ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 1997. Серия 2. Том 4, № 2, 23–33

УДК 519.854

ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЙ КЛАСС ЗАДАЧ ДВУХУРОВНЕВОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*)

Ю. А. Кочетов, А. В. Плясунов

Характерной особенностью задач двухуровневого программирования является наличие вспомогательной оптимизационной задачи, которая используется при задании области допустимых решений. Показано, что если вспомогательная задача является задачей о рюкзаке с непрерывными переменными, то оптимальное решение задачи двухуровневого линейного программирования может быть найдено с полиномиальной трудоемкостью. Установлено, что при введении дополнительных ограничений в условия вспомогательной задачи исходная задача становится NP-трудной.

Введение

Задачи многоуровневого программирования возникают при моделировании процессов принятия решений в иерархических системах. Верхний уровень в таких системах (центральное правительство, руководство корпорации и т. п.) не определяют полностью поведение нижних уровней иерархии (местные органы самоуправления, иногородние филиалы и т. п.). У каждого уровня иерархии имеется возможность только влиять на решения нижних уровней. Деятельность всей системы направлена на достижение определенной глобальной цели. Однако цели разных уровней, как правило, не совпадают. Процесс принятия решений в таких системах выглядит следующим образом. Первым принимает решение верхний уровень иерархии. Это решение передается нижестоящим и уже не меняется. Каждый уровень иерархии, получив решения вышестоящих уровней, принимает свое решение. Он преследует свои цели и использует имеющиеся у него возможности и ресурсы. Результат деятельности иерархической системы в целом зависит от работы всех уровней иерархии. Задача состоит в том, чтобы найти такое решение

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 95–01–00989, 97–01–00890).

верхнего уровня, которое приводит систему к достижению глобальной цели.

Если верхний уровень полностью определяет поведение нижестоящих уровней, то моделирование процессов принятия решений упрощается. В этом случае возникают классические задачи математического программирования, в которых область допустимых значений задается набором равенств и неравенств. Если же верхний уровень может только влиять на работу нижних уровней, то возникает новый класс задач. Область допустимых значений в данном случае задается с помощью вспомогательных (внутренних) задач, моделирующих поведение нижних уровней иерархии. Решения вышестоящих органов выступают в этих задачах в качестве ограничений.

Задачи, в которых рассматриваются только два уровня иерархии, называются задачами двухуровневого программирования. Понять постановку таких задач можно на примере следующей игры. В ней участвуют игрок и игровой автомат. Игрок называет автомату n чисел. Автомат вычисляет по ним параметры оптимизационной задачи, находит оптимальное решение и выдает ответ. Если ответ и названные игроком числа удовлетворяют условиям игры, то считается, что игра состоялась. В этом случае подсчитывается выигрыш, зависящий от хода игрока и ответа автомата. В противном случае считается, что игра не состоялась. Цель игрока — найти ход (набор n чисел), который приводит к максимальному выигрышу.

Выбирая ход, игрок задает параметры оптимизационной задачи автомата. Условия задачи ему известны. В этом смысле данная игра является игрой с полной информацией. Если оптимизационная задача автомата для любого хода игрока имеет единственное решение, то можно считать, что игрок всегда знает, состоится игра или нет, а если состоится, то каков будет выигрыш. В этом случае у него имеется принципиальная возможность найти наилучший ход или убедиться, что игра не состоится ни при каком ходе. Если же оптимальных решений несколько, то следует различать по крайней мере две ситуации. Если выбор из множества оптимальных решений предписан заранее и известен игроку, то ситуация становится такой же, как и в предыдущем случае. Если же автомат может предъявить любое из оптимальных решений, выбранное, например, случайным образом, то ситуация меняется. В понятие наилучшего хода игрок может вкладывать разный смысл. Он может назвать оптимальным любой ход, дающий шанс получить максимальный выигрыш с риском не получить ничего или получить выигрыш, значительно меньше ожидаемого. Другой подход состоит в том, чтобы считать оптимальным такой ход, который дает наибольший гарантированный выигрыш при любом ответном ходе автомата.

