ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 1997. Серия 2. Том 4, № 2, 10–22

УДК 519.854

ПАРОСОЧЕТАНИЯ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФАХ

П. В. Ефремов

Вводятся понятия двудольного геометрического графа и геометрического паросочетания. Исследуются их связи с перестановками и графами перестановок, изучаются некоторые свойства геометрических графов и паросочетаний в них. Рассматриваются различные задачи о паросочетаниях применительно к классу двудольных геометрических графов. Представлены эффективные алгоритмы решения этих задач. Доказывается корректность алгоритмов, обсуждаются некоторые аспекты их реализации.

1. Основные понятия и определения

Двудольным геометрическим графом назовем пару множеств $G = (V, E)$, где V — множество точек плоскости такое, что $V = X\dot{\cup}Y$, точки из X лежат на одной вертикальной прямой, а точки из Y — на другой прямой, параллельной первой; E — подмножество множества отрезков, соединяющих точки из X и Y, т. е. $E \subseteq \{[x,y] \mid x \in X, y \in Y\}$. Элементы множества V называются *вершинами*, а элементы множества E — *ребрами* графа G. Считаем, что прямая, на которой расположены точки из X, лежит левее прямой, на которой расположены точки из Y, и вершину $x \in X$ будем называть *левым концом*, а $y \in Y$ — *правым концом* ребра $e = [x, y]$. Считаем, что вершины из X и Y перенумерованы сверху вниз. Взвешенный геометрический граф определяется стандартным образом: каждому ребру поставлен в соответствие вес. *Весом паросочетания* M называется число $c(M) = \sum\limits_{e \in M} c(e)$, где $c(e)$ — вес ребра e.

Геометрическим паросочетанием в графе $G = (V, E)$ назовем множество $M \subseteq E$ такое, что $e_1 \cap e_2 = \varnothing$ для любых различных ребер e_1 и e_2 из M. Здесь и далее пересечение ребер рассматривается геометрически, как пересечение отрезков.

Далее под термином «граф» будем понимать двудольный геометрический граф, а под термином «паросочетание» — геометрическое паросочетание, если не оговорено иное.

© 1997 Ефремов П. В.

Пусть $e_1 = [x_i, y_j]$, $e_2 = [x_k, y_l]$ — два непересекающихся ребра. Будем говорить, что e_1 *лежит выше* e_2 (e_2 *лежит ниже* e_1), если $i < k$ и $j < l$. Ясно, что это отношение является отношением частичного порядка на множестве ребер.

Пусть $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ — двудольные геометрические графы. Будем говорить, что G и G' *реберно изоморфны* (*изоморфны*), если существует взаимно однозначное отображение φ множества E на E', которое сохраняет пересечения ребер, т. е. ребра e_1 и e_2 из E пересекаются тогда и только тогда, когда пересекаются ребра $\varphi(e_1)$ и $\varphi(e_2)$. В частности, перенос вершин вдоль прямой без нарушения нумерации вершин является реберным изоморфизмом.

Граф $G = (V = X \dot{\cup} Y, E)$ назовем *графом в каноническом виде*, если $|X| = |Y| = |E|$ и степень каждой вершины равна 1.

Утверждение 1. *Для любого двудольного графа существует геометрически изоморфный граф канонического вида.*

Доказательство. Пусть $G = (V = X \cup Y, E)$ — исходный двудольный геометрический граф. Если G не является графом в каноническом виде, то в G существует вершина $v \in V$ степени $d > 1$. Для определенности будем считать, что вершина v лежит в доле X. Построим новый граф $G' = (X' \cup Y', E')$, где $X' = (X \setminus \{v\}) \cup \{v_1, \ldots, v_d\}$, при этом вершины $v_1, \ldots, v_d$ располагаем между вершинами $v - 1$ и $v + 1$ исходного графа так, что v_i лежит выше v_{i+1}. Множество E' получается следующим образом. Все ребра $e_1, \ldots, e_d$ графа G, инцидентные вершине v, занумеруем по возрастанию левых концов. Пусть e_i имеет вид $e_i = [v, w_i]$. Положим $E' = E \setminus \{e_1, \ldots, e_d\} \cup \{[v_1, w_1], \ldots, [v_d, w_d]\}$. Легко видеть, что все ребра в G', инцидентные вершинам $v_1, \ldots, v_d$, попарно пересекаются и G' реберно изоморфен G. Если G' не является графом в каноническом виде, то к нему применяем снова описанную процедуру. Не более чем через $m = |E|$ шагов получим граф канонического вида, изоморфный исходному. Утверждение доказано.

