ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 1997. Серия 2. Том 4, № 2, 34–54

УДК 519.85

СУПЕРКОНКУРЕНТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКОВ В МНОГОПРОДУКТОВЫХ СЕТЯХ*)

Ю. Е. Малашенко, Н. М. Новикова

Рассматривается проблема анализа эффективности многопродуктовой сети в случае, когда в ней не может быть реализован заданный вектор требований, а потоки различных продуктов конкурируют между собой за пропускную способность ребер сети. Сформулирована задача поиска такого конкурентного распределения потоков, которое позволяет наиболее полно использовать имеющуюся пропускную способность. В качестве конкретного варианта ее решения предложено суперконкурентное распределение потоков. При этом идея конкурентного распределения, как не дискриминирующего никого из пользователей сетевой системы, получила свое дальнейшее логическое развитие. Исследована соответствующая оптимизационная задача распределения потоков в многопродуктовых сетях, предложены алгоритмы ее решения.

Введение

Многие сложные системы имеют сетевую структуру и являются территориально-распределенными: разнообразные транспортные системы, телеграф, телефон, информационно-вычислительные и топливно-энергетические сети. Территориально-распределенные системы задают хозяйственную и управленческую инфраструктуру страны (региона, местности, производственного комплекса); от их состояния и качества функционирования зависит не только существующий уровень экономического развития, но и возможности дальнейшего роста. Это обусловливает важность сетевых территориально-распределенных систем, вызывает необходимость их моделирования и исследования, в том числе математическими методами. Задачи, которые здесь возникают, связаны с проектированием новых систем и развитием старых, а также — что, пожалуй, даже более существенно на данном этапе — с проблематикой принятия решений по использованию имеющихся сетевых систем: управлению потоками в сети, распределению ее ресурсов между пользователями, т. е.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95–01–00232).

с анализом возможностей улучшения работы сети в результате рационального перераспределения потоков (выбора оптимальной маршрутизации).

Специфика задач принятия решений для сетевых систем прежде всего определяется наличием у таких систем невзаимозаменяемых пользователей. Вопросы о конкуренции между пользователями за ресурсы сети при организации самостоятельного доступа или об учете интересов каждого при централизованном распределении ресурсов не имеют однозначных ответов, хотя на практике в основном они преодолеваются путем создания избыточного ресурса. К сожалению, в условиях дефицита ресурсов сети возникают и отказы, и потери, и задержки, и ухудшение качества связи, причем зачастую не равномерно, а для одних и тех же пользователей. Если принять во внимание, что пользователи большой сетевой системы агрегированы (это не отдельные лица, а коллективы или группы населения), то проблема недискриминирования пользователей в любых условиях выходит на первый план. Кроме того, уже сам факт, что с территориально-распределенной системой связано население, предъявляет к процедуре принятия решений повышенные требования.

Указанные особенности изучаемого класса систем необходимо иметь в виду при разработке теории и методов их математического моделирования. Удобный аппарат для этого предоставляет теория исследования операций [1, 6], общая методология которой и лежит в основе данной статьи.

Принципиальная схема функционирования многопользовательской потоковой сетевой системы описывается известной математической моделью, которая называется *многопродуктовой потоковой сетью* (МП-сетью) и задается с помощью двух графов на одном и том же множестве вершин — узлов сети. Первый граф — физический — определяет физическую структуру сети, его ребра соответствуют физическим отрезкам линий связи: дорогам, линиям электропередач, телефонному кабелю, проложенным от одного узла к другому. Узлы сети соответствуют либо пунктам входа/выхода пользователей — их подключения к сетевой системе, либо пунктам переключения с одной линии связи на другую: перекресткам дорог, узлам коммутации телефонных проводов и т. п. В последнем случае вершины физического графа сети называются *транзитными. Нетранзитные узлы* сети являются вершинами второго (логического) графа сети, определяющего структуру связей между пользователями (абонентами сети), т. е. структуру требований на передачу потоков в сети. Ребра логического графа (графа тяготений) соединяют пары входов сети, между которыми нужна связь, так называемые абонентские, или тяготеющие пары. Объединение указанных двух графов в одну систему — МП-сеть — обусловлено тем, что связь между узлами, соединенными ребрами логического графа, может осуществляться только по ребрам физического графа.

Замечание 1. Название *многопродуктовая* («многопродуктовик») для МП-сети объясняется невзаимозаменяемостью потоков различных тяготеющих пар, например их телефонных разговоров. Считается, что эти потоки соответствуют как бы разным видам продуктов: они не смешиваются, проходя по ребрам физического графа сети, и не могут поделиться в другой пропорции. В противном случае, когда речь идет, допустим, о системе водоснабжения, говорят об однопродуктовой потоковой сети с несколькими источниками и стоками. Многопользовательская модель однопродуктовика существенно у́же МП-сети, но гораздо проще для математических расчетов. Так что удобно, если модель реальной сетевой системы удается представить в виде однопродуктовой потоковой сети, пусть с более сложной структурой, чем МП-сеть. Тем не менее для многих сетей связи, таких как телефонные сети или сети ЭВМ, однопродуктовая сетевая модель оказывается неадекватной. Поэтому далее будет рассматриваться общая модель — МП-сеть, являющаяся достаточно универсальной [14].

Если известна количественная мера требований — заявки на потоки — тяготеющих пар, то ребрам логического графа сети приписываются соответствующие количества условных единиц потока для каждой абонентской пары. В тех же условных единицах потока измеряется и пропускная способность ребер физического графа сети, ограничивающая суммарный поток всех абонентских пар по данному ребру. Задача распределения потоков в сети состоит в том, чтобы выбрать маршруты соединения абонентских пар в сети, т. е. проложить по ребрам физического графа пути для всех пар узлов, соединенных ребрами логического графа (например, задача создания вторичной сети телефонной связи на базе имеющейся первичной). При этом необходимо удовлетворить физическим ограничениям по пропускной способности и желательно удовлетворить логическим ограничениям по одновременному обеспечению требований всех пользователей. Если это возможно, то сеть называется *допустимой*, в противном случае сеть нуждается в таком распределении потоков, которое позволило бы максимально согласовать интересы различных пользователей. Соответствующей задаче, называемой *задачей анализа* МП-сети, и посвящена данная статья.

1. Формально МП-сеть $\mathbf{S} = \langle V, R, P\rangle$ определяется множествами $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ — узлов сети, $R = \{r_1, \dots, r_e\} \subset V \times V$ — ребер физического графа G сети и $P = \{p_1, \dots, p_m\} \subset V \times V$ — тяготеющих пар (видов продуктов), или ребер логического графа сети. Соответствующие индексные множества будем обозначать: $N = \{1, \ldots, n\}$, $E = \{1, \ldots, e\}$ и $M = \{1, \ldots, m\}$, так что $V = \{v_j\}_{j \in N}$, $R = \{r_k\}_{k \in E}$ и $P = \{p_i\}_{i \in M}$.

