ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 1997. Серия 2. Том 4, № 2, 55–62

УДК 519.8

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О p-МЕДИАНЕ НА МАКСИМУМ*)

М. И. Свириденко

Исследуется задача, являющаяся обобщением задачи о p-медиане на максимум. Предлагается приближенный полиномиальный алгоритм решения задачи с гарантированной оценкой погрешности $1-e^{-1}$. Алгоритм основан на вероятностном округлении оптимального решения задачи линейного программирования, которая является релаксацией целочисленной задачи.

Введение

Задача о p-медиане на максимум формулируется следующим образом. Найти

$$\max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant n; \tag{2}$$

$$x_{ij} \leqslant x_i, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad 1 \leqslant i \leqslant m; \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \leqslant p; \tag{4}$$

$$x_{ij}, x_i \in \{0,1\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{5}$$

Пусть Z^* — значение целевой функции (1) на точном решении задачи (1)–(5) и Z_A — значение целевой функции на решении, полученном некоторым алгоритмом A. Величину ρ такую, что $Z_A/Z^* \geqslant \rho$ для всех

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 95–01–00989, 97–01–00890).

индивидуальных задач, называют *оценкой относительной погрешности алгоритма A*. В [2] для задачи (1)–(5) предложен жадный алгоритм G с оценкой относительной погрешности $Z_G/Z^* \geqslant 1 - e^{-1} \approx 0,632$. В [3] дан обзор результатов для задачи (1)–(5).

В настоящей работе рассматривается динамическая задача о p-медиане на максимум. Эта задача отличается от задачи (1)–(5) тем, что описывает ситуацию, в которой размещение предприятий производится не в один момент времени, а в течение планового промежутка, состоящего из некоторого числа единичных отрезков времени. Для каждого такого отрезка заданный спрос потребителей должен быть удовлетворен предприятиями, уже размещенными к этому моменту времени. При этом число предприятий, размещаемых на каждом отрезке времени, ограничено.

Ниже предлагается полиномиальный алгоритм для приближенного решения рассматриваемой динамической задачи с оценкой относительной погрешности, совпадающей с оценкой из [2] для задачи (1)–(5). Этот алгоритм получен в результате дерандомизации вероятностного алгоритма построения приближенного решения. Обзор вероятностных методов, используемых при построении приближенных алгоритмов, имеется в [4]. Предложенный вероятностный алгоритм представляет собой вероятностную процедуру округления оптимального решения вспомогательной задачи линейного программирования. При дерандомизации алгоритма используется метод условных вероятностей [1].

1. Постановка задачи

Пусть $I = \{1, \ldots, m\}$ — множество возможных пунктов размещения предприятий; $J = \{1, \ldots, n\}$ — множество потребителей продукта, произведенного предприятиями; $T = \{1, \ldots, t_0\}$ — множество единичных отрезков времени, составляющих плановый промежуток. Эти отрезки далее будем называть годами. Математическая постановка задачи записывается следующим образом. Найти

$$\max \sum_{t \in T} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} f_{ijt} x_{ijt} \tag{6}$$

при условиях

$$\sum_{i \in I} x_{ijt} = 1, \quad j \in J, \quad t \in T, \tag{7}$$

$$x_{ijt} \leqslant \sum_{\tau=1}^{t} x_{i\tau}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad t \in T, \tag{8}$$

$$\sum_{i \in T} x_{it} \leqslant P_t, \quad t \in T, \tag{9}$$

$$x_{ijt}, x_{it} \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad t \in T. \tag{10}$$

Коэффициенты f_{ijt} и P_t имеют следующий смысл: $f_{ijt} \geqslant 0$ — прибыль, получаемая при обслуживании j-го потребителя предприятием, размещенным в i-м пункте в t-м году; $P_t \geqslant 0$ — целое число, ограничивающее количество предприятий, размещенных в t-м году. Переменные задачи x_{ijt}, x_{it} определяются следующим образом:

$$x_{ijt} = \begin{cases} 1, & \text{если предприятие, размещенное в } i\text{-м пункте,} \\ & \text{обслуживает } j\text{-го потребителя в } t\text{-м году,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$x_{it} = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м пункте размещается предприятие} \\ & \text{в } t\text{-м году,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Целевая функция (6) имеет смысл суммарной прибыли, получаемой за весь плановый период. Ограничение (7) гарантирует, что все потребители будут обслужены. Ограничение (8) означает, что в t-м году j-й потребитель может быть обслужен любым предприятием, размещенным к данному моменту времени. Условия (9) ограничивают число предприятий, размещаемых в t-м году.