Заметим, что процедуру построения графа канонического вида, изоморфного исходному графу, можно реализовать со сложностью $O(m)$. Значит, задачи, в которых важны лишь условия о пересечении ребер (в частности, задачи о паросочетаниях), можно рассматривать только на графах канонического вида, так как в задачах на геометрические паросочетания естественно за размер задачи принимать число ребер в графе.

Пусть $G = (V, E)$ — двудольный геометрический граф канонического вида, $|E| = m$. Вершины в каждой доле занумеруем сверху вниз натуральными числами от 1 до m, ребра занумеруем в соответствии с номерами их левых концов. Тогда G задает перестановку на множестве $\{1, 2, \ldots, m\}$: $i \longmapsto k$, если $[x_i, y_k] \in E$. Фактически граф является диаграммой перестановки.

Далее считаем, что ребра графа занумерованы в соответствии с номерами их левых концов сверху вниз.

По перестановке однозначно строится граф в каноническом виде. Таким образом, мы получили очень удобную форму представления графа в каноническом виде, он полностью определяется массивом $P = [P(1), \ldots, P(m)]$, который задает перестановку. Паросочетанию соответствует возрастающая подпоследовательность в этом массиве. Два ребра e_i и e_j пересекаются тогда и только тогда, когда $(i-j)(P(i)-P(j)) < 0$.

С каждой перестановкой связан граф перестановки, который определяется в [2] следующим образом. Обыкновенный граф Γ с n вершинами называется *графом перестановки*, если существуют нумерация вершин $v_1, v_2, \ldots, v_n$ в Γ и перестановка $P = [P(1), P(2), \ldots, P(n)]$ целых чисел $1, 2, \ldots, n$ такая, что вершины v_i и v_j смежны в Γ тогда и только тогда, когда $(i-j)(P^{-1}(i) - P^{-1}(j)) < 0$, где $P^{-1}(i)$ — целое число, которое P переводит в i. Класс графов перестановок тесно связан с классом транзитивно ориентируемых графов.

Теорема 1 [2]. *Граф G является графом перестановки тогда и только тогда, когда G и его дополнительный граф $\overline{G}$ являются транзитивно ориентируемыми графами, т. е. существует такая ориентация ребер в G и в $\overline{G}$, что G и $\overline{G}$ становятся транзитивными орграфами.*

Понятие двудольного геометрического графа в каноническом виде эквивалентно понятию графа перестановки. Так как у графа в каноническом виде степень каждой вершины равна 1, то соответствие между двудольными геометрическими графами и графами перестановок строится так: каждому ребру в G соответствует вершина в Γ и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие ребра пересекаются. Ясно, что паросочетанию в G соответствует независимое множество в Γ. Таким образом, алгоритмы решения задач о паросочетаниях в двудольных геометрических графах решают соответствующие задачи о независимых множествах и кликах на классе графов перестановок. В [1] и [2] рассмотрены алгоритмы решения задач о наибольшем независимом множестве и хроматическом разбиении в классе графов перестановок. Ниже приводятся более эффективные алгоритмы, решающие эти задачи, рассмотрены также другие задачи и эффективные алгоритмы их решения.

2. Геометрическое паросочетание наибольшего веса

Задача 1. Во взвешенном двудольном геометрическом графе найти геометрическое паросочетание наибольшего веса.

Ясно, что задача отыскания наибольшего по числу ребер паросочетания является частным случаем задачи 1, когда веса всех ребер равны 1. Не ограничивая общности, можно считать, что веса всех ребер неотрицательны.

Для каждого ребра $e \in E$ через $H(e)$ обозначим множество всех ребер из E, лежащих выше ребра $e \in E$. Далее положим

$$\alpha(e) = \begin{cases} c(e), & \text{если } H(e) = \varnothing, \\ c(e) + \max\{\alpha(e') \mid e' \in H(e)\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ребро, на котором достигается максимум, обозначим через $p_1(e)$, а если $H(e) = \varnothing$, то считаем, что $p_1(e) = null$. Заметим, что если ребро e лежит ниже ребра e', то $\alpha(e) > \alpha(e')$. Числа $\alpha(e)$ вычисляются последовательно сверху вниз, сначала для ребер, у которых $H(e) = \varnothing$, затем для ребер, у которых в $H(e)$ лежат только ребра с уже вычисленными α. Реализация вычислений этих чисел зависит от структуры данных, задающих граф.