Для упрощения изложения предположим, что все ребра сети являются неориентированными. Направление от вершины с меньшим номером к вершине с бо́льшим номером назовем прямым (графы предполагаются беспетельными). Каждое ребро $r_k \in R$ физического графа сети будем представлять двумя ориентированными дугами с номерами k и $k + e$ (где e — число ребер в сети) для прямого и обратного направлений соответственно. В случае ориентированного ребра физического графа будем полагать нулевым поток по дуге, направленной противоположно ориентации ребра. Для любой вершины $v_j \in V$ обозначим через $S(v_j)$ множество индексов выходящих из нее дуг, т. е.

$$\begin{aligned} S(v_j) = \{k \mid \exists l > j \text{ такое, что } r_k = (v_j, v_l) \in R\} \\ \cup \{k + e \mid \exists l < j \text{ такое, что } r_k = (v_l, v_j) \in R\}, \end{aligned}$$

а через $T(v_j)$ — множество индексов входящих дуг, т. е.

$$\begin{aligned} T(v_j) = \{k \mid \exists l < j \text{ такое, что } r_k = (v_l, v_j) \in R\} \\ \cup \{k + e \mid \exists l > j \text{ такое, что } r_k = (v_j, v_l) \in R\}. \end{aligned}$$

Для i-й тяготеющей пары введем обозначение $p_i = (v_{s_i}, v_{t_i})$, где $s_i < t_i$; вершина v_{s_i} называется *источником*, а v_{t_i} — *стоком* i-го вида продукта.

Указанная структура МП-сети представляется также с помощью матрицы $A = \{a_{kj}\}$ размера $2e \times n$ — матрицы инциденций «дуги-вершины» физического графа сети, в которой

$$a_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in S(v_j), \\ -1, & \text{если } k \in T(v_j), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и матрицы $B = \{b_{ij}\}$ размера $m \times n$ — матрицы связей логического графа сети, в которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_j = v_{s_i}, \\ -1, & \text{если } v_j = v_{t_i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Структура сети однозначно задает значения z_i потока между источником и стоком для тяготеющей пары $p_i \in P$ в зависимости от распределения f потоков по ребрам физического графа G следующим образом.

Введем матричную переменную $f = \{f_{ik}\}$ размера $m \times 2e$. Элемент f_{ik} обозначает количество потока i-й тяготеющей пары (i-го вида продукта) по ребру $r_k \in R$ в прямом направлении для $k \in E$ или по ребру

$r_{k-e} \in R$ в обратном направлении, если $k > e$. Все f_{ik} неотрицательны. Для возможных значений переменной f должны выполняться условия неразрывности потока каждого вида продукта в транзитных для него узлах, т. е. для каждого $v \in V$ должно выполняться соотношение

$$\sum_{k\in S(v)} f_{ik} - \sum_{k\in T(v)} f_{ik} = \begin{cases} z_i, & \text{если } v = v_{s_i}, \\ -z_i, & \text{если } v = v_{t_i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{1}$$

где $z_i \geqslant 0$, $i \in M$, равно величине входного потока, который пропускается по сети от источника к стоку i-й тяготеющей пары при распределении потоков f. В матричной форме для $z = z(f)$ получаем систему уравнений

$$f_i A = z_i B_i, \quad i \in M$$

(здесь и далее нижний индекс у матрицы обозначает соответствующую вектор-строку). Таким образом, зависимость $z(f)$ линейна.

Кроме структурных ограничений (1) на распределение потоков в сети имеются количественные ограничения, определяемые пропускной способностью ребер ее физического графа. Ребру $r_k \in R$ МП-сети припишем некоторое число $c_k > 0$, называемое *пропускной способностью ребра* r_k и измеряемое в условных единицах потока, для которого предназначена данная сеть (например, число стандартных телефонных каналов или других каналов связи, или полос движения, или проходящих за час вагонов метро). Вектор $c = (c_1, \dots, c_e)$ задает следующие ограничения-неравенства на распределение потоков в сети:

$$\sum_{i=1}^{m} (f_{ik} + f_{i(k+e)}) \leqslant c_k, \quad k = 1, 2, \dots, e. \tag{2}$$

Ограничения (2) линейны и вместе с ограничениями (1) определяют многогранник возможных распределений потоков

$$\mathscr{F}(c) = \{f \geqslant 0 \mid \exists z \geqslant 0 \ \text{ такое, что } \ \text{выполнены (1) и (2)}\},$$

а также множество достижимых векторов потоков (*мультипотоков*)

$$Z(c) = \{z \geqslant 0 \mid \exists f \in \mathscr{F}(c) \ \text{ такое, что } \ z = z(f), \text{ т. е. выполнено (1)}\}.$$

Кроме того, будем использовать обозначение x для вектора $(f_1, \dots, f_m, z)$ распределений и значений потоков, а обозначение

$$X(c) = \{x = (f_1, \dots, f_m, z) \geqslant 0 \mid \ \text{выполнены (1) и (2)}\} \ -$$

для множества достижимости в пространстве векторов x.

В традиционных моделях для МП-сети предполагается заданным вектор $d = (d_1, \dots, d_m)$ требований или заявок тяготеющих пар на величины потоков между источником и стоком, т. е. всем ребрам $p_i \in P$ логического графа приписаны числа $d_i \geqslant 0$ условных единиц потока, который требуется пропустить по данному логическому ребру МП-сети (называемому в сетях связи информационным направлением). Если вектор требований d известен, то ставится *задача о допустимости*: проверить допустимость сети для указанного вектора требований, т. е. проверить условие

$$d \in Z(c), \tag{3}$$

и — в случае допустимости — найти *допустимое распределение*, т. е. такое распределение потоков $f \in \mathscr{F}(c)$, которое реализует вектор требований

$$d = z(f). \tag{4}$$

Последнее равенство формально понимается как $d = z$, где $z = z(f)$, т. е. $(f_1, \dots, f_m, z) \in X(c)$, или просто как $(f_1, \dots, f_m, d) \in X(c)$. Соответствующее распределение потоков f, допустимое для вектора d, будем обозначать $f[d]$. (Как правило, такое распределение не единственно.)

Существует много методов решения задачи о допустимости (3), (4): от специальных (сетевых) вариантов симплекс-метода и метода Кармаркара до метода последовательного проектирования [11, 15, 18]. Обычно проверка допустимости (3) совмещается с поиском допустимого распределения потоков $f[d]$ — решения (4) — или некоторого приемлемого распределения f, если сеть не является допустимой. В качестве такого приемлемого распределения потоков рядом авторов [20–22, 24] предлагается выбирать так называемое *конкурентное распределение потоков* $f^0 = f^0(d)$ — решение оптимизационной задачи

$$\max_{(f,z)\in X(c)} \min_{i\in M} \frac{z_i}{d_i}. \tag{5}$$

Здесь и далее вектор $(f_1, \dots, f_m)$ распределения потоков будем обозначать также через f.