2. Эквивалентная формулировка задачи (6)–(10)

Каждой паре (j,t), где $j \in J$, $t \in T$, поставим в соответствие перестановку $\varphi_{jt} = \{i_1(j,t), \ldots, i_n(j,t)\}$ такую, что $f_{i_1(j,t)jt} \geqslant f_{i_2(j,t)jt} \geqslant \cdots \geqslant f_{i_n(j,t)jt}$. В дальнейшем для краткости вместо $i_k(j,t)$ будем писать i_k. Для каждого p, $1 \leqslant p \leqslant m$, полагаем $\Delta^p_{jt} = f_{i_pjt} - f_{i_{p+1}jt}$, где $f_{i_{m+1}jt}$ считаем равным нулю. Заметим, что $f_{i_kjt} = \sum\limits_{p=k}^{m} \Delta^p_{jt}$. Используя введенные обозначения, имеем цепочку равенств

$$\sum_{i \in I} f_{ijt} x_{ijt} = \sum_{k=1}^{m} f_{i_kjt} x_{i_kjt} = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{p=k}^{m} \Delta^p_{jt} \right) x_{i_kjt} = \sum_{p=1}^{m} \Delta^p_{jt} \left(\sum_{k=1}^{p} x_{i_kjt} \right).$$

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу. Найти

$$\max \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} \sum_{p=1}^{m} \Delta^p_{jt} z^p_{jt} \tag{11}$$

при условиях

$$\sum_{\tau=1}^{t}\sum_{k=1}^{p} y_{i_k\tau} \geqslant z_{jt}^p, \quad j \in J, \quad t \in T, \quad 1 \leqslant p \leqslant m; \tag{12}$$

$$\sum_{i\in I} y_{it} \leqslant P_t, \quad t \in T; \tag{13}$$

$$y_{it}, z_{jt}^p \in \{0,1\}, \quad j \in J, \quad t \in T, \quad 1 \leqslant p \leqslant m. \tag{14}$$

Если $(x_{ijt}),(x_{it})$ — допустимое решение задачи (6)–(10), то, полагая

$$y_{it} = x_{it}, \quad j \in J, \quad t \in T,$$

$$z_{jt}^p = \sum_{k=1}^{p} x_{i_k jt}, \quad j \in J, \quad t \in T, \quad 1 \leqslant p \leqslant m,$$

получаем допустимое решение задачи (11)–(14) (ограничения (12) следуют из ограничений (8)) с тем же значением целевой функции.

Обратно, пусть $(z_{jt}^p),(y_{it})$ — допустимое решение задачи (11)–(14), обладающее свойством максимальности, т. е. если $\sum\limits_{\tau=1}^{t}\sum\limits_{k=1}^{p} y_{i_k\tau} \geqslant 1$, то $z_{jt}^p = 1$. Любое допустимое решение можно преобразовать к такому виду, не уменьшая значения целевой функции. Пусть $r(j,t) = \min\{p \mid 1 \leqslant p \leqslant n,\ z_{jt}^p = 1\}$. Заметим, что из свойства максимальности следует, что $z_{jt}^p = 1$ для всех $p \geqslant r(j,t)$. Положим

$$x_{it} = y_{it}, \quad i \in I, \quad t \in T,$$

$$x_{ijt} = \begin{cases} 1, & i = i_{r(j,t)}, \\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases} \quad i \in I, \quad j \in J, \quad t \in T.$$