Лемма 1. *Для любого ребра $e \in E$ справедливо равенство*

$$\alpha(e) = \max\{c(M) \mid M \text{ — паросочетание, } e \in M \text{ и } M \setminus \{e\} \subseteq H(e)\}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что вершина x_1 не является изолированной. Доказательство проведем индукцией по k — номеру левого конца ребра e.

Ясно, что при $k = 1$ лемма верна.

Пусть $k > 1$. Считаем, что для всех $i < k$ лемма верна. Покажем, что лемма верна и для ребра $e = [x_k, y_l]$, где $l = 1, \ldots, |Y|$.

Возможны следующие случаи:

1) выше ребра e нет ребер, т. е. $H(e) = \varnothing$;

2) в графе существует ребро, лежащее выше ребра $e = [x_k, y_l]$.

Случай 1. В этом случае существует только одно паросочетание $M = \{[x_k, y_l]\}$ такое, что $e \in M$ и $M \setminus \{e\} \subset H(e)$. Но в рассматриваемой ситуации $H(e) = \varnothing$. Поэтому $\alpha(e) = c(M) = c(e)$, т. е. в этом случае лемма верна.

Случай 2. Пусть M — произвольное паросочетание такое, что $e \in M$, $M \setminus \{e\} \subset H(e)$. Докажем, что $c(M) \leqslant \alpha(e)$.

Рассмотрим паросочетание $M' = M \setminus \{e\}$. Если $M' = \varnothing$, то $M = \{e\}$ и $c(M) \leqslant \alpha(e)$ по определению $\alpha(e)$. Если $M' \neq \varnothing$, то в M' входят только ребра из $H(e)$. Пусть $\tilde{e}$ — самое нижнее ребро в M'. Тогда по предположению индукции получаем

$$c(M') \leqslant \alpha(\tilde{e}) \leqslant \max\{\alpha(e') > 0 \mid e' \in H(e)\} = \alpha(p_1(e)).$$

Но по определению $\alpha(e)$ имеем $\alpha(e) = c(e) + \alpha(p_1(e))$. Следовательно,

$$c(M) = c(M') + c(e) \leqslant \alpha(p_1(e)) + c(e) = \alpha(e),$$

т. е. $c(M) \leqslant \alpha(e)$.

Рассмотрим ребро $p_1(e)$. Так как $p_1(e)$ лежит выше e, то по предположению индукции существует паросочетание M'', содержащее ребро $p_1(e)$ и, может быть, ребра, лежащие выше $p_1(e)$ и $\alpha(p_1(e) = c(M'')$. Так как M'' состоит из ребер, лежащих выше e, то e не пересекается ни с одним ребром из M''. Значит, $M^* = M'' \cup \{e\}$ является паросочетанием, $e \in M$, $M \setminus \{e\} \subset H(e)$ и $c(M^*) = c(M'') + c(e) = \alpha(p_1(e)) + c(e) = \alpha(e)$. А так как для любых таких паросочетаний $c(M) \leqslant \alpha(e)$, то вес паросочетания M^* — наибольший. Лемма 1 доказана.

В случае невзвешенного графа считаем, что веса всех ребер равны 1 и тогда число $\alpha(e)$ равно мощности наибольшего по числу ребер паросочетания, состоящего из ребра e и ребер из $H(e)$.

Используя лемму 1, опишем эффективный алгоритм решения задачи 1.

Алгоритм 1.

Шаг 1. Для каждого ребра $e \in E$ вычисляется число $\alpha(e)$ и находится $p_1(e)$. Текущее паросочетание M объявляется пустым: $M := \varnothing$.

Шаг 2. Находится ребро e^* такое, что $\alpha(e^*) = \max\{\alpha(e) \mid e \in E\}$. Полагается $M := M \cup \{e^*\}$.

Шаг 3. Пока $p_1(e^*) \neq null$, полагается $e^* := p_1(e^*)$, $M := M \cup \{e^*\}$.

Конец.

Теорема 2. *Алгоритм* 1 *строит паросочетание наибольшего веса.*

Доказательство. Пусть M — произвольное непустое паросочетание и M^* — паросочетание, которое строит алгоритм.

Рассмотрим ребра e_1 и e_2, которые являются самыми нижними в M и M^* соответственно. По алгоритму имеем $\alpha(e_1) \leqslant \alpha(e_2)$. Но по лемме 1 $c(M) = \alpha(e_1)$ и $c(M^*) = \alpha(e_2)$, значит, $c(M) \leqslant c(M^*)$. Теорема доказана.