Значение (5) будем называть величиной *максиминной обеспеченности требований* тяготеющих пар в МП-сети и обозначать как $\theta_0 = \theta_0(c, d)$. Если $\theta_0 \geqslant 1$, то сеть допустима и конкурентное распределение потоков $f^0(d)$ приводит к решению $f[d]$ задачи (4), а если $\theta_0 < 1$, то сеть недопустима. Разность между 1 и θ_0 дает количественную меру недопустимости МП-сети. Кроме того, значение $1/\theta_0$ является верхней оценкой того, во сколько раз надо увеличить пропускную способность ребер физического графа МП-сети, чтобы последняя стала допустимой, т. е.

$$1/\theta_0 = \nu_0 = \min_{f,z,\nu} \{\nu \mid (f, z) \in X(\nu c), \quad z \geqslant d\}. \tag{6}$$

Действительно, из линейности $X(c)$ следует, что если $\theta_0 d \in Z(c)$, то $d \in Z(c/\theta_0)$, т. е. $\nu_0 \leqslant 1/\theta_0$. Аналогично если $d \in Z(\nu_0 c)$, то $d/\nu_0 \in Z(c)$, т. е. $1/\nu_0 \leqslant \theta_0$.

Потоковые (комбинаторные) методы поиска конкурентного распределения потоков даны в [20–22, 24, 25]. Кроме того, задача (5) сводится к следующей задаче линейного программирования: найти

$$\theta_0 = \max_{f,z,\theta} \{\theta \mid (f,z) \in X(c),\ \theta d_i \leqslant z_i \quad \text{при всех } i \in M\}. \tag{7}$$

Поэтому для ее решения могут быть применены эффективные методы линейного программирования (обзор результатов счета см., например, в [21]).

Основной недостаток концепции конкурентного распределения потоков состоит в том, что множество конкурентных распределений является слишком широким и содержит «уравнительные» распределения потоков, при которых всем тяготеющим парам обеспечивается $1/\nu_0$-я часть их требований, тогда как многие требования могли быть обеспечены целиком. Пропускная способность ребер для уравнительных распределений, как правило, недоиспользуется. К сожалению, известные численные методы позволяют находить одно произвольное (и обычно не лучшее) решение. В следующем пункте мы обсудим, какие распределения потоков из всего множества конкурентных распределений надо считать наиболее приемлемыми в случае недопустимости МП-сети.

Замечание 2. Другими возможными вариантами для приемлемого распределения потоков являются решения задачи максимизации средневзвешенного потока

$$\max_{(f,z)\in X(c)} \sum_{i\in M} d_i z_i.$$

В отличие от задачи (5)–(6) решение этой задачи не дает ответа на вопрос о допустимости (3), (4) и решения задачи минимизации невязки вектора требований, имеющей также смысл штрафа за недовыполненные требования пользователей

$$\min_{(f,z)\in X(c)} \sum_{i\in M} \min\{0, d_i - z_i\}.$$

Однако обе постановки в случае недопустимости МП-сети могут приводить к распределению потоков, дискриминирующему отдельные группы пользователей.

2. Вернемся к рассмотрению случая недопустимости МП-сети и к проблеме выбора приемлемого распределения потоков. Подобная проблема нередко возникает при наличии неопределенности: либо требования пользователей оказываются далекими от ожиданий проектировщиков первичной сети связи, либо пропускная способность первичной сети (ребер физического графа МП-сети) отличается от расчетной, например в результате повреждений сети. В обоих случаях ресурсов сети может сильно недоставать для обеспечения требований пользователей и вопрос о конкуренции или компромиссе между ними в условиях дефицита становится весьма актуальным. Здесь надо искать решение, во-первых, не дискриминирующее никого из пользователей, а во-вторых, использующее все ресурсы сети, пока они могут пригодиться хотя бы одной абонентской паре.

Распространенный в литературе вариант максимизации суммарного потока по сети не удовлетворяет первому требованию. Произвольно взятое конкурентное распределение потоков (5), вообще говоря, не отвечает второму условию, поскольку невозможность обеспечить требования одной тяготеющей пары (например, ребро соединения которой вышло из строя) не способствует стремлению удовлетворить требования остальных. Тем не менее сама структура (физический граф) сети ставит ее пользователей в неравные условия, учет которых позволяет выбрать из всех конкурентных распределений потоков максимально обеспечивающее требования всех тяготеющих пар без дискриминации какой-либо из них. Такое распределение потоков было впервые предложено в работе [7] и названо *нормативным* (требования пользователей трактуются как нормативы, которые должны обеспечиваться). Далее будем называть его *суперконкурентным*, чтобы подчеркнуть не только формальную, но и более глубокую сущностную связь с конкурентным. Суперконкурентное (нормативное) распределение потоков рекурсивно определяется следующим образом.

Обозначим через $X_0(c,d)$ множество конкурентных распределений потоков $f^0(d)$ вместе с соответствующими мультипотоками $z^0(d)$ — векторами значений потоков тяготеющих пар, т. е.

$$\begin{aligned} X_0(c,d) &= \operatorname{Arg} \max_{(f,z)\in X(c)} \left\{ \min_{i\in M} \frac{z_i}{d_i} \right\} \\ &= \left\{ (f^0(d), z^0(d)) \in X(c) \mid \min_{i\in M} \frac{z_i^0(d)}{d_i} = \theta_0 \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

Пусть $M_0 = M_0(d)$ обозначает множество индексов i тех тяготеющих пар, которым нельзя увеличить поток выше $z_i^0(d)$, не понизив при этом обеспеченность требований какой-либо тяготеющей пары ниже величины θ_0 — максиминной обеспеченности требований в МП-сети, т. е.

$$M_0 = M_0(d) = \left\{ i \in M \mid \frac{z_i^0(d)}{d_i} = \theta_0 \text{ при всех } (f^0(d), z^0(d)) \in X_0(c,d) \right\}. \quad (9)$$

Очевидно, что для любого конкурентного распределения потоков $f^0(d)$ и соответствующего ему конкурентного мультипотока $z^0(d)$ существует свое множество тяготеющих пар, обеспеченность требований которых находится на уровне θ_0. Обозначим

$$\widehat{M}(f^0(d), z^0(d)) = \left\{ i \in M \mid \frac{z_i^0(d)}{d_i} = \theta_0 \right\} \text{ для } (f^0(d), z^0(d)) \in X_0(c, d).$$