Докажем, что определенное таким образом решение (x_{it}), (x_{ijt}) задачи (6)–(10) является допустимым и значение целевой функции (11) совпадает со значением целевой функции (6). Действительно,

$$\sum_{t\in T}\sum_{j\in J}\sum_{i\in I} f_{ijt}x_{ijt} = \sum_{t\in T}\sum_{j\in J} f_{i_{r(j,t)}jt}$$

$$= \sum_{t\in T}\sum_{j\in J}\Bigl(\sum_{p=r(j,t)}^{m} \Delta_{jt}^p\Bigr) = \sum_{t\in T}\sum_{j\in J}\sum_{p=1}^{m} \Delta_{jt}^p z_{jt}^p.$$

Из определения величин x_{ijt} и x_{it} видно, что ограничения (7), (9) выполняются. Докажем, что выполняются ограничения (8). Для этого достаточно показать, что $1 \leqslant \sum\limits_{\tau=1}^{t} x_{i_{r(j,t)}\tau}$ для всех $j \in J$, $t \in T$. В силу

максимальности решения $(z^p_{jt}), (y_{jt})$ и определения номера $r(j,t)$ выполняются соотношения

$$\sum_{\tau=1}^{t}\sum_{k=1}^{r(j,t)-1} y_{i_k\tau} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{\tau=1}^{t}\sum_{k=1}^{r(j,t)} y_{i_k\tau} \geqslant 1.$$

Следовательно,

$$\sum_{\tau=1}^{t} y_{i_{r(j,t)}\tau} = \sum_{\tau=1}^{t}\sum_{k=1}^{r(j,t)} y_{i_k\tau} - \sum_{\tau=1}^{t}\sum_{k=1}^{r(j,t)-1} y_{i_k\tau} \geqslant 1.$$

Из доказанного, в частности, следует, что значения целевых функций (6)–(10) и (11)–(14) на оптимальных решениях совпадают. Так как любое допустимое решение задачи (11)–(14) можно преобразовать в допустимое решение задачи (6)–(10), не уменьшая значения целевой функции, получаем, что приближенный алгоритм для решения задачи (11)–(14) можно преобразовать в приближенный алгоритм для решения задачи (6)–(10) с той же оценкой относительной погрешности.

3. Описание приближенного алгоритма и его анализ

Задача (11)–(14) является частным случаем следующей задачи. Найти

$$\max \sum_{j\in J} f_j z_j \tag{15}$$

при условиях

$$\sum_{(i,t)\in C_j} x_{it} \geqslant z_j, \quad j \in J; \tag{16}$$

$$\sum_{i\in I} x_{it} \leqslant P_t, \quad t \in T; \tag{17}$$

$$x_{it}, z_j \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad t \in T, \tag{18}$$

где $\{C_j\}$, $j \in J$, — произвольная система подмножеств множества $I \times T$.

Если ограничения (18) заменить на ограничения

$$0 \leqslant x_{it} \leqslant 1, \quad 0 \leqslant z_j \leqslant 1, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad t \in T, \tag{19}$$

получим линейную релаксацию задачи (15)–(18).

Приближенный алгоритм решения задачи (15)–(18) состоит из двух этапов. На первом решается релаксированная задача одним из известных полиномиальных алгоритмов для решения задач линейного программирования. Пусть $(x^*_{it}), (z^*_j)$ — оптимальное решение задачи (15)–(17), (19). Без ограничения общности будем считать, что $\sum_{i\in I} x^*_{it} = P_t$ для

всех $t \in T$. На втором этапе для каждого $t \in T$ формируется множество S_t по следующему правилу.

Из множества I случайным образом выбирается элемент ξ с распределением $P(\xi = i) = x^*_{it}/P_t$, затем ξ добавляется во множество S_t. Процедура повторяется независимо P_t раз.