Рассмотрим сложность алгоритма 1. Так как шаги 2 и 3 очевидным образом реализуются со сложностью $O(m)$, то сложность алгоритма определяется сложностью вычисления α и p_1. Для всех основных способов представления графа (матрица смежности, списки смежности и т. д.) шаг 1 достаточно просто реализуется со сложностью $O(m^2)$. Рассмотрим для примера реализацию вычислений α и p_1 в случае, когда исходный граф имеет канонический вид и задан массивом, определяющим соответствующую перестановку.

Пусть $P = [P(1), \ldots, P(m)]$ — массив, задающий перестановку, а веса ребер заданы массивом $C = [C(1), \ldots, C(m)]$. Тогда нетрудно видеть, что для i-го ребра $H(i) = \{j = 1, \ldots, i-1 \mid P[j] < P[i]\}$. Обрабатывая ребра в порядке возрастания их номеров, можно вычислить α и p_1 со сложностью $O(m^2)$.

В случае невзвешенного графа шаг 1 можно реализовать со сложностью $O(m \log_2 m)$. Пусть G — невзвешенный двудольный геометрический граф. Считаем, что он приведен к каноническому виду и задан перестановкой $P = [P(1), \ldots, P(m)]$. Через e^*_{ij} обозначим ребро, на котором достигается $\min\{P[k] \mid 1 \leqslant k \leqslant j,\ \alpha(e_k) = i\}$. В рабочих массивах L и R длины $m+1$ будем хранить на i-м месте j-го шага номера соответственно левого и правого концов ребра e^*_{ij}. Считаем, что $R[0] = -\infty$, $L[0] = null$.

Пусть для целого числа j функция $F(R, j)$ возвращает индекс i такой, что $R[i-1] < j < R[i]$. Массив R на любом шаге упорядочен по возрастанию. Поэтому эта функция легко реализуется двоичным поиском со сложностью $O(\log_2 m)$. Тогда для каждого ребра i имеем $p_1(i) = L[j]$ и $\alpha(i) = j + 1$, где $j = F(R, P[i])$. Поэтому $L[j+1] = i$ и $R[j+1] = P[i]$. Таким образом, сложность вычисления всех α и p_1 не превосходит $O(m \log_2 m)$. Следовательно, сложность всего алгоритма есть $O(m \log_2 m)$.

Задача нахождения в двудольном геометрическом графе паросочетания наибольшего веса эквивалентна задачам нахождения клики или независимого множества наибольшего веса в вершинно взвешенном графе перестановки, которые для произвольных графов являются NP-трудными. Поэтому предложенный алгоритм позволяет решать эти задачи в классе графов перестановок за полиномиальное время. В [2] приведен алгоритм нахождения наибольшего независимого множества в классе графов перестановок, имеющий сложность $O(n^2)$, где n — число вершин в графе, равное числу ребер в соответствующем двудольном геометрическом графе.

3. Разбиение на геометрические паросочетания

Задача 2. Требуется разбить множество ребер двудольного геометрического графа на наименьшее число геометрических паросочетаний, т. е. найти разбиение $E = M_1 \dot\cup \ldots \dot\cup M_k$ при минимально возможном k.

Не ограничивая общности, эту задачу можно рассмотреть для графов в каноническом виде. Пусть $G = (X \cup Y, E)$ — невзвешенный двудольный геометрический граф в каноническом виде. В этом случае $|X| = |Y| = |E| = m$.

Заметим, что эта задача эквивалентна задаче нахождения хроматического числа и хроматического разбиения в классе графов перестановок, которая для произвольных графов является NP-трудной.

В [2] рассмотрен алгоритм решения этой задачи со сложностью $O(n^2)$, где n — число вершин в графе перестановки, равное числу ребер в соответствующем двудольном геометрическом графе. Ниже предложен алгоритм, имеющий сложность $O(m\log_2 m)$, что в терминах графов перестановок соответствует $O(n\log_2 n)$.

Считаем, что ребра в G занумерованы в соответствии с номерами их левых концов. Тогда имеет место

Лемма 2. *Если $i < j < k$ и $e_i \cap e_j \neq \varnothing$, $e_j \cap e_k \neq \varnothing$, то $e_i \cap e_k \neq \varnothing$.*

Доказательство. Предположим, что i-е и k-е ребра не пересекаются. Тогда правый конец k-го ребра лежит ниже правого конца i-го ребра, но выше правого конца j-го ребра, так как $e_j \cap e_k \neq \varnothing$; далее, правый конец j-го ребра лежит выше правого конца i-го ребра, так как $e_j \cap e_i \neq \varnothing$. В таком случае правый конец k-го ребра лежит выше правого конца i-го ребра. Противоречие. Значит, $e_i \cap e_k \neq \varnothing$.