В частности, среди конкурентных распределений содержатся и уравнительные распределения $\hat{f}^0(d)$, т. е. такие, для которых все тяготеющие пары остаются на уровне максиминной обеспеченности требований: $\widehat{M}(\hat{f}^0(d), \hat{z}^0(d)) = M$. Множество M_0 ищется как наименьшее по включению из $\widehat{M}(f^0(d), z^0(d))$ для конкурентных распределений потоков. Оказывается, что оно равно пересечению всех этих множеств:

$$M_0 = \cap \{ \widehat{M}(f^0(d), z^0(d)) \mid (f^0(d), z^0(d)) \in X_0(c, d) \}.$$

Указанный результат (о непустоте пересечения всех $\widehat{M}$ и о существовании таких $(\tilde{f}^0(d), \tilde{z}^0(d)) \in X_0(c, d)$, для которых $\widehat{M}(\tilde{f}^0(d), \tilde{z}^0(d)) = M_0$) вытекает из линейности задачи и доказан в [10]. На его основе и было выбрано для M_0 определение (9). Тяготеющие пары p_i с индексами из M_0 будем называть парами, имеющими нулевой уровень максиминной обеспеченности требований, подразумевая под этим уровнем значение θ_0.

Теперь мы можем ввести определение *сверхконкурентного* распределения потоков $f^1(d)$ как такого конкурентного распределения потоков, которое является конкурентным не только на нулевом, но и на более высоких уровнях (между тяготеющими парами, имеющими более высокий уровень) максиминной обеспеченности требований. А именно предположим, что $M_0 \neq M$, и рассмотрим задачу поиска первого уровня максиминной обеспеченности требований в МП-сети, т. е. значения

$$\theta_1 = \max_{(f^0(d), z^0(d)) \in X_0(c, d)} \ \min_{i \in M \setminus M_0} \frac{z_i^0(d)}{d_i}. \tag{10}$$

Аналогично (8) обозначим через $X_1(c, d)$ множество сверхконкурентных распределений потоков и мультипотоков, т. е.

$$X_1(c, d) = \operatorname{Arg} \max_{(f^0(d), z^0(d)) \in X_0(c, d)} \left\{ \min_{i \in M \setminus M_0} \frac{z_i^0(d)}{d_i} \right\} = \left\{ (f^1(d), z^1(d)) \right.$$
$$\left. \in X(c) \mid \min_{i \in M \setminus M_0} \frac{z_i^1(d)}{d_i} = \theta_1 \text{ и } \frac{z_{i_0}^1(d)}{d_{i_0}} = \theta_0 \text{ при всех } i_0 \in M_0 \right\}. \tag{11}$$

Введем множество M_1 индексов тяготеющих пар первого уровня максиминной обеспеченности требований, т. е. таких тяготеющих пар, для которых невозможно увеличить поток в МП-сети, не понизив при этом обеспеченность требований какой-либо тяготеющей пары ниже достигнутого ею уровня максиминной обеспеченности требований (ниже θ_0 для индексов из M_0 или ниже θ_1 для индексов из $M \setminus M_0$). Формально

$$\begin{aligned} M_1 &= M_1(d) \\ &= \left\{ i \in M \setminus M_0 \mid \frac{z_i^1(d)}{d_i} = \theta_1 \ \text{ при всех } \ (f^1(d), z^1(d)) \in X_1(c,d) \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

Отметим, что достаточно большие сетевые системы имеют, как правило, несколько «узких мест» (ребер, пропускная способность которых не позволяет увеличить поток), различных для разных тяготеющих пар. (Подробнее о множествах этих ребер, называемых *максиминными рассечениями* МП-сети, см. в [5, 8, 9]; о максиминных рассечениях нулевого уровня, называемых *минимальными, или «разреженными» многопродуктовыми разрезами*, см. также в [17, 19, 23].) Поэтому в произвольно взятой МП-сети скорее всего будет несколько уровней максиминной обеспеченности требований и множество всех индексов тяготеющих пар не исчерпается множеством $M_0 \cup M_1$. Поэтому имеет смысл продолжить отбор лучших среди сверхконкурентных распределений потоков и рассмотреть сверх-сверхконкурентные распределения, т. е. такие, которые учитывают конкуренцию между тяготеющими парами за достижение не только нулевого и первого уровней максиминной обеспеченности требований (за пропускную способность ребер нулевого и первого максиминных рассечений), но и более высоких уровней. Проведем рассмотрение в общем виде.

Пусть определены значения $\theta_0, \dots, \theta_l$ уровней максиминной обеспеченности требований тяготеющих пар в МП-сети от нулевого до l-го ($l \geqslant 1$) и множества $M_0, \dots, M_l$ индексов тяготеющих пар, имеющих соответствующие уровни максиминной обеспеченности требований, а также введено множество $X_l(c,d)$ l-сверхконкурентных распределений потоков и мультипотоков $(f^l(d), z^l(d))$. Предположим, что $M_0 \cup \ldots \cup M_l \neq M$, т. е. в сети еще остались тяготеющие пары, которым ресурсы МП-сети позволяют увеличить обеспеченность их требований без дискриминации остальных пользователей. Тогда аналогично (10)–(12) рассмотрим задачу поиска $(l+1)$-го уровня максиминной обеспеченности требований, т. е. значения

$$\theta_{l+1} = \max_{(f^l(d), z^l(d)) \in X_l(c,d)} \ \min_{i \in M \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{l} M_j} \frac{z_i^l(d)}{d_i}, \tag{13}$$

и определим множество $X_{l+1}(c,d)$ $(l+1)$-сверхконкурентных распределений потоков и мультипотоков $(f^{l+1}(d), z^{l+1}(d))$ как множество реализаций максимума в (13), т. е.

$$X_{l+1}(c,d) = \mathrm{Arg} \max_{(f_i^l(d), z_i^l(d)) \in X_l(c,d)} \left\{ \min_{i \in M \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{l} M_j} \frac{z_i^l(d)}{d_i} \right\}$$

$$= \left\{ (f^{l+1}(d), z^{l+1}(d)) \in X(c) \mid \min_{i \in M \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{l} M_j} \frac{z_i^{l+1}(d)}{d_i} = \theta_{l+1} \right.$$

$$\left. \text{и } \frac{z_{i_j}^{l+1}(d)}{d_{i_j}} = \theta_j \text{ при всех } i_j \in M_j, \quad j = 0, 1, \ldots, l \right\}, \tag{14}$$

а также множество M_{l+1} индексов тяготеющих пар, имеющих $(l+1)$-й уровень максиминной обеспеченности требований, т. е.

$$M_{l+1} = M_{l+1}(d) = \left\{ i \in M \setminus \bigcup_{j=0}^{l} M_j \mid = \frac{z_i^{l+1}(d)}{d_i} \right.$$

$$\left. = \theta_{l+1} \text{ при всех } (f^{l+1}(d), z^{l+1}(d)) \in X_{l+1}(c,d) \right\}. \tag{15}$$

Множество M_{l+1} состоит из индексов таких тяготеющих пар, для которых невозможно увеличить соответствующую компоненту мультипотока, не уменьшая обеспеченность требований какой-либо тяготеющей пары ниже достигнутого ею или же $(l+1)$-го уровня максиминной обеспеченности требований в сети (ниже θ_j для индексов из M_j, $j = 0, 1, \ldots, l$, или ниже θ_{l+1} для остальных индексов).