Впервые задачи многоуровневого программирования в игровой постановке рассматривались в [8]. В России над этими задачами работали Гермейер и его ученики [1]. Обзор полученных результатов можно найти в [4–7]. В настоящей статье исследуется задача двухуровневого линейного программирования. Основной результат работы — полиномиальный алгоритм поиска оптимального хода игрока в случае, когда внутренняя оптимизационная задача (задача автомата) имеет вид задачи о рюкзаке с непрерывными переменными. Показано также, что незначительное усложнение внутренней задачи превращают исходную задачу двухуровневого программирования в NP-трудную проблему.

1. Основные определения

Обозначим через $x \in R^n$ ход игрока, а через $y \in R^n$ ответный ход автомата. Пусть $f_1(x,y), f_2(x,y), g_1(x,y), g_2(x,y)$ — некоторые функции от x и y, а b_1, b_2 — векторы. Будем считать, что при заданном x величины y определяются из решения следующей оптимизационной задачи автомата $(A(x))$: $\max_y\{f_2(x,y) \mid g_2(x,y) \leqslant b_2\}$. Будем говорить, что игра состоялась, если пара (x,y) удовлетворяет ограничению $g_1(x,y) \leqslant b_1$. В этом случае величина $f_1(x,y)$ определяет выигрыш игрока. Если же пара (x,y) не удовлетворяет данному ограничению, то считаем, что игра не состоялась и значение выигрыша не определено. Цель игрока — найти такой ход, который приводил бы к максимальному выигрышу, либо выяснить, что игра не состоится ни при каком ходе. С использованием введенных обозначений задача игрока может быть записана следующим образом: найти

$$\max_x f_1(x,y) \tag{1}$$

при условии

$$g_1(x,y) \leqslant b_1, \tag{2}$$

где y — оптимальное решение задачи $A(x)$:

$$\max_y f_2(x,y) \tag{3}$$

$$g_2(x,y) \leqslant b_2. \tag{4}$$

Задачу (1)–(4) будем называть задачей двухуровневого программирования (ДП). Отметим, что в [4, 5, 7] задача двухуровневого программирования формулируется в более простой форме, когда ограничения (2) отсутствуют. Ниже будет показано, что такое предположение сильно упрощает задачу ДП.

Определение 1 [5]. Пара (x,y) называется *полудопустимым* решением задачи ДП, если она удовлетворяет ограничениям (2) и (4).

Определение 2 [5]. Пара (x, y) называется *допустимым* решением задачи ДП, если она удовлетворяет условию (2) и y — оптимальное решение задачи $A(x)$.

Приведем пример задачи ДП, в котором существуют полудопустимые решения, но не существует ни одного допустимого решения. Пусть x и y являются скалярными переменными и задача ДП имеет вид

$$\max_x \{x \mid 1 + y \leqslant x \leqslant 2,\ x \geqslant 0\},$$

где y — оптимальное решение задачи

$$\max_y \{y \mid y \leqslant x,\ y \geqslant 0\}.$$

Решение $x = 2,\ y = 0$ является полудопустимым решением. Однако при любом выборе $x \geqslant 0$ оптимальное решение y совпадает с x, что приводит к нарушению условия $1 + y \leqslant x$, т. е. задача не имеет допустимых решений.

Пусть функции $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$ и $f_2(x, y)$ являются линейными функциями с рациональными коэффициентами. Предположим, что ограничения (2) являются несущественными и могут быть отброшены. Тогда поиск допустимого решения задачи ДП является задачей линейного программирования и допустимое решение может быть найдено с полиномиальной трудоемкостью [3]. Если же ограничения (2) являются существенными, то поиск допустимого решения становится NP-полной задачей в сильном смысле. Действительно, в этом случае с помощью задачи поиска допустимого решения можно решить следующую дискретную задачу о покрытии [2]. Задан набор подмножеств $J_i \subseteq J$, $i \in I$, и целое положительное число K. Требуется найти такое подмножество $I' \subset I$, что $|I'| \leqslant K$ и любой элемент $j \in J$ принадлежит по крайней мере одному подмножеству J_i, $i \in I'$.

Рассмотрим следующую задачу поиска допустимого решения. Найти пару (x, y), для которой выполнены условия

$$\sum_{i \in I} x_i \leqslant K, \qquad \sum_{j \in J} y_j \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad i \in I,$$

и y является оптимальным решением задачи

$$\max_y \left\{ \sum_{j \in J} y_j \mid y_j \geqslant 0,\ \ y_j \leqslant 1 - x_i, \quad j \in J_i,\ i \in I \right\}.$$

Убедимся в том, что подмножество I' существует тогда и только тогда, когда в данной задаче существует допустимое решение.