Алгоритм 2. (Стратегия «первый подходящий».)

Шаг 1. Выделяется паросочетание M_1 и в него заносится первое ребро.

Шаг 2. Пусть выделены паросочетания $M_1, \ldots, M_k$ и обрабатывается i-е ребро: находится первое паросочетание M_s, $1 \leqslant s \leqslant k$, такое, что i-е ребро не пересекается с самым нижним (т. е. с последним, которое занесли) ребром в M_s и в него заносится i-е ребро; если такого паросочетания нет, то создается новое паросочетание M_{k+1} и в него заносится i-е ребро.

Шаг 3. После обработки последнего ребра получается искомое разбиение.

Конец.

Замечание. Если в алгоритме применять другую стратегию, например «в последний подходящий» или «в произвольный подходящий», то полученное разбиение не обязательно будет оптимальным.

Теорема 3. *Алгоритм 2 позволяет разбить множество ребер на минимальное число паросочетаний.*

Доказательство проведем индукцией по числу ребер в графе.

Пусть $m = 1$. Тогда алгоритм очевидным образом корректен.

Пусть $m > 1$. Считаем, что для графов с числом ребер меньшим, чем m, алгоритм корректен.

Возможны два случая:

1) при обработке m-го ребра новое паросочетание не создается. Тогда по предположению индукции найденное разбиение минимально;

2) при обработке m-го ребра возникает новое паросочетание $M_k = \{e_m\}$.

Для удобства дальнейших рассуждений обозначим m через i_k. Но это означает существование ребра $e_{i_{k-1}} \in M_{k-1}$ такого, что $e_{i_{k-1}} \cap e_{i_k} \neq \varnothing$. Так как $e_{i_{k-1}} \in M_{k-1}$, то

$$\exists e_{i_{k-2}} \in M_{k-2} \mid e_{i_{k-2}} \cap e_{i_{k-1}} \neq \varnothing,$$

$$\dots,$$

$$\exists e_{i_1} \in M_1 \mid e_{i_1} \cap e_{i_2} \neq \varnothing.$$

Таким образом, получен набор ребер $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ таких, что $e_{i_s} \in M_s$, $e_{i_s} \cap e_{i_{s-1}} \neq \varnothing$ и $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ (так как в алгоритме очередное ребро заносится в первое подходящее паросочетание). Тогда в силу леммы 2 ребра $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ попарно пересекаются между собой. Следовательно, множество ребер разбивается не менее чем на k паросочетаний, а алгоритм построил разбиение на k паросочетаний. Поэтому построенное разбиение оптимально. Теорема 3 доказана.

Обсудим реализацию этого алгоритма. Предположим, что граф задается соответствующей перестановкой, т. е. массивом P длины m. Заведем рабочий массив S длины $m + 1$, в котором на i-м месте хранится номер правого конца самого нижнего (последнего) ребра, занесенного в паросочетание M_i, $S[0] := +\infty$. Понятно, что элементы массива образуют убывающую последовательность. Если k — число открытых в каждый момент паросочетаний, то каждый раз мы будем пользоваться первыми k элементами массива S. Функция $F(S, k, l)$ для целого числа l возвращает индекс i такой, что $S[i] < l < S[i-1]$. Так как массив S упорядочен, то эта функция легко реализуется двоичным поиском со сложностью $O(\log_2 k)$. Если $S[k] > P[i]$, то i-е ребро нельзя занести ни в одно открытое паросочетание, и мы открываем новое паросочетание и заносим в него это ребро. Иначе добавляем это ребро в j-е паросочетание, где $j = F(S, k, P[i])$, и полагаем $S[j] = P[i]$.

Ясно, что сложность алгоритма оценивается как $O\left(\sum\limits_{k=1}^{m} \log_2 k\right)$, что не превосходит $O(m \log_2 m)$.

4. Поиск максимального геометрического паросочетания минимального веса

Геометрическое паросочетание M^* в двудольном геометрическом графе G назовем *наименьшим*, если $|M^*| \leqslant |M|$ для любого паросочетания M в G, и *тупиковым*, если к M нельзя добавить ни одного ребра из G.

Задача 3. Во взвешенном двудольном геометрическом графе найти тупиковое паросочетание наименьшего веса.

В случае невзвешенного графа имеем задачу нахождения наименьшего тупикового паросочетания.

Заметим, что эта задача эквивалентна задаче нахождения независимого доминирующего множества минимального веса в графах перестановок, которая является NP-трудной в случае произвольных графов.