Если множество тяготеющих пар не исчерпано, то повторяем построения (13)–(15), заменяя l на $l+1$ до тех пор, пока на последнем шаге $L = L(d)$ не получим $M_0 \cup \ldots \cup M_L = M$, т. е.

$$L = \min \{ l \geqslant 0 \mid M_0 \cup \ldots \cup M_l = M \}.$$

Очевидно, что $L \leqslant m$.

Любое L-сверхконкурентное распределение потоков $f^L(d)$ будем называть *суперконкурентным*. Всем суперконкурентным распределениям соответствует единственный суперконкурентный мультипоток $z^L(d)$ с компонентами

$$z_i^L(d) = \begin{cases} \theta_0 d_i, & \text{если } i \in M_0, \\ \theta_1 d_i, & \text{если } i \in M_1, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta_L d_i, & \text{если } i \in M_L. \end{cases}$$

Ни одна компонента вектора $z^L(d)$ не может быть увеличена в рамках множества $Z(c)$ без уменьшения потока какой-либо другой тяготеющей пары. Таким образом, суперконкурентный мультипоток $z^L(d)$ является парето-оптимальным (эффективным) вектором потоков, т. е. максимальным элементом множества $Z(c)$ достижимых мультипотоков; его нельзя увеличить за счет более полного использования имеющейся пропускной способности ребер сети, даже если часть из них осталась недозагруженной (остались нестрогие неравенства в (2) для некоторых $f^L(d)$). Поэтому можно утверждать, что в целях обеспечения требований тяготеющих пар ресурсы МП-сети суперконкурентными распределениями потоков используются в полной мере.

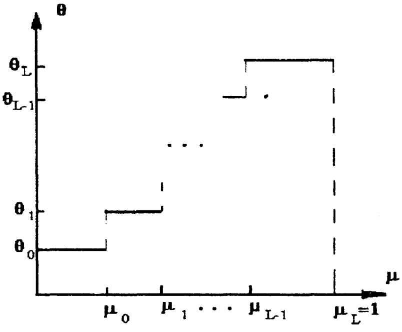
Вектор $z^L(d)$ будет ближайшим к d мультипотоком из паретовской границы $Z(c)$ в метрике $\mathbf{L}_\infty(M)$. В [13] такие векторы называются симметрично лексикографически оптимальными и предлагаются в качестве «справедливого» решения в теории коллективного выбора [12]. Симметрия в нашем случае соответствует равноправности пользователей — тяготеющих пар сети — относительно обеспечения их требований. Предположение равноправности или недискриминирования и лежит в основе концепции конкурентного распределения потоков (считается, что относительные «веса» абонентов учтены в векторе d требований абонентских пар). Таким образом, сохраняя все достоинства конкурентного распределения потоков, суперконкурентное распределение свободно от его недостатков. В частном случае $M_0 = M$ эти определения совпадают.

Замечание 3. Вообще говоря, вектор $z^L(d)$ не максимизирует суммарный поток всех тяготеющих пар в сети (иначе он вполне мог бы оказаться дискриминационным для некоторых пользователей), хотя, будучи парето-оптимальным, суперконкурентный мультипоток максимизирует на $Z(c)$ сумму значений потоков с некоторыми весовыми коэффициентами. Например, в случае $L = m$ в качестве весовых коэффициентов могут быть выбраны любые положительные числа, а при $L = 0$ ($M_0 = M$) многим разным d может соответствовать один и тот же вектор весовых коэффициентов — направляющий вектор той грани паретовской границы множества $Z(c)$, которой принадлежит вектор $z^L(d)$.

Для дальнейшего полезно ввести отдельное обозначение $\eta_i = \eta_i(c, d)$ для $z_i^L(d)/d_i$ — обеспеченности требований i-й тяготеющей пары при суперконкурентном распределении потоков —

$$\eta_i = \theta_l \quad \text{для} \quad i \in M_l.$$

Вектор $\eta(c, d) = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ описывает распределение тяготеющих пар по уровням обеспеченности требований, т. е. фактически характеризует



положение каждой тяготеющей пары в сети (чем больше компонента η_i, тем лучше положение пары p_i по сравнению с другими тяготеющими парами). Естественно, это положение зависит от расположения пары в сети (структуры физического и логического графов), от вектора c пропускной способности и от вектора d требований всех тяготеющих пар.

Полученный в процессе определения $z^L(d)$ набор $(\theta_0, M_0, \dots, \theta_L, M_L)$ дает достаточно информативную характеристику качества обслуживания пользователей МП-сети в целом, т. е. безотносительно к обеспеченности требований конкретных тяготеющих пар. Построим соответствующую диаграмму (см. рисунок). По вертикальной оси отложим значения θ_l, $l = 0, 1, \dots, L$, уровней обеспеченности требований, а по горизонтальной — значения

$$\mu_l = \sum_{i \in \bigcup_{j=0}^{l} M_j} d_i \Big/ \sum_{i \in M} d_i,$$

т. е. суммарные величины тех требований, которые могут быть обеспечены на уровне не выше l-го, приведенные к сумме всех требований пользователей МП-сети. Точки $(\mu_0, \theta_0), (\mu_1, \theta_1), \dots, (\mu_L, \theta_L)$ соединим между собой с помощью «ступенек». Получим ступенчатую функцию $\theta(\mu)$ — *диаграмму обеспеченности требований*. Любая точка (μ, θ) на диаграмме означает, что доля μ всех требований обеспечена не более чем на θ или, в процентном отношении, не более чем на $100\theta\%$.

Степень необеспеченности требований тяготеющих пар характеризуется тем, насколько ниже единичного уровня проходит диаграмма обеспеченности требований. Площадь под функцией $\min\{1, \theta(\mu)\}$ равна той части всех требований тяготеющих пар МП-сети, которая может быть обеспечена при суперконкурентном распределении потоков.