Заметим, что если $S \subseteq I$, то $P(S \cap S_t = \varnothing) = \Bigl(1 - \sum\limits_{i \in S} x^*_i/P_t\Bigr)^{P_t}$, и что для каждого $t \in T$ множества S_t формируются независимо. Определяем решение $(x_{it}), (z_j)$ задачи (15)–(18) следующим образом:

$$x_{it} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S_t, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad i \in I, \quad t \in T,$$

$$z_j = \max_{(i,t) \in C_j} x_{it}, \quad j \in J.$$

Пусть $C_{jt} = \{i \mid (i,t) \in C_j\}$, тогда $\sum\limits_{(i,t) \in C_j} x^*_{it} = \sum\limits_{t \in T} \sum\limits_{i \in C_{jt}} x^*_{it}$. Оценим снизу математическое ожидание значения целевой функции на округленном решении, используя то, что алгоритм выбирает множества S_t независимо. Имеем

$$E = \sum_{j \in J} f_j P(z_j = 1) = \sum_{j \in J} f_j [1 - P(C_{j1} \cap S_1 = \varnothing, \dots, C_{jt_0} \cap S_{t_0} = \varnothing)]$$

$$= \sum_{j \in J} f_j \Bigl[1 - \prod_{t \in T} P(C_{jt} \cap S_t = \varnothing)\Bigr] = \sum_{j \in J} f_j \left[1 - \prod_{t \in T} \left(1 - \frac{\sum\limits_{i \in C_{jt}} x^*_{it}}{P_t}\right)^{P_t}\right].$$

Пусть $P = \sum\limits_{t \in T} P_t$ и $a_t = \sum\limits_{i \in C_{jt}} x^*_{it}/P_t$. Применяя известное неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, получаем

$$\prod_{t \in T} (1 - a_t)^{P_t} \leqslant \left(\frac{\sum\limits_{t \in T} P_t(1 - a_t)}{P}\right)^P = \left(1 - \frac{\sum\limits_{t \in T} \sum\limits_{i \in C_{jt}} x^*_{it}}{P}\right)^P.$$

Следовательно,

$$\sum_{j \in J} f_j \left[1 - \prod_{t \in T} \left(1 - \frac{\sum\limits_{i \in C_{jt}} x^*_{it}}{P_t}\right)^{P_t}\right] \geqslant \sum_{j \in J} f_j \left[1 - \left(1 - \frac{\sum\limits_{(i,t) \in C_j} x^*_{it}}{P}\right)^P\right].$$

Так как решение $(x^*_{it}), (z^*_j)$ удовлетворяют ограничениям (16), то

$$\sum_{j \in J} f_j \left[1 - \left(1 - \frac{\sum\limits_{(i,t) \in C_j} x^*_{it}}{P}\right)^P\right] \geqslant \sum_{j \in J} f_j \left[1 - \left(1 - \frac{z^*_j}{P}\right)^P\right].$$

Поскольку функция $f(z) = 1 - (1 - z/p)^p$ является вогнутой, $f(0) = 1$ и $f(1) = 1 - (1 - 1/p)^p$, имеем

$$\sum_{j\in J} f_j\left[1 - \left(1 - \frac{z_j^*}{P}\right)^P\right] \geqslant \sum_{j\in J} f_j\left[1 - \left(1 - \frac{1}{P}\right)^P\right] z_j^* \geqslant (1 - e^{-1}) \sum_{j\in J} f_j z_j^*.$$

Таким образом, получаем нижнюю оценку для математического ожидания целевой функции на округленном решении через точное значение линейной релаксации. В следующем разделе, используя метод условных вероятностей [1], получим алгоритм для приближенного решения задачи (15)–(18) с оценкой относительной погрешности $1 - e^{-1}$.

4. Дерандомизация алгоритма

Напомним, что вероятностный приближенный алгоритм состоит из $\sum\limits_{t\in T} P_t$ независимых шагов. С n-м шагом свяжем пару (t, k), где $n = k + \sum\limits_{\tau=1}^{t-1} P_\tau$. Метод условных ожиданий [1] гарантирует нахождение такого допустимого решения, что значение целевой функции на нем не меньше математического ожидания значения целевой функции на решении, получаемом вероятностным алгоритмом. Пусть $N = (N_{11}, N_{12}, \ldots, N_{1P_1}, N_{21}, \ldots, N_{t_0 P_{t_0}})$ — вектор назначений, получаемый в конце рандомизированного алгоритма, т. е. $N_{tk} = (i, t)$, если на шаге (t, k) выбирается i-й элемент из множества I. Пусть $E(N)$ — математическое ожидание целевой функции (11) на векторе N.

В методе условных вероятностей n-я переменная вектора N определяется на n-й итерации. Пусть на n-й итерации уже определены первые $n-1$ переменных $\overline{N}_1, \ldots, \overline{N}_{n-1}$ вектора N. Для каждого $i \in I$ вычисляем условные математические ожидания $E(N \mid \overline{N}_1, \ldots, \overline{N}_{n-1}, \overline{N}_n = (i, t))$. Используя известное равенство для условной вероятности, имеем

$$\begin{aligned} E(N \mid \overline{N}_1, \ldots, \overline{N}_{n-1}) &= \sum_{i\in I} E(N \mid \overline{N}_1, \ldots, \overline{N}_{n-1}, N_n = (i, t)) P(N_n = (i, t)) \\ &\leqslant \max_{i\in I} \{E(N \mid \overline{N}_1, \ldots, \overline{N}_{n-1}, N_n = (i, t))\}. \end{aligned}$$

Полагаем $\overline{N}_n = (\tilde{i}, t)$, где $\tilde{i}$ — индекс, на котором достигается максимум. Повторяя эту процедуру $P = \sum\limits_{\tau=1}^{t_0} P_\tau$ раз, получим решение, на котором значение целевой функции не превосходит $E(N)$.

Покажем, как вычислять условное ожидание за полиномиальное время. Используя линейность математического ожидания, достаточно показать, как вычислять $P(z_j = 1 \mid \overline{N}_1, \ldots, \overline{N}_n)$. Пусть $S = \{\overline{N}_i \mid 1 \leqslant$

$i \leqslant n\}$, т. е. S — это множество фиксированных индексов из $I \times T$. Пусть $n = k + \sum_{\tau=1}^{t-1} P_\tau$ для некоторых k и t, $1 \leqslant k \leqslant P_t$, $1 \leqslant t \leqslant t_0$. Условная вероятность вычисляется по формуле

$$P(z_j = 1 \mid \overline{N}_1, \ldots, \overline{N}_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } S \cap C_j \neq \varnothing, \\ 1 - \left[\prod_{\tau=t+1}^{t_0} \left(1 - \frac{\sum_{i \in C_{j\tau}} x^*_{i\tau}}{P_\tau} \right)^{P_\tau} \right] \left(1 - \frac{\sum_{i \in C_{jt}} x^*_{it}}{P_t} \right)^{P_t - k}, & \\ \text{если } S \cap C_j = \varnothing. & \end{cases}$$

Очевидно, что если $S \cap C_j \neq \varnothing$, то $P(z_j = 1 \mid \overline{N}_1, \ldots, \overline{N}_n) = 1$. Если $S \cap C_j = \varnothing$, то требуется найти вероятность того, что из множества C_j будет выбран элемент на оставшихся $P - n$ шагах. Величину $P(z_j = 1 \mid \overline{N}_1, \ldots, \overline{N}_n)$ можно вычислить за $O(|I| t_0)$ действий. Следовательно, общая трудоемкость алгоритма не превосходит величины $T = O(T_{LP} + mPn \cdot nt_0) = O(T_{LP} + m^3 t_0^2 n)$, где T_{LP} — временная сложность решения линейной релаксации (11)–(13), (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Alon N., Spencer J. H.** The probabilistic method. N. Y.: John Wiley and Sons Inc., 1992.
2. **Cornuejols G., Fisher M. L., Nemhauser G. L.** Location of bank accounts to optimize float: an analytic study of exact and approximate algorithms // Management Sci. 1977. V. 22, N 8. P. 789–810.
3. **Hochbaum D. S.** Approximating covering and packing problems: set cover, vertex cover, independent set, and related problems // Approximation algorithms for NP-hard problems. Boston: PWS Publ. Company, 1996. P. 94–143.
4. **Motwani R., Naor J., Raghavan P.** Randomized algorithms in combinatorial optimization // Approximation algorithms for NP-hard problems. Boston: PWS Publ. Company, 1996. P. 447–481.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
15 августа 1997 г.