Пусть $G = (V, E)$ — двудольный геометрический граф. Ребро e' из G назовем *верхним соседом* ребра e, если e' лежит выше e и в G не существует ребра, которое лежало бы выше e, но ниже e'. Множество всех верхних соседей ребра e будем обозначать через $HN(e)$. Очевидно, что $HN(e)$ пусто тогда и только тогда, когда $H(e)$ пусто.

Для каждого ребра e из G определим число $\beta(e)$ следующим образом:

$$\beta(e) = \begin{cases} c(e), & \text{если } HN(e) = \varnothing; \\ c(e) + \min\{\beta(e') \mid e' \in HN(e)\}, & \text{если } HN(e) \neq \varnothing. \end{cases}$$

Ребро, на котором достигается этот минимум, обозначим через $p_2(e)$; если $HN(e) = \varnothing$, то считаем, что $p_2(e) = null$.

Лемма 3. *Для любого ребра $e \in E(G)$ справедливо соотношение*

$$\beta(e) = \min\{c(M) \mid e \in M,\ \ M \text{— максимальное паросочетание в } G(e) = (V, (H(e) \cup \{e\}))\}.$$

Доказательство. Пусть $e = [x_k, y_l] \in E$. Доказательство проведем индукцией по k.

Справедливость леммы при $k = 1$ очевидна.

Пусть $k > 1$. Считаем, что для ребер вида $[x_i, y_j]$ при $i < k$ лемма верна. Покажем, что лемма верна и для ребра $e = [x_k, y_t]$.

Возможны следующие случаи.

1. Выше ребра e нет ребер. Тогда в подграфе $G(e)$ имеется только одно паросочетание $M = \{e\}$, так как кроме ребра e в подграфе нет других ребер. В этом случае лемма верна.

2. Существует ребро, лежащее выше ребра e. В этом случае $HN(e) \neq \varnothing$.

Пусть M — произвольное тупиковое паросочетание в $G(e)$ и $e \in M$. Рассмотрим $M' = M \setminus \{e\}$. Поскольку M — тупиковое паросочетание в $G(e)$ и $HN(e) \neq \varnothing$, то $M' \neq \varnothing$. Если $e' = [x_i, y_j]$ — самое нижнее ребро в M', то $e' \in HN(e)$. Так как паросочетание M' является тупиковым в $G(e')$, $e' \in M'$ и $i < k$, то по предположению индукции имеем $c(M') \geqslant \beta(e)$. Тогда

$$c(M) = c(M') + c(e) \geqslant \beta(e') + c(e) \geqslant \min\{\beta(e'') \mid e'' \in HN(e)\} + c(e) = \beta(e).$$

Итак, для любого тупикового паросочетания M в $G(e)$ такого, что $e \in M$, выполняется неравенство $c(M) \geqslant \beta(e)$.

Покажем, что существует паросочетание M^* такое, что $c(M^*) = \beta(e)$. Рассмотрим $e' = p_2(e)$. По предположению индукции в $G(e')$ существует тупиковое паросочетание M' такое, что $e' \in M'$ и $c(M') = \beta(e')$. Тогда, так как $e' \in HN(e)$, паросочетание $M^* = M' \cap \{e\}$ является тупиковым в $G(e)$, $e \in M^*$ и

$$c(M^*) = c(M') + c(e) = \beta(e') + c(e) = \beta(e).$$

Таким образом, M^* — искомое паросочетание. Лемма 3 доказана.

Алгоритм 3.

Шаг 1. Для каждого ребра e находятся $\beta(e)$ и $p_2(e)$. Текущее паросочетание M объявляется пустым, т. е. $M := \varnothing$.

Шаг 2. Находится ребро $e^* \in E$ такое, что в G ниже e^* нет ребер и $\beta(e^*)$ минимально среди всех таких ребер. Ребро e^* заносится в M.

Шаг 3. Пока $p_2(e^*) \neq null$, полагать $e^* := p_2(e^*)$ и e^* занести в M. M — искомое паросочетание.

Конец.

Теорема 4. *Алгоритм 3 строит тупиковое паросочетание наименьшего веса.*

Доказательство. Ясно, что алгоритм 3 выделяет тупиковое паросочетание. Остается показать, что такое паросочетание имеет минимальный вес. Пусть M — произвольное тупиковое паросочетание; M^* — паросочетание, которое выделяет алгоритм 3; e — самое нижнее ребро в M; e^* — самое нижнее ребро в M^*. Так как M и M^* — тупиковые паросочетания, то ниже e и e^* нет ребер. Тогда из работы алгоритма следует, что $\beta(e) \geqslant \beta(e^*)$. Но из доказательства леммы 3 и алгоритма следует, что $c(M^*) = \beta(e^*)$, а по лемме 4 имеем $c(M) \geqslant \beta(e)$. Тогда $c(M) \geqslant \beta(e) \geqslant \beta(e^*) = c(M^*)$. Теорема 4 доказана.