Обозначим ее через

$$\chi = \sum_{\theta_l \leqslant 1} \theta_l \sum_{i_l \in M_l} d_{i_l} \Big/ \sum_{i \in M} d_i = \sum_{i \in M} \min\{z_i^L(d), d_i\} \Big/ \sum_{i \in M} d_i.$$

В частности, при $\theta_L \leqslant 1$ имеем

$$\chi = \sum_{l=0}^{L} \theta_l \sum_{i_l \in M_l} d_{i_l} \Big/ \sum_{i \in M} d_i = \sum_{i \in M} z_i^L(d) \Big/ \sum_{i \in M} d_i.$$

Задача (13) может быть представлена в виде задачи линейного программирования, аналогичной (7) для (5): найти

$$\theta_{l+1} = \max_{(f,z,\theta)} \Big\{ \theta \mid (f,z) \in X(c),\ z_{i_0} = \theta_0 d_{i_0} \text{ при всех } i_0 \in M_0, \dots,$$
$$z_{i_l} = \theta_l d_{i_l} \text{ при всех } i_l \in M_l z_i \geqslant \theta d_i,\ \ i \in M \setminus \bigcup_{j=0}^{l} M_j \Big\}.$$

Методы поиска сверх- и суперконкурентных распределений потоков будут рассмотрены в конце п. 3. Отметим только, что обычно не требуется осуществлять поиск всех $\theta_0, \dots, \theta_L$, достаточно получить значение $\theta_l \geqslant 1$. Тогда соответствующее l-сверхконкурентное распределение потоков $f^l(d)$ является безусловно приемлемым для тяготеющих пар с индексами из $M \setminus \bigcup_{j=0}^{l-1} M_j$, так как все их требования полностью удовлетворены, а для остальных тяготеющих пар нет оснований рассчитывать на увеличение потока, поскольку оно может быть достигнуто только за счет уменьшения потоков тяготеющих пар, имеющих отнюдь не бо́льшую обеспеченность требований, т. е. за счет дискриминирования других пользователей МП-сети.

3. До перехода к численным методам решения полученной лексикографической задачи необходимо исследовать устойчивость получаемого решения (как значений потоков для тяготеющих пар, так и приемлемых распределений потоков по ребрам физического графа МП-сети) по отношению к небольшим изменениям числовых параметров задачи, когда вектор c пропускной способности ребер графа G и вектор d требований могут подвергаться малым возмущениям. Соответствующее исследование было проведено в [2–4], откуда следует непрерывность по Липшицу вектор-функции $\eta(c,d)$ на любом параллелепипеде $\mathscr{P} = [\hat{c}, \bar{c}] \times [\hat{d}, \bar{d}]$ с $\hat{c}, \hat{d} > 0$, а также отображения вектора (c,d) в множество крайних точек многогранника $X_L(c,d)$ суперконкурентных распределений потоков и мультипотоков.

Что касается сверхконкурентных решений, то можно показать полунепрерывность сверху по Липшицу на $\mathscr{P}$ отображения (c, d) в множество крайних точек многогранника $X_l(c, d)$. Однако когда $0 < l < L$, непрерывность множества сверхконкурентных крайних точек не гарантируется. В этом состоит определенный недостаток сверхконкурентных решений. Вместе с тем, если оперировать с такими решениями, ориентируясь не на номер уровня, а лишь на достигнутые значения потоков для тяготеющих пар, указанного недостатка можно избежать. Так в случае определения последнего уровня лексикографии через достижение единичной обеспеченности требований (или любой другой заданной величины θ^*)

$$L^* = \min\{l \mid \theta_l \geqslant \theta^* \quad \text{или} \quad M_0 \cup \ldots \cup M_l = M\}$$

получим непрерывность по Липшицу для $X_{L^*(c,d)}(c, d)$ на $\mathscr{P}$. (Действительно, множество $X_{L^*(c,d)}(c, d)$ может быть представлено в виде

$$X_{L^*(c,d)}(c, d) = \{(f, z) \in X(c) \mid z_i \geqslant \min[\theta^*, \eta_i(c, d)d_i] \quad \text{при всех } i = 1, \ldots, m\},$$

где параметры входят лишь в правую часть, а функция минимума непрерывна.)

Для описания алгоритма поиска суперконкурентного решения нам понадобится ряд вспомогательных построений и утверждений из [2–4], представляющих также самостоятельный интерес.

Рассмотрим произвольное разбиение множеств $M_0, \ldots, M_L$ на непустые непересекающиеся подмножества $N_t \subseteq M$:

$$M_0 = \bigcup_{t=0}^{n_0} N_t, \ M_1 = \bigcup_{t=n_0+1}^{n_0+n_1} N_t, \ \ldots, \ M_L = \bigcup_{t=n_0+\ldots+n_{L-1}+1}^{n_0+\ldots+n_L} N_t.$$

Выпишем последовательность задач линейного программирования:

$$\Theta_0 = \max_{(f,z)\in\mathscr{X}_0} \theta \ (= \theta_0), \tag{16}$$

где $\mathscr{X}_0 = \{(f, z) \in X(c) \mid -z_i + \theta d_i \leqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, m\}$;

$$\Theta_1 = \max_{(f,z)\in\mathscr{X}_1} \theta \ (= \theta_0 \ \text{ или } \theta_1), \tag{17}$$

где $\mathscr{X}_1 = \{(f, z) \in X(c) \mid \Theta_0 d_i - z_i = 0, \ i \in N_0, \ \theta d_i - z_i \leqslant 0, \ i \notin N_0\}$;

$$\Theta_{t+1} = \max_{(f,z)\in\mathscr{X}_t} \theta \ (= \theta_0 \ \text{ или } \theta_1 \ \text{ или } \ldots \ \text{ или } \theta_{t+1}), \tag{18}$$

где $\mathscr{X}_t = \{(f, z) \in X(c) \mid -z_i + \Theta_j d_i = 0, \ i \in N_j, \ j = 0, 1, \ldots, t, -z_i + \theta d_i \leqslant 0, \ i \notin N_0 \cup \ldots \cup N_t\}$, $t = 1, 2, \ldots$

Из формулировки задач (13)–(15) и (16)–(18) вытекает

Утверждение 1. *Для любого i из M, принадлежащего множеству N_t, значение суперконкурентной обеспеченности требований i-й тяготеющей пары η_i равно Θ_t.*

Положим $T = n_0+\ldots+n_L$. Из утверждения 1 следует, что множество оптимальных решений подзадачи (18) для $t = T-1$ совпадает с $X_L(c,d)$, т. е.

$$X_L(c,d) = \operatorname{Arg} \max_{(f,z)\in \mathscr{X}_{T-1}} \theta,$$

где $\mathscr{X}_{T-1} = \{(f,z) \in X(c) \mid -z_i+\Theta_j d_i = 0$ при $i \in N_j$ и $j = 1,2,\ldots,T-1$; $-z_i + \theta d_i \leqslant 0$ при $i \notin N_0 \cup \ldots \cup N_{T-1}\}$. Следовательно, задача (16)–(18) эквивалентна лексикографической последовательности задач (7)–(9), (13)–(15).

В дальнейшем любой такой набор $\{N_t\}_{t=1}^{T}$ будем называть *допустимым разбиением* в задаче (16)–(18).

