ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 1998. Серия 1. Том 5, № 1, 3–19

УДК 519

О ЛОКАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ГРАФОВ, СОХРАНЯЮЩИХ ЧИСЛО НЕЗАВИСИМОСТИ

В. Е. Алексеев, В. В. Лозин

Сделана попытка сформулировать общее понятие локального преобразования графов. Понятие исследовано применительно к задаче о независимом множестве.

Введение

Независимым называется множество попарно несмежных вершин графа. Известно, что поиск независимого множества наибольшей мощности, которая называется числом независимости, является NP-полной задачей. Локальные преобразования неоднократно использовались и как средство сведения данной задачи, и как инструмент для ее решения. С точки зрения этой задачи интерес представляют преобразования, меняющие число независимости на фиксированную величину, не зависящую от графа, к которому они применяются. В качестве простейшего примера укажем удаление изолированной вершины, которое понижает число независимости в точности на единицу. Рассмотрим несколько менее тривиальных примеров.

Если в графе G имеется вершина x степени 2, которая смежна с несмежными вершинами y и z, то преобразование, заключающееся в удалении x и отождествлении y и z, понижает число независимости G в точности на единицу. Преобразование, обратное данному, было названо в [2] расщеплением вершины и использовалось для полиномиального свéдения общей задачи о независимом множестве к той же задаче для специальных классов графов.

Если x и y — смежные вершины такие, что каждая вершина, смежная с x, смежна и с y, то удаление y не изменяет числа независимости. Это преобразование было неоднократно описано в литературе под различными названиями, например элементарное сжатие [1], редукция окрестности [6]. В [1] было показано, что элементарное сжатие применимо к любому непустому хордальному графу (т. е. графу, в котором нет простых циклов длины более 3 без хорд) и, следовательно, для этих графов оно обеспечивает полиномиальное решение задачи о независимом множестве. В [6] установлено, что данное преобразование позволяет свести любой граф дуг окружности к специальной канонической форме, что обеспечивает полиномиальную разрешимость задачи в целом.

Известно немало и других преобразований, сохраняющих число независимости или изменяющих его на константу [3, 4, 7–10]. Основная цель настоящей статьи — охарактеризовать такие преобразования и предложить метод их систематического выявления.

В разд. 1 понятие локального преобразования формализуется посредством конструкции, названной схемой замены. Каждая схема замены описывает преобразования, применимые только к графам, содержащим порожденный подграф, изоморфный некоторому заданному графу S (но, вообще говоря, не ко всем таким графам). Этот подграф заменяется другим заданным графом T. Схема состоит из описания графов S и T и правил, по которым преобразуется множество ребер, соединяющих изменяемую часть графа с неизменяемой. Применение схемы замены к конкретному графу допускает известную свободу действий, и результат такого применения не является заранее однозначно определенным. В этом отношении схемы замены подобны порождающим грамматикам.

В терминах схем замены проблема описания и выявления преобразований, увеличивающих или уменьшающих число независимости на заданную константу, легко сводится к изучению преобразований, оставляющих это число неизменным. Поэтому далее рассматриваются именно эти последние преобразования; они называются α-сохраняющими.

В разд. 2 доказываются два критерия, характеризующие α-сохраняющие преобразования. Основываясь на одном из них, в разд. 3 мы описываем метод исчерпывающего поиска α-сохраняющих схем замены с данными графами S и T. В разд. 4 этот метод применяется для выявления всех α-сохраняющих схем с некоторыми конкретными S и T. С помощью найденных при этом преобразований, как показано в разд. 5, для некоторых классов графов задача о числе независимости может быть решена за полиномиальное время.

В статье рассматриваются обыкновенные графы, т. е. неориентированные графы без петель и кратных ребер. Множество всех обыкновенных графов обозначается через Γ. Если $G \in \Gamma$, то

VG, EG — множества вершин и ребер графа G соответственно;

$I(G)$ — множество всех независимых множеств графа G;

$\alpha(G)$ — число независимости графа G.

Если $U \subseteq VG$, то

$G\langle U\rangle$ — подграф графа G, порожденный множеством вершин U;

$G-U$ — подграф, получаемый из G удалением вершин множества U;

$N(x,U)$ — множество всех вершин из U, смежных с вершиной $x \in VG$.

Для некоторых графов мы используем стандартные обозначения:

K_n — полный граф с n вершинами (в частности, K_0 — граф с пустым множеством вершин);

$K_{n,m}$ — полный двудольный граф с долями мощности n и m;

P_n, C_n — простая цепь и простой цикл с n вершинами соответственно.