Рассмотрим сложность реализации алгоритма 3 для взвешенного геометрического двудольного графа канонического вида, заданного перестановкой $P = [P(1), \ldots, P(m)]$. Заметим, что для нахождения $HN(e_k)$ достаточно последовательно рассматривать ребра $e_{k-1}, \ldots, e_1$. Первое ребро e_l такое, что $P[l] < P[k]$, обязательно лежит в $HN(e_k)$. Далее, если ребро e_i является последним занесенным в $HN(e_k)$ ребром, то ребро $e_j \in \{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$ лежит в множестве $HN(e_k) \iff P[i] < P[j]$. Таким образом, шаг 1 реализуется со сложностью $O(m^2)$. Легко видеть, что шаги 2 и 3 алгоритма реализуются со сложностью $O(m)$. Заметим лишь, что ниже ребра k в G нет ребер тогда и только тогда, когда $P[k] \geqslant P[m]$.

Итак, временная сложность реализации алгоритма 3 не превышает $O(m^2)$.

5. S-покрывающие геометрические паросочетания

Пусть $G = (V, E)$ — двудольный геометрический граф, S — некоторое паросочетание в нем. Геометрическое паросочетание M в G назовем *S-покрывающим паросочетанием*, если $M \subsetneq E \setminus S$ и каждое ребро из S пересекается с каким-либо ребром из M. Если $S = \varnothing$, то S-покрывающее паросочетание является обыкновенным геометрическим паросочетанием.

Задача 4. Дан взвешенный двудольный геометрический граф и паросочетание S в нем. Требуется найти S-покрывающее паросочетание наименьшего веса.

Так как S — паросочетание, то для каждого ребра $e \in E \setminus S$ существует не более одного ребра $s(e) \in H(e) \cap S$ такого, что между $s(e)$ и e нет S-ребер, причем ребро $s(e)$ существует тогда и только тогда, когда $H(e) \cap S \neq \varnothing$. Для каждого ребра $e \in E \setminus S$ введем множество $HN_S(e) = \{e' \in H(e) \setminus S \mid e' \cap s(e) \neq \varnothing\}$.

Для ребра e возможны следующие случаи:

1) $H(e) \cap S = \varnothing$ (т. е. выше ребра e нет S-ребер);

2) $H(e) \cap S \neq \varnothing$, $HN_S(e) = \varnothing$ (т. е. выше e существуют S-ребра, значит, существует $s(e)$, но ни одно ребро из $H(e)$ не пересекается с $s(e)$; в этом случае e не может входить в S-покрывающее паросочетание, так как в G не существует ни одного ребра, не принадлежащего S, которое бы пересекало $s(e)$, но не пересекало бы e);

3) $H(e) \cap S \neq \varnothing$, $HN_S(e) \neq \varnothing$ (т. е. существуют ребро $s(e)$ и не пересекающие его ребра из $H(e)$).

Каждому ребру $e \in E \setminus S$ поставим в соответствие число $\gamma(e)$ и ребро $p_3(e)$, определяемые следующим образом: если $H(e) \cap S = \varnothing$, то $\gamma(e) = c(e)$ и $p_3(e) = null$; если $H(e) \cap S \neq \varnothing$ и $HN_S(e) = \varnothing$, то $\gamma(e) = \infty$ и $p_3(e) = null$; если $H(e) \cap S \neq \varnothing$ и $HN_S(e) \neq \varnothing$, то $\gamma(e) = c(e) + \min\{\gamma(e') \mid e' \in HN_S(e)\}$ и $p_3(e) = e'$, на котором этот минимум достигается.

Обозначим через $\mathscr{M}(e)$ множество $\{M \mid M - S'$ — покрывающее паросочетание, $e \in M$ и $(M \setminus \{e\}) \subset H(e)\}$, где $S' = S \cap H(e)$.

Лемма 4. *Для любого ребра $e \in E \setminus S$ справедливо равенство*

$$\gamma(e) = \min\{c(M) \mid M \in \mathscr{M}(e)\}, \text{ если } \mathscr{M}(e) \neq \varnothing.$$

Доказательство проведем индукцией по k — номеру левого конца ребра e.