В частности, в качестве N_0 рассмотрим множество $\mathscr{N}_0$ — произвольное непустое подмножество индексов тех ограничений $-z_i + \theta d_i \leqslant 0$, которым соответствуют положительные компоненты вектора некоторого оптимального решения задачи, двойственной к (16) (этот вектор может быть получен в результате работы стандартной процедуры симплекс-метода). Из условия дополняющей нежесткости следует, что для всякой такой компоненты соответствующее ограничение будет выполняться как равенство для любого оптимального решения (16). Из структуры матрицы ограничений (16) следует, что $\mathscr{N}_0 \neq \varnothing$. Если $\Theta_1 > \Theta_0$, то $\mathscr{N}_0 = M_0$, иначе $\mathscr{N}_0 \subset M_0$.

Определим множество $\mathscr{N}_1$ как произвольное непустое подмножество индексов тех ограничений $-z_i+\theta d_i \leqslant 0$, $i \notin \mathscr{N}_0$, которым соответствуют положительные компоненты вектора некоторого оптимального решения задачи, двойственной к (17), и положим в (18) $N_1 = \mathscr{N}_1$. Далее определим множество $\mathscr{N}_2$ как произвольное непустое подмножество индексов тех ограничений $-z_i + \theta d_i \leqslant 0$, $i \notin \mathscr{N}_0 \cup \mathscr{N}_1$, которым соответствуют положительные компоненты вектора некоторого оптимального решения задачи, двойственной к (18) с $t = 1$, положим в (18) $N_2 = \mathscr{N}_2$ и т. п. Для первого номера q такого, что $\Theta_q > \Theta_0$, получим $M_0 = \mathscr{N}_0 \cup \ldots \cup \mathscr{N}_{q-1}$. Остальные M_l пересчитываются аналогично. Таким образом, последовательность $\mathscr{N}_0$, $\mathscr{N}_1, \ldots$ является допустимым разбиением.

Для множеств M_l справедлив следующий результат.

Фиксируем последовательность векторов $(c^\kappa, d^\kappa) \to (c, d)$, где $\kappa \in \mathscr{K}$, а $\mathscr{K}$ — бесконечное индексное множество, и рассмотрим последовательность $M_0^\kappa, \ldots, M_{L_\kappa}^\kappa$ подмножеств из $\{1, 2, \ldots, m\}$, определяемых по аналогии с $M_0, \ldots, M_L$ как

$$M_{l+1}^\kappa = \Big\{ i \notin M_0^\kappa \cup \ldots \cup M_l^\kappa \mid z_i = \theta_{l+1}^\kappa d_i^\kappa \text{ при всех } (f, z) \in X_{l+1}^\kappa$$

$$= \operatorname{Arg} \max_{(f,z) \in X_l^\kappa} \min_{i \notin M_0^\kappa \cup \ldots \cup M_l^\kappa} \frac{z_i}{d_i^\kappa} \Big\}, \; l = -1, 0, 1, \ldots, L_\kappa,$$

формально полагая $M_{-1}^\kappa = \varnothing$, $X_{-1}^\kappa = X(c^\kappa)$. Здесь θ_{l+1}^κ — значение задачи вида (13) с заменой X_j и M_j на X_j^κ и M_j^κ; $\{1, 2, \ldots, m\} = M_0^\kappa \cup \ldots \cup M_{L_\kappa}^\kappa$.

Утверждение 2 [2]. *При любом достаточно большом $\kappa \in \mathscr{K}$ последовательность $M_0^\kappa, \ldots, M_{L_\kappa}^\kappa$ является допустимым разбиением в задаче* (16)–(18).

Этот результат обобщает аналогичный результат для задачи определения θ_0 [9, утверждение 5].

Теперь для поиска суперконкурентного распределения потоков и мультипотока — решения (f^L, z^L) лексикографической последовательности задач (5), (8), (9) и (13)–(15) с $l = 0, 1, \ldots, L-1$ — можно применять методы линейного программирования. Действительно, согласно приведенным результатам указанная последовательность задач сводится к лексикографической последовательности задач линейного программирования (16)–(18), которая является устойчивой по отношению к возмущениям вектора требований и вектора пропускной способности. Однако при практическом счете могут возникать еще и неточности при вычислении значений критериев и решения.

В [2] предлагается процедура регуляризации полученной задачи поиска суперконкурентного распределения потоков и мультипотока, т. е. такой способ построения лексикографической последовательности задач линейного программирования для ее решения, который позволяет распространить результат об устойчивости на случай возможности вычислительных погрешностей.

Рассмотрим процедуру численного поиска суперконкурентного решения задачи о распределении потоков в МП-сети с помощью последовательности подзадач (16)–(18). Предположим, что параметры d и c известны не точно, а даны их приближенные значения d' и c', где вектор $(c', d') \in \mathscr{P}$. Кроме того, предположим, что прямое и двойственное решения, а также оптимальное значение для t-й подзадачи, $t = 0, 1, \ldots, L$, определяются с погрешностью, не превосходящей $\varepsilon \geqslant 0$.

Обозначим через $\Theta_t'(\varepsilon)$ приближенное значение t-й подзадачи. При любом t в качестве множества N_t возьмем множество $\mathscr{N}_t'(\varepsilon)$ номеров тех компонент приближенного двойственного решения $\lambda'(\varepsilon)$ t-й подзадачи, соответствующих последней группе ограничений (18), для которых выполнено неравенство

$$d_i'\lambda_i'(\varepsilon) \geqslant 1/m \quad \text{при условии} \quad i \in M \setminus \bigcup_{j=0}^{t-1} N_j. \tag{19}$$

Для точных двойственных переменных t-й подзадачи, $t = 0, 1, \ldots, L$, зависящей от (c', d'), справедливо равенство

$$\sum_{i \in I_t} \lambda_i' d_i' = 1, \ \lambda_i' \geqslant 0 \ \text{ при всех } i \in M.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i \in I_t} \lambda_i'(\varepsilon) d_i' \geqslant 1 - \varepsilon \sum_{i \in I_t} d_i',$$

т. е. для всех (c', d'), достаточно близких к (c, d), и достаточно малых ε для некоторой компоненты приближенного двойственного решения $\lambda_i'(\varepsilon)$ будет выполнено (19), и значит, для всех t имеем $\mathscr{N}_t'(\varepsilon) \neq \varnothing$. Поскольку по построению $\mathscr{N}_l'(\varepsilon) \cap \mathscr{N}_j'(\varepsilon) = \varnothing$ для $l \neq j$, последовательность решаемых подзадач будет конечной.