Через W обозначается граф, полученный из $K_{1,3}$ добавлением одного ребра.

Множество графов X называется *наследственным,* если всякий порожденный подграф графа из X также принадлежит множеству X. Если $M \subseteq \Gamma$, то $\Gamma(M)$ обозначает множество графов из Γ, не содержащих порожденных подграфов, изоморфных графам из M. Известно, что класс графов X является наследственным тогда и только тогда, когда существует множество $M \subseteq \Gamma$ такое, что $X = \Gamma(M)$. Например, для упомянутого выше класса хордальных графов $M = \{C_n \mid n > 3\}$.

1. Схема замены

Определение. *Схемой замены* называется тройка $\Sigma = (S,T,L)$, где S и T — графы ($S \neq K_0$), L — множество пар вида (P,Q), где $P \subseteq VS$, $Q \subseteq VT$. Каждая такая пара называется *правилом,* P — *левой,* Q — *правой частью* правила.

Схема $\Sigma = (S,T,L)$ *применима* к графу G, если в множестве его вершин имеется подмножество U, порождающее подграф, изоморфный S, и существует такое изоморфное вложение φ графа S в G, что для любой вершины $x \in VG - U$ множество $\varphi^{-1}(N(x,U))$ является левой частью некоторого правила из L. В приведенном ниже описании применения схемы Σ к графу G и в дальнейшем в подобных случаях во избежание громоздкости граф S будем отождествлять с изоморфным ему подграфом графа G, считая, что $U = VS$.

Применение схемы Σ к графу G состоит в выполнении следующих действий: сначала удаляются все вершины множества VS, добавляется $|VT|$ новых вершин и на них строится граф T. Затем для каждой вершины $x \in VG - VS$ в L отыскивается какое-либо правило (P,Q) с $P = N(x,VS)$ и добавляются ребра, соединяющие x со всеми вершинами множества, которое при построении T отождествляется с Q. Если результирующим является граф G', то мы будем говорить, что G может быть преобразован в G' по схеме Σ. Ясно, что имеются два источника неоднозначности такого преобразования: произвол в отождествлении S

с подграфом графа G и произвол в выборе для каждой вершины x правила, в соответствии с которым преобразуется ее окрестность.

На языке введенных понятий упоминавшиеся ранее преобразования описываются следующим образом.

Удаление вершины: S — граф с единственной вершиной a, $T = K_0$, L состоит из двух правил $(\varnothing, \varnothing)$ и $(\{a\}, \varnothing)$. При исключении из L второго правила получаем схему, описывающую удаление только изолированных вершин.

Расщепление вершины: S — граф из одной вершины a, T содержит три вершины b_1, b_2, b_3 и два ребра (b_1, b_2), (b_1, b_3), L состоит из правил $(\varnothing, \varnothing)$, $(\{a\}, \{b_2\})$, $(\{a\}, \{b_3\})$, $(\{a\}, \{b_2, b_3\})$.

Элементарное сжатие: S — граф из двух вершин a_1, a_2 и одного ребра, T — граф из единственной вершины b, L состоит из трех правил: $(\varnothing, \varnothing)$, $(\{a_1, a_2\}, \{b\})$, $(\{a_2\}, \varnothing)$.

В дальнейшем будем интересоваться областями применимости некоторых схем замены. Сначала докажем одно утверждение, которое будет полезно в дальнейшем.

Граф G назовем Σ-совершенным, если к каждому его порожденному подграфу, содержащему порожденный подграф, изоморфный S, применима схема Σ. Множество всех Σ-совершенных графов обозначим через P_Σ. В определенном смысле P_Σ — это максимальный наследственный класс графов, к которым применима схема Σ. Ниже дадим некоторую характеризацию этого класса в терминах запрещенных порожденных подграфов.

Для схемы $\Sigma = (S, T, L)$ обозначим через F_Σ семейство всех подмножеств множества VS, которые не являются левой частью никакого правила из L. Каждому подмножеству $U \in F_\Sigma$ поставим в соответствие граф G_U, называемый *графом ограничений*, который получается из S добавлением единственной вершины с окрестностью U. Обозначим через H_U множество всех минимальных (по отношению «быть порожденным подграфом») графов, которые содержат G_U в качестве порожденного подграфа, но к которым не применима схема Σ; $H_\Sigma = \bigcup\limits_{U \in F_\Sigma} H_U$.