Пусть $k = 1$.

В случае 1 $S' = \varnothing$ и, очевидно, существует единственное паросочетание $M = \{e\}$ в $\mathscr{M}(e)$ и лемма верна.

Случаи 2 и 3 реализоваться не могут, так как $H(e_k) = \varnothing$ при $k = 1$.

Пусть $k > 1$.

В случае 1 существует единственное паросочетание e в $\mathscr{M}(e)$ и лемма верна.

В случае 2 подходящих паросочетаний не существует и $\mathscr{M}(e) = \varnothing$.

Рассмотрим случай 3. Пусть M — произвольное паросочетание из $\mathscr{M}(e)$. Рассмотрим паросочетание $M' = M \setminus \{e\}$. Пусть e' — самое нижнее ребро в M'. Тогда номер его левого конца меньше k и по предположению индукции $\gamma(e) \leqslant c(M')$, но e' обязано лежать в $HN_S(e)$ по выбору M. Тогда

$$\gamma(e') \geqslant \min\{\gamma(z) \mid z \in HN_S(e)\}. \qquad (*)$$

Значит,

$$c(M) = c(M') + c(e) \geqslant \gamma(e') + c(e) \geqslant \gamma(e).$$

Итак, вес любого паросочетания M в $\mathscr{M}(e)$ не меньше числа $\gamma(e)$. Поэтому для завершения доказательства достаточно построить паросочетание в $\mathscr{M}(e)$, вес которого равен $\gamma(e)$.

Пусть e_0 — ребро, на котором в $(*)$ достигается минимум. По предположению индукции существует паросочетание M_0 в $\mathscr{M}(e_0)$ такое, что $c(M_0) = \gamma(e_0)$. Тогда $M^* = M_0 \cup \{e\}$ является искомым паросочетанием; оно содержится в $\mathscr{M}(e)$ и

$$c(M^*) = c(M_0) + c(e) = \gamma(e_0) + c(e) = \gamma(e).$$

Лемма 4 доказана.

Алгоритм 4.

Шаг 1. Для каждого ребра $e \in E \setminus S$ вычисляется $\gamma(e)$, $p_3(e)$ и полагается $M := \varnothing$.

Шаг 2. Если e_0 — самое нижнее S-ребро, то находится e^* такое, что $\gamma(e^*) = \min\{C(e) \mid e \cap e_0 \neq \varnothing\}$; e^* заносится в M.

Шаг 3. Пока $p_3(e^*) \neq null$, полагается $e^* := p_3(e^*)$ и e^* заносится в M. Если $\gamma(e^*) = +\infty$, то искомого паросочетания не существует, иначе M — искомое паросочетание.

Конец.

Теорема 5. *Если существует S-покрывающее паросочетание наименьшего веса, то алгоритм 4 находит его.*

Доказательство. Пусть M — произвольное S-покрывающее паросочетание, а M^* является S-покрывающим паросочетанием, которое строит алгоритм. Пусть e — самое нижнее ребро в M, а e^* — самое нижнее ребро в M^*. Тогда ребра e и e^* пересекает самое нижнее ребро из S и, следовательно, по алгоритму имеем $\gamma(e) \geqslant \gamma(e^*)$. Но по лемме 1 $\gamma(e) \leqslant c(M)$, а из доказательства леммы 4 и алгоритма следует, что $\gamma(e^*) = c(M^*)$. Тогда $c(M) \geqslant c(M^*)$. Теорема доказана.

Обсудим сложность алгоритма 4. Ясно, что шаги 2 и 3 реализуются со сложностью $O(m)$. Рассмотрим сложность шага 1, т. е. сложность вычисления γ и p_3. Для нахождения $s(e)$ достаточно перебрать все ребра из S. Далее, перебирая ребра из $H(e)$, находим множество $HN_S(e)$.

Таким образом, сложность шага 1 не превышает $O(m^2)$. Следовательно, сложность алгоритма 4 не превышает $O(m^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Even S., Pnueli A., Lempel A.** Transtive orientation of graphs and identification of permutation graphs // Canad. J. Math. 1971. V. 23, N 1. P. 160–175.
2. **Even S., Pnueli A., Lempel A.** Permutation graphs and transitive graphs // J. Assoc. Comput. Mach. 1972. V. 19, N 3. P. 400–410.

Адрес автора:

Уральский
государственный университет,
мат.-мех. факультет,
пр. Ленина, 51,
620083 Екатеринбург, Россия.
E-mail: epv@skazna.ural.ru

Статья поступила
11 марта 1997 г.