Чтобы обеспечить разрешимость t-й подзадачи (18), $t = 0, 1, \ldots, L$, с учетом погрешности ε вычисления значений $\Theta_j(c', d')$, в ее ограничениях равенства

$$z_i = \Theta_j'(\varepsilon) d_i', \quad i \in N_j, \ j = 0, 1, \ldots, t-1,$$

заменим на неравенства с добавлением регуляризующей уступки, т. е. на

$$z_i \geqslant \Theta_j'(\varepsilon) d_i' - \varepsilon d_i', \ i \in N_j, \ j = 0, 1, \ldots, t-1. \tag{20}$$

Далее считаем, что используется именно такая процедура поиска суперконкурентного решения, и полученный результат будем помечать верхним индексом ε.

Формально рассматриваемый класс возмущений $\mathscr{P}_\varepsilon$ можно описать как совокупность троек (c', d', ε) таких, что $\{(c', d') \in \mathscr{P}' \text{ и } 0 \leqslant \varepsilon < 1/(m \max_{i \in M} d_i)\}$.

Утверждение 3 [2–4]. *Вектор-функция $\eta^\varepsilon(c, d)$ и множество суперконкурентных крайних решений непрерывны по Липшицу на $\mathscr{P}'$.*

Таким образом, предложенная процедура поиска суперконкурентного распределения потоков является устойчивой по отношению к погрешностям при решении каждой подзадачи линейного программирования, формирующей лексикографическую последовательность. Тем самым показано, что эти подзадачи можно решать приближенно, причем достаточно решить от L до m подобных задач, аналогичных поиску конкурентного равновесия. Их число будет еще меньше, если можно ограничиться сверхконкурентным решением.

Данное утверждение позволяет использовать приближенные комбинаторные методы [16, 20, 21, 24] для поиска суперконкурентного решения. Действительно, зададимся некоторым $\varepsilon > 0$. На нулевом шаге применяем алгоритм [20, 21] поиска конкурентного решения и определяем множество $\mathscr{N}_0(\varepsilon)$ индексов i продуктов, для которых выполнено неравенство (19) для двойственных переменных (поиск приближенных значений двойственных переменных осуществляется с помощью того же алгоритма). На первом шаге решаем задачу приближенного поиска конкурентного решения для тяготеющих пар с индексами из $M \setminus \mathscr{N}_0(\varepsilon)$ при наличии бюджетного ограничения (20) для $j = 0$. Здесь примени́м алгоритм [16]. И далее аналогично. Тем не менее из-за необходимости довольно точно определять двойственные переменные (с точностью $O(1/m)$, что согласно [20, 21] требует $O(m^3)$ шагов для поиска конкурентного решения) общее число итераций такого алгоритма может оказаться больше, чем для указанного выше последовательного применения методов линейного программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гермейер Ю. Б.** Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

2. **Давидсон М. Р.** Устойчивость лексикографической максиминной задачи распределения потоков в многопродуктовых сетях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35, № 3. С. 334–351.

3. **Давидсон М. Р.** Условия устойчивости множества крайних точек полиэдра и их применение для исследования многопродуктовых сетевых моделей: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ РАН, 1995.

4. **Давидсон М. Р.** Условия устойчивости множества крайних точек полиэдра и их применение в сетевой оптимизации. М.: ВЦ РАН, 1995.

5. **Давидсон М. Р., Малашенко Ю. Е., Новикова Н. М. и др.** Математические постановки задач восстановления и обеспечения живучести для многопродуктовых сетей. М.: ВЦ РАН, 1993.

6. **Краснощеков П. С., Петров А. А.** Принципы построения моделей. М.: Изд-во МГУ, 1983.
7. **Малашенко Ю. Е.** Нормативный подход к анализу многопродуктовых сетей // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1988. № 3. С. 117–122.
8. **Малашенко Ю. Е.** Математические модели анализа потоковых сетевых систем. М.: ВЦ АН СССР, 1993.
9. **Малашенко Ю. Е., Новикова Н. М.** Многокритериальный и максиминный анализ многопродуктовых сетей. М.: ВЦ АН СССР, 1988.
10. **Малашенко Ю. Е., Новикова Н. М.** Потоковые задачи анализа уязвимости многопродуктовых сетей. М.: ВЦ АН СССР, 1989.
11. **Малашенко Ю. Е., Станевичюс А.-И. А.** О решении многопродуктовой задачи с целочисленными потоками // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1982. Т. 22, № 3. С. 732–735.
12. **Подиновский В. В.** Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 2. С. 330–344.
13. **Подиновский В. В., Ногин В. Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
14. **Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.** Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.
15. **Assad A. A.** Multicommodity network flows — a survey // Networks. 1978. V. 8, N 1. P. 37–91.
16. **Grigoriadis M. D., Khachiyan L. G.** Approximate minimum-cost multicommodity flows in $\widetilde{O}(\varepsilon^{-2}KNM)$ time: Tech. Rep. LCSR-TR-245. New Brunswick, NJ: Dep. Comput. Sci., Rutgers Univ., 1995.
17. **Iri M.** On an extension of the maximum-flow minimum-cut theorem to multicommodity flows // J. Oper. Res. Soc. Japan. 1971. V. 13. P. 129–135.
18. **Kennington J. L.** A servey of linear cost multicommodity network flows // Oper. Res. 1978. V. 26, N 2. P. 209–236.
19. **Klein P., Plotkin S., Stein C., Tardos E.** Faster approximation algorithms for the unit capacity concurrent flow problem with applications to routing and finding sparse cuts // SIAM J. Comput. 1994. V. 23, N 3. P. 466–487.
20. **Leighton T., Makedon F., Plotkin S.A., Stein C., Tardos E., Tragoudas S.** Fast approximation algorithms for multicommodity flow problems // J. Comput. and Syst. Sci. 1995. V. 50, N 1. P. 228–243.
21. **Leong T., Shor P., Stein C.** Implementation of a combinatorial multicommodity flow algorithm // DIMACS Working paper. 1992.
22. **Matula D. W.** Concurrent flow and concurrent connectivity in graphs // Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science. N. Y.: Wiley-Intersci. Publ., 1985. P. 543–559.

23. **Onaga K.** A multi-commodity flow theorem // Electron. Commun. Japan. 1970. V. 53, N 7. P. 16–22.
24. **Shahrokhi F., Matula D. W.** The maximum concurrent flow problem // J. Assoc. Comput. Math. 1990. V. 37, N 2. P. 318–334.
25. **Thompson B. J., Matula D. W.** A flow rerouting algorithm for maximum concurrent flow problem with variable capacities and demands, and its application to cluster analysis: Tech. Rep. 86-CSE-12. Dep. Comput. Sci., Southern Methodist Univ., 1986.

Адрес авторов:

Вычислительный центр РАН,
ул. Вавилова, 40,
117967 Москва, Россия.
E-mail: malashen@ccas.ru;
nnovik@ccas.ru

Статья поступила
12 марта 1997 г.,
переработанный вариант —
10 сентября 1997 г.