 2 находится аналогичным образом. В результате расчетов получаем выходные параметры модели:

- 1) дискретные сетки на границах множеств L_1 и L_2 ;
- 2) показатели γ_1, γ_2 наступательных способностей коалиций;
- 3) показатель $\gamma = (1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)$ их взаимного сдерживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морз Ф. М., Кимбелл Дж. Е. Методы исследования операций. М: Сов. радио, 1956.
2. Саати Т. Л. Математические модели конфликтных ситуаций. М: Сов. радио, 1977.
3. Исследование стратегической стабильности методами математического моделирования / В. А. Геловани, В. Р. Алеев, С. И. Болоткин, А. А. Пионтковский, А. П. Скороходов. М.: ВНИИСИ, 1988.
4. Специальные задачи распределения ресурсов в модели стратегической стабильности / Т. Т. Кадышев, С. П. Макеев, Ю. В. Шамардин, И. Ф. Шахнов. М.: ВЦ РАН, 1991.
5. Bracken J., Shubik M. Worldwide nuclear coalition games: A valuation of strategic offensive and defensive forces // Oper. Res. 1993. V. 41, N 4. P. 655–668.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила

12 марта 1997 г.,
переработанный вариант —
30 июля 1997 г.