Теорема 1. $P_\Sigma = \Gamma(H_\Sigma)$.

Доказательство. Пусть $G \in P_\Sigma$. Предположим, что некоторый граф $H \in H_\Sigma$ является порожденным подграфом графа G. По построению H содержит граф S в качестве порожденного, но к нему не применима схема Σ. Это противоречит выбору G. Следовательно, $P_\Sigma \subseteq \Gamma(H_\Sigma)$.

Пусть теперь $G \in \Gamma(H_\Sigma)$. Предположим, что в G имеется порожденный подграф G', содержащий S в качестве порожденного подграфа, к которому не применима схема Σ. Тогда в графе G' найдется вершина x такая, что $N(x, VS) = U \in F_\Sigma$. Но это означает, что G' содержит порожденный подграф из множества $H_U \subseteq H_\Sigma$. Теорема 1 доказана.

2. Преобразования, сохраняющие число независимости

В данном разделе мы используем понятие схемы замены для характеризации преобразований, сохраняющих число независимости или изменяющих его на константу. Прежде всего, заметим, что достаточно рассматривать преобразования, сохраняющие число независимости, ибо изменение его на константу всегда можно компенсировать добавлением изолированных вершин к S или T. Таким образом, приходим к следующему определению.

Определение. Схема замены Σ называется *α-сохраняющей*, если $\alpha(G) = \alpha(G')$ для любого графа G', полученного из G преобразованием по схеме Σ.

Теорема 2. *Каждое из следующих условий является необходимым и достаточным для того, чтобы схема замены $\Sigma = (S, T, L)$ была α-сохраняющей.*

1°. *Для любых правил $(P_1, Q_1), \dots, (P_k, Q_k)$ из L справедливо равенство*

$$\alpha\left(S - \bigcup_{i=1}^{k} P_i\right) = \alpha\left(T - \bigcup_{i=1}^{k} Q_i\right).$$

2°. *Существуют такие отображения $\varphi : I(S) \to I(T)$ и $\psi : I(T) \to I(S)$, что для любых $A \in I(S)$, $B \in I(T)$ и любого правила $(P, Q) \in L$ выполняются условия*

$$|\varphi(A)| = |A|, \quad |\psi(B)| = |B|, \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } \ P \cap A = \varnothing, \ \text{ то } \ Q \cap \varphi(A) = \varnothing, \\ \text{если } \ Q \cap B = \varnothing, \ \text{ то } \ P \cap \psi(B) = \varnothing. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Доказательство. Достаточность условия 1° очевидна. Для доказательства его необходимости рассмотрим α-сохраняющую схему Σ, и пусть $(P_1, Q_1), \dots, (P_k, Q_k)$ — правила из L. Возьмем непересекающиеся между собой и с множеством VS множества $A_1, \dots, A_k$ такие, что $|A_1| = \dots = |A_k| > |VS|$. Построим граф G с множеством вершин $A_1 \cup \dots \cup A_k \cup VS$ и множеством ребер, состоящий из всех ребер графа S и всех ребер, соединяющих каждую вершину из A_i с каждой вершиной из P_i, $i = 1, \dots, k$. Пусть G' получен из G применением схемы Σ и при этом окрестность каждой вершины из A_i (равная P_i) заменяется на Q_i. Ясно, что наибольшим независимым множеством в G будет $A_1 \cup \ldots \cup A_k \cup B$, а в G' таковым будет $A_1 \cup \ldots \cup A_k \cup B'$, где B и B' — соответственно наибольшие независимые множества в $S - \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i$ и $T - \bigcup\limits_{i=1}^{k} Q_i$. Так как Σ является α-сохраняющей схемой, то $|B| = |B'|$.

Докажем достаточность условия 2°. Пусть φ и ψ обладают всеми перечисленными свойствами и пусть граф G преобразуется по схеме Σ в граф G'. Каждое независимое множество A в G состоит из двух частей $A_1 = A \cap VS$ и $A_2 = A - A_1$. Часть A_2 сохранится и в графе G'. Часть A_1 посредством φ отображается в независимое множество B графа G', причем $|B| = |A_1|$ и $B \subseteq VT$. Если $x \in A_2$ и ее окрестность преобразуется в соответствии с правилом (P, Q), то $P \cap A_1 = \varnothing$, и согласно (2) имеем $Q \cap B = \varnothing$. Следовательно, в графе G' вершины из B несмежны со всеми вершинами из A_2 и $B' = A_2 \cup B$ является независимым множеством таким, что $|B'| = |A|$. Поэтому $\alpha(G') \geqslant \alpha(G)$. Точно так же доказывается обратное неравенство.