Предположим, что такое решение существует. Тогда из условий $\sum_{j \in J} y_j \leqslant 0$ следует, что $y_j = 0$, $j \in J$. Так как y — оптимальное решение

внутренней задачи, то для любого $j \in J$ существует такой номер $i \in I$, что $j \in J_i$ и $x_i = 1$. Полагая $I' = \{i \in I \mid x_i = 1\}$, получаем требуемое подмножество I'.

Теперь предположим , что в задаче о покрытии существует подмножество I' с требуемыми свойствами. Тогда, полагая

$$y_j = 0, \quad j \in J; \qquad x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in I', \\ 0, & \text{если } i \notin I', \end{cases}$$

получаем допустимое решение.

Пусть при некотором значении x задача $A(x)$ имеет несколько оптимальных решений. Тогда наряду с понятием допустимого решения введем понятие гарантированного решения.

Определение 3. Допустимое решение (x, y) называется *гарантированным,* если для любого оптимального решения $\bar{y}$ задачи $A(x)$ пара $(x, \bar{y})$ удовлетворяет условию (2) и $f_1(x, y) \leqslant f_1(x, \bar{y})$.

Если при любом x оптимальное решение задачи $A(x)$ единственно, то любое допустимое решение является гарантированным. Следовательно, поиск гарантированного решения также является NP-полной задачей в сильном смысле. Предположим, что для некоторого x задача $A(x)$ имеет несколько оптимальных решений. Тогда гарантированное решение (x, y) существует, если ни одно из оптимальных решений задачи $A(x)$ не нарушает условий (2) и среди них имеется решение, наихудшее с точки зрения игрока.

Определение 4. Допустимое решение (x^*, y^*) называется *оптимальным,* если для любого допустимого решения (x, y) справедливо неравенство $f_1(x^*, y^*) \geqslant f_1(x, y)$.

Определение 5. Гарантированное решение (x^*, y^*) называется *наилучшим,* если $f_1(x^*, y^*) \geqslant f_1(x, y)$ для любого гарантированного решения (x, y).

Определение наилучшего гарантированного решения вытекает из содержательного смысла задачи. Если пара (x, y) является оптимальным решением, но не является наилучшим гарантированным решением, то, выбрав стратегию x, игрок соглашается идти на риск, стремясь достичь максимального выигрыша. При поиске наилучшего гарантированного решения игрок исключает риск и стремится найти стратегию с гарантированным результатом. Рассмотрим следующий пример: найти

$$\max_x \{x_1 + x_2 + y_1 + 2y_2 \mid x_1 + x_2 \leqslant 1 - y_1, \ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0\},$$

где $y = (y_1, y_2)$ — оптимальное решение задачи

$$\max_y \{y_1 + y_2 \mid y_1 + y_2 \leqslant x_1 + 2x_2, \ y_1 \leqslant x_2, \ y_1 \geqslant 0, \ y_2 \geqslant 0\}.$$

Решение $x^* = (0,1)$, $y^* = (0,2)$ доставляет максимум целевой функции на множестве допустимых решений и $f_1(x^*, y^*) = 5$. Тем не менее это решение не является гарантированным. Для x^* существует $\overline{y} = (1,1)$ — оптимальное решение задачи $A(x^*)$, при котором не выполняется ограничение $x_1 + x_2 \leqslant 1 - y_1$. Решение $x = (0,0)$, $y = (0,0)$ является гарантированным, но дает минимальное значение выигрыша. Наилучшим гарантированным решением является $x = (1,0)$, $y = (0,1)$ со значением выигрыша $f_1(x,y) = 3$.

Определение 6. Задача ДП называется *невырожденной,* если для любого x задача $A(x)$ имеет единственное оптимальное решение.

2. Полиномиально разрешимый случай

Рассмотрим следующую задачу двухуровневого линейного программирования (ДЛП): найти

$$\max_{x \geqslant 0} cx + dy, \tag{5}$$

$$Ax + By \leqslant b, \tag{6}$$

где y — оптимальное решение линейной задачи о рюкзаке (ЛР(x)):

$$\max_{y \geqslant 0} \alpha x + \beta y, \tag{7}$$

$$\gamma y \leqslant 1, \quad y \leqslant x. \tag{8}$$

Будем предполагать, что переменные x и y имеют одинаковую размерность, $x = (x_i)$, $y = (y_i)$, $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, A, B — матрицы с рациональными элементами, $c, d, b, \alpha, \beta \geqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$ — векторы с рациональными компонентами. Без ограничения общности будем считать, что $\alpha_i = 0$, $\gamma_i = 1$, $i \in I$.

Невырожденный случай. Пусть величины β_i, $i \in I$, попарно различны и множество I упорядочено так, что

$$\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_n \geqslant 0.$$

Тогда при любом $x \geqslant 0$ оптимальное решение задачи ЛР(x) определяется однозначно. Любое допустимое решение является гарантированным и любое оптимальное решение задачи является наилучшим гарантированным решением.

Множество допустимых решений задачи ДЛП представим в виде объединения из $n+1$ подмножеств и решим задачу на каждом подмножестве. Тогда наилучшее из найденных решений будет оптимальным решением задачи ДЛП. Пусть (x, y) — допустимое решение задачи ДЛП. Если $\sum\limits_{i \in I} x_i \leqslant 1$, то y — оптимальное решение задачи ЛР(x) тогда

и только когда, когда $y = x$. Исключая переменные y, получаем задачу P_0: найти

$$\max_{x \geqslant 0}(c+d)x$$

при условиях

$$(A+B)x \leqslant b,$$
$$\sum_{i \in I} x_i \leqslant 1.$$

Если x — допустимое решение задачи P_0, то пара (x, x) — допустимое решение задачи ДЛП и значения целевых функций на данных решениях совпадают.

Предположим теперь, что $\sum_{i \in I} x_i \geqslant 1$. Тогда оптимальное решение задачи ЛР(x) имеет вид

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \text{если } i < k, \\ 1 - \sum_{j<k} x_j, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i > k, \end{cases} \tag{9}$$

где $k \in I$ является таким, что

$$\sum_{i<k} x_i \leqslant 1, \qquad \sum_{i<k} x_i + x_k \geqslant 1.$$

Исключая переменные y, для каждого $k \in I$ получаем оптимизационную задачу P_k: найти

$$\max_{x \geqslant 0} \sum_{i \in I} c_i x_i + \sum_{i<k} d_i x_i + d_k \left(1 - \sum_{i<k} x_i\right)$$

при условиях

$$\sum_{i \in I} A_i x_i + \sum_{i<k} B_i x_i + B_k \left(1 - \sum_{i<k} x_i\right) \leqslant b,$$
$$\sum_{i<k} x_i \leqslant 1, \qquad \sum_{i<k} x_i + x_k \geqslant 1.$$

Если x — допустимое решение задачи P_k, то, определяя y при помощи (9), получаем допустимое решение задачи ДЛП и значения целевых функций на этих решениях совпадают. Заметим, что все задачи P_k, $k = 0, 1, \dots, n$, являются задачами линейного программирования и могут быть решены точно с помощью стандартных методов [3]. Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Для любой невырожденной задачи (5)–(8) можно с полиномиальной трудоемкостью либо найти оптимальное решение, либо установить, что задача неограничена или не имеет допустимых решений.*

Вырожденный случай. Предположим, что величины β_i, $i \in I$, не являются попарно различными и множество I упорядочено так, что

$$\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n \geqslant 0.$$

Разобьем множество I на непересекающиеся подмножества I_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, так, чтобы величины β_i совпадали друг с другом, если они попадают в одно подмножество, и отличались бы друг от друга в противном случае. Так же как и в невырожденном случае, множество допустимых решений задачи ДЛП представим в виде объединения из $m+1$ подмножеств и решим задачу на каждом из этих подмножеств. Пусть (x, y) — допустимое решение задачи ДЛП и $\sum\limits_{i \in I} x_i \leqslant 1$. Тогда $y = x$ — единственное оптимальное решение задачи ЛР(x) и задача ДЛП может быть представлена в виде задачи P_0.

Предположим теперь, что $\sum\limits_{i \in I} x_i \geqslant 1$. Тогда оптимальное решение задачи ЛР(x) удовлетворяет условиям

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \text{если } i \in I_j,\ j < k, \\ 0, & \text{если } i \in I_j,\ j > k, \end{cases} \quad \text{и} \quad \sum_{i \in I_k} y_i = 1 - \sum_{j<k} \sum_{i \in I_j} x_i$$

для некоторого k. Заметим, что в вырожденном случае вектор y не определяется однозначно по вектору x. Исключая переменные y_i, $i \notin I_k$, получаем новую формулировку задачи P_k: найти

$$\max_{x \geqslant 0, y \geqslant 0} \sum_{i \in I} c_i x_i + \sum_{j<k} \sum_{i \in I_j} d_i x_i + \sum_{i \in I_k} d_i y_i$$

при условиях

$$\sum_{i \in I} A_i x_i + \sum_{j<k} \sum_{i \in I_j} B_i x_i + \sum_{i \in I_k} B_i y_i \leqslant b,$$

$$\sum_{j<k} \sum_{i \in I_j} x_i \leqslant 1, \quad \sum_{j<k} \sum_{i \in I_j} x_i + \sum_{i \in I_k} x_i \geqslant 1,$$

$$\sum_{i \in I_k} y_i = 1 - \sum_{j<k} \sum_{i \in I_j} x_i.$$

Задачи P_k по-прежнему являются задачами линейного программирования, что позволяет с полиномиальной трудоемкостью либо найти оптимальное решение задачи ДЛП, либо убедиться, что такого решения не существует.

Пусть (x^*, y^*) — оптимальное решение задачи ДЛП. Это решение может оказаться негарантированным по двум причинам:

а) существует оптимальное решение y_1 задачи ЛР(x^*) с меньшим значением целевой функции (5);

б) существует оптимальное решение y_2 задачи ЛР(x^*), нарушающее условия (6).

Проверим, является ли (x^*, y^*) гарантированным решением. Если $\sum\limits_{i\in I} x_i^* \leqslant 1$, то y^* — единственное оптимальное решение задачи ЛР(x^*) и, следовательно, (x^*, y^*) — наилучшее гарантированное решение. Если же $\sum\limits_{i\in I} x_i^* > 1$, то определим номер k, удовлетворяющий неравенствам

$$\sum_{j<k}\sum_{i\in I_j} x_i^* \leqslant 1, \quad \sum_{j<k}\sum_{i\in I_j} x_i^* + \sum_{i\in I_k} x_i^* \geqslant 1,$$

и введем в рассмотрение неотрицательный вектор ε, размерность которого совпадает с размерностью вектора b. Для данного k найдем оптимальное решение следующей задачи:

$$\max_{y\geqslant 0,\varepsilon\geqslant 0} \sum_{l\in L} \varepsilon_l + \sum_{i\in I_k} d_i(y_i^* - y_i),$$

$$\sum_{i\in I_k} B_i y_i \leqslant b + \varepsilon - \sum_{i\in I} A_i x_i^* - \sum_{j<k}\sum_{i\in I_j} B_i x_i^*,$$

$$\sum_{i\in I_k} y_i = 1 - \sum_{j<k}\sum_{i\in I_j} x_i^*.$$

Если оптимальное значение целевой функции равно нулю, то (x^*, y^*) является наилучшим гарантированным решением. В противном случае выполняется хотя бы одно из условий а) или б) и решение (x^*, y^*) не является гарантированным. Таким образом, установлена следующая

Теорема 2. *Для любой задачи* (5)–(8) *можно с полиномиальной трудоемкостью либо найти оптимальное решение и проверить, является ли оно гарантированным, либо установить, что задача неограничена или не имеет допустимых решений.*

Заметим, что все утверждения остаются верными и в случае, когда размерность вектора x больше размерности вектора y и величины β и γ могут принимать произвольные положительные или отрицательные значения.