Для доказательства необходимости условия 2° рассмотрим α-сохраняющую схему Σ. Возьмем какое-либо $A \in I(S)$, и пусть $(P_1, Q_1), \ldots, (P_k, Q_k)$ — все такие правила из L, что $P_i \cap A = \varnothing$. Согласно доказанному выше имеем $\alpha\Big(S - \bigcup\limits_{i=1}^{k} P_i\Big) = \alpha\Big(T - \bigcup\limits_{i=1}^{k} Q_i\Big)$. Значит, имеется такое $B \in I(T)$, что $|B| = |A|$ и $B \cap Q_i = \varnothing$ для $i = 1, \ldots, k$. Поэтому если положить $\varphi(A) = B$, то (1) и (2) будут выполнены для A. Поступим так со всеми $A \in I(S)$, а затем аналогичным образом определим отображение ψ. Полученные φ и ψ будут удовлетворять (1) и (2) для всех A, B. Теорема 2 доказана.

3. Перечисление α-сохраняющих схем

Из условия 1° теоремы 2 следует, в частности, что для α-сохраняющих схем справедливо равенство $\alpha(S) = \alpha(T)$. Зафиксируем некоторую пару графов S и T, удовлетворяющую этому равенству, и рассмотрим вопрос о поиске всех α-сохраняющих схем с данными S и T. Множество этих схем обозначим через $\Phi_{S,T}$. Перебор α-сохраняющих схем можно сократить, если рассматривать не любые схемы, а только самые сильные в определенном смысле. Будем говорить, что схема Σ_1 сильнее Σ_2, если всякий раз, когда граф G можно преобразовать в G' по Σ_2, это можно сделать и по Σ_1. Очевидно, что интерес представляют прежде всего максимальные относительно этого упорядочения схемы.

Для поиска максимальных схем из множества $\Phi_{S,T}$ разложим его на подмножества следующим образом. Для каждой пары отображений $\varphi : I(S) \to I(T)$ и $\psi : I(T) \to I(S)$, удовлетворяющей (1), определим $\Phi_{S,T}^{\varphi,\psi}$

как множество тех схем из $\Phi_{S,T}$, которые удовлетворяют условиям (2). Покажем, что для любых S, T, φ, ψ множество $\Phi_{S,T}^{\varphi,\psi}$ содержит только один максимальный элемент.

Теорема 3. *Для любых графов S и T таких, что $\alpha(S) = \alpha(T)$, и любой пары отображений $\varphi : I(S) \to I(T)$ и $\psi : I(T) \to I(S)$, удовлетворяющей (1), существует единственная α-сохраняющая схема, максимальная в множестве $\Phi_{S,T}^{\varphi,\psi}$.*

Доказательство. Сначала убедимся в единственности α-сохраняющей схемы. Прежде всего, заметим, что схема $\Sigma_1 = (S, T, L_1)$ сильнее схемы $\Sigma_2 = (S, T, L_2)$ тогда и только тогда, когда $L_2 \subset L_1$. Предположим, что $\Sigma_1 = (S, T, L_1)$ и $\Sigma_2 = (S, T, L_2)$ — две максимальные α-сохраняющие схемы множества $\Phi_{S,T}^{\varphi,\psi}$, т. е. $L_2 \not\subset L_1$ и $L_1 \not\subset L_2$. Поскольку условия (2) выполняются как для L_1, так и для L_2, они справедливы и для $L_1 \cup L_2$. Следовательно, схема $\Sigma = (S, T, L_1 \cup L_2)$ принадлежит $\Phi_{S,T}^{\varphi,\psi}$, причем Σ сильнее Σ_1 и Σ_2. Противоречие.

Чтобы показать существование α-сохраняющей схемы, рассмотрим следующую систему включений в алгебре множеств с переменными $X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$, где $n_1 = |VS|$, $n_2 = |VT|$,

$$\left.\begin{aligned} \bigcup_{j\in\varphi(A)} Y_j \subseteq \bigcup_{i\in A} X_i \quad &\text{для каждого } A \in I(S),\\ \bigcup_{i\in\psi(B)} X_i \subseteq \bigcup_{j\in B} Y_j \quad &\text{для каждого } B \in I(T). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Каждому включению множеств $X_{i_1} \cup \ldots \cup X_{i_s} \subseteq Y_{j_1} \cup \ldots \cup Y_{j_k}$ поставим в соответствие логическую функцию $(x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_s}) \to (y_{j_1} \vee \ldots \vee y_{j_k})$, и пусть конъюнкция таких функций, построенных по всем включениям системы (3), есть $f(x_1, \dots, x_{n_1}, y_1, \dots, y_{n_2})$. Каждому двоичному набору $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \dots, \beta_{n_2})$, на котором функция f равна 1, поставим в соответствие правило (P, Q) с $P = \{i \mid \alpha_i = 1\}$ и $Q = \{j \mid \beta_j = 1\}$. Пусть $L = \{(P_1, Q_1), \dots, (P_k, Q_k)\}$ — множество всех правил, построенных таким образом.

Покажем, что схема $\Sigma = (S, T, L)$ принадлежит $\Phi_{S,T}^{\varphi,\psi}$. Для всех вершин $i \in VS$ и $j \in VT$ рассмотрим множества $M_i = \{l \mid i \in P_l\}$, $N_j = \{l \mid j \in Q_l\}$ и покажем, что эти множества удовлетворяют системе (3), т. е. справедливы включения

$$\left.\begin{aligned} \bigcup_{j\in\varphi(A)} N_j \subseteq \bigcup_{i\in A} M_i \quad &\text{для каждого } A \in I(S),\\ \bigcup_{i\in\psi(B)} M_i \subseteq \bigcup_{j\in B} N_j \quad &\text{для каждого } B \in I(T). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Пусть, например, $l \in \bigcup\limits_{j \in \varphi(A)} N_j$, $l \in N_{j_*}$ для некоторого $j_* \in \varphi(A)$ и пусть правилу (P_l, Q_l) соответствует двоичный набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \dots, \beta_{n_2})$, на котором f равна 1. Это означает, что на данном наборе единице равна каждая из импликаций, составляющих f, в том числе и $\bigvee\limits_{j \in \varphi(A)} y_j \to \bigvee\limits_{i \in A} x_i$. Более того, единице равна левая часть этой импликации, поскольку $\beta_{j_*} = 1$ при $j_* \in \varphi(A)$. Следовательно, единице равна и правая часть импликации, т. е. $\alpha_{i_*} = 1$ для некоторого $i_* \in A$. Но это означает, что $l \in M_{i_*}$, т. е. $l \in \bigcup\limits_{i \in A} M_i$. Таким образом, для схемы $\Sigma = (S, T, L)$ доказана справедливость условий (4). Нетрудно видеть, что $\{l \mid P_l \cap A \neq \varnothing\} = \bigcup\limits_{i \in A} M_i$, т. е. условия (4) равносильны условиям (2). Следовательно, $\Sigma = (S, T, L) \in \Phi_{S,T}^{\varphi,\psi}$. Теорема 3 доказана.

Теорема 3 позволяет свести проблему поиска всех α-сохраняющих схем с данными S и T к перебору пар отображений φ, ψ, удовлетворяющих (1), и выявлению в каждом множестве $\Phi_{S,T}^{\varphi,\psi}$ самой сильной схемы. На самом деле вторая часть вопроса уже решена, поскольку самой сильной в $\Phi_{S,T}^{\varphi,\psi}$ является схема $\Sigma = (S, T, L)$, построенная в доказательстве теоремы 3 по условиям (3). Действительно, предположим, что некоторая α-сохраняющая схема $\Sigma' = (S, T, L')$ сильнее $\Sigma = (S, T, L)$, т. е. $L \subset L'$. Рассмотрим правило $(P_l, Q_l) \in L' - L$ и соответствующий ему двоичный набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \dots, \beta_{n_2})$. На этом наборе функция f равна 0. Следовательно, на этом наборе нулю равна некоторая импликация, скажем, $\bigvee\limits_{j \in \varphi(A)} y_j \to \bigvee\limits_{i \in A} x_i$. Это означает, что $\alpha_i = 0$ при всех $i \in A$ и существует $j \in \varphi(A)$ такое, что $\beta_j = 1$. Но это равносильно тому, что $A \cap P_l = \varnothing$ и $j \in \varphi(A) \cap Q_l$, т. е. нарушается условие (2) для схемы $\Sigma' = (S, T, L')$. Следовательно, эта схема не принадлежит $\Phi_{S,T}^{\varphi,\psi}$.