3. Задача с дополнительными ограничениями

Пусть в задаче ЛР(x) переменные y_i, $i \in I$, не превышают заданных значений y_i^0, $i \in I$. Тогда задача ДЛП принимает вид: найти

$$\max_{x\geqslant 0} cx + dy \tag{10}$$

при условии

$$Ax + By \leqslant b, \tag{11}$$

где y — оптимальное решение задачи

$$\max_{y \geqslant 0} \alpha x + \beta y, \tag{12}$$

$$\gamma y \leqslant 1, \quad y \leqslant x, \quad y \leqslant y^0. \tag{13}$$

При заданных значениях x переменные y по-прежнему легко и однозначно вычисляются, но этого оказывается недостаточно для построения эффективного алгоритма поиска оптимального решения.

Теорема 3. *Задача отыскания оптимального решения задачи* (10)–(13) *является* NP*-трудной.*

Доказательство. Покажем, что задача о рюкзаке с булевыми переменными

$$\max_z \left\{ \sum_{i \in I} c_i z_i \mid \sum_{i \in I} a_i z_i \leqslant b,\ z_i \in \{0,1\},\ i \in I \right\}$$

сводится к задаче отыскания оптимального решения задачи (10)–(13). Для этого рассмотрим ее частный случай: найти

$$\max_{x \geqslant 0} \left\{ \sum_{i \in I} c_i (x_i - y_i) \mid \sum_{i \in I} a_i y_i \leqslant b,\ x_i \leqslant 2,\ i \in I \right\}, \tag{14}$$

где y — оптимальное решение задачи

$$\max_{y \geqslant 0} \left\{ \sum_{i \in I} y_i \mid y_i \leqslant x_i,\ i \in I,\ y_i \leqslant 1,\ i \in I \right\}. \tag{15}$$

Убедимся в том, что оптимальные решения этих двух задач связаны между собой соотношениями

$$x_i^* = 2z_i^*; \quad y_i^* = z_i^*, \quad i \in I.$$

Пусть (z_i^*), $i \in I$, — оптимальное решение задачи о рюкзаке. Положим $x_i = 2z_i^*$, $y_i = z_i^*$, $i \in I$. Такое решение является допустимым в задаче (14), (15). Действительно, оно удовлетворяет ограничениям задачи (14) и y_i, $i \in I$, — единственное оптимальное решение задачи (15). Кроме того, из соотношения

$$\sum_{i \in I} c_i z_i^* = \sum_{i \in I} c_i (x_i - y_i)$$

следует, что значения целевых функций при данных решениях совпадают.

Обратно, пусть (x_i^*), (y_i^*), $i \in I$, — оптимальное решение задачи (14), (15). Убедимся в том, что решение

$$x_i = \begin{cases} 2, & \text{если } x_i^* > 1, \\ 0, & \text{если } x_i^* \leqslant 1, \end{cases} \quad y_i = \min(1, x_i), \quad i \in I, \tag{16}$$

также является оптимальным решением задачи (14), (15). Действительно, если $x_i^* > 1$, то $x_i^* = 2$, так как в противном случае x_i^* — не оптимальное решение. Значит, $x_i = x_i^*$ при $x_i^* > 1$. Предположим, что $x_i^* \leqslant 1$ для некоторого $i \in I$. Тогда, полагая $x_i = 0$, $y_i = 0$, получаем новое допустимое решение с тем же значением целевой функции. Таким образом, среди оптимальных решений всегда существует решение вида (16). Полагая $z_i = y_i$, $i \in I$, получаем такое допустимое решение задачи о рюкзаке, что

$$\sum_{i \in I} c_i(x_i^* - y_i^*) = \sum_{i \in I} c_i z_i.$$

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гермейер Ю. Б.** Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
2. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
3. **Схрейвер А.** Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991.
4. **Anandalingam G., Friesz T. L.** Hierarchical optimization: an introduction // Ann. Oper. Res. 1992. V. 34, N 1. P. 1–11.
5. **Ben-Ayed O.** Bilevel linear programming // Comput. Oper. Res. 1993. V. 20, N 5. P. 485–501.
6. **Hansen P., Jaumard B., Savard G.** A variable elimination algorithm for bilevel linear programming // SIAM J. Sci. and Statistical Comput. 1992. V. 13, N 5. P. 1194–1217.
7. **Savard G., Gauvin J.** The steepest descent direction for the nonlinear bilevel programming problem // Oper. Res. Lett. 1994. V. 15, N 5. P. 265–272.
8. **Stackelberg H. V.** The Theory of the Market Economy. Oxford: Oxford Univ. Press, 1952.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
25 марта 1996 г.