Таким образом, поиск всех α-сохраняющих схем с данными S и T может быть реализован перечислением пар отображений φ и ψ, удовлетворяющих (1). С использованием системы (3) каждой такой паре ставится в соответствие самая сильная схема множества $\Phi_{S,T}^{\varphi,\psi}$. Однако не всякая такая схема является максимальной в $\Phi_{S,T}$. Чтобы описать некоторые необходимые условия максимальности, пару отображений φ, ψ представим в виде двудольного ориентированного графа $D_{\varphi,\psi}$ с долями $I(S)$, $I(T)$ и дугами $(A, \varphi(A))$, $(B, \psi(B))$.

Теорема 4. *Пусть $\Sigma = (S, T, L)$ — максимальная α-сохраняющая схема, $\varphi : I(S) \to I(T)$ и $\psi : I(T) \to I(S)$ — отображения, удовлетворяющие условиям 2° теоремы 2. Тогда граф $D_{\varphi,\psi}$ не содержит простых путей длины 3.*

Доказательство. Предположим, что в $D_{\varphi,\psi}$ имеется путь A_1, B_1, A_2, B_2. Это соответствует включениям

$$\bigcup_{i\in A_1} X_i \supseteq \bigcup_{i\in B_1} Y_i \supseteq \bigcup_{i\in A_2} X_i \supseteq \bigcup_{i\in B_2} Y_i \tag{5}$$

из системы (3). Из графа $D_{\varphi,\psi}$ удалим дугу (A_1, B_1) и добавим к нему дугу (A_1, B_2). Тогда в (5) первое включение заменится на $\bigcup_{i\in A_1} X_i \supseteq \bigcup_{i\in B_2} Y_i$. Полученная система включений будет следствием прежней, а значит, новая схема будет сильнее. Теорема 4 доказана.

Таким образом, поиск всех максимальных α-сохраняющих схем с заданными графами S и T сводится к перечислению ориентированных двудольных графов $D = D_{\varphi,\psi}$ следующего вида: каждая компонента слабой связности D содержит единственный цикл, который согласно теореме 4 имеет длину 2, а из каждой вершины, не лежащей на цикле, выходит дуга, ведущая в цикловую вершину. Кроме того, из (2) следует, что каждая компонента слабой связности графа D лежит в некотором D_i, где через D_i обозначен подграф графа D, порожденный вершинами, соответствующими независимым множествам мощности i.

4. Примеры

Пусть $S = K_2$ и $T = K_1$ (рис. 1, *а*). В этом случае $D = D_1$ и единственный, с учетом симметрии, граф D_1 приведен на рис. 1, *б* (вершины левой доли соответствуют независимым множествам графа S, а вершины правой доли — множествам графа T; посредством «$\longleftrightarrow$» изображается цикл длины 2).

Рис. 1

Условия (3) для этого графа принимают следующий вид: $X_1 = Y_1$, $Y_1 \subseteq X_2$. По этим условиям строим соответствующую булеву функцию $(x_1 \to y_1)\&(y_1 \to x_1)\&(y_1 \to x_2)$. Она принимает значение 1 на следующих наборах: $(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ y_1 = 0)$, $(x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ y_1 = 0)$, $(x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ y_1 = 1)$. Этим наборам соответствуют три правила $(\varnothing, \varnothing)$, $(\{2\}, \varnothing)$, $(\{1,2\}, \{1\})$. Нетрудно видеть, что построенная схема описывает элементарное сжатие. Обозначим эту схему через Σ_0. Это единственная α-сохраняющая схема с $S = K_2$ и $T = K_1$.

Ранее было отмечено, что элементарное сжатие применимо к любому хордальному графу. Из теоремы 1 следует, что эти графы образуют максимальный наследственный класс, характеризующий область применимости Σ_0. Действительно, в этом случае F_{Σ_0} содержит единственное подмножество $\{1\}$, которому соответствует граф ограничений $K_{1,2}$. Так как элементарное сжатие к этому графу применимо, то $K_{1,2} \notin H_{\Sigma_0}$. Для того чтобы описать H_{Σ_0}, заметим, что, с одной стороны, всякий граф, к которому схема Σ_0 не применима, должен содержать цикл C_n с $n > 3$ (иначе граф является хордальным), а, с другой стороны, каждый такой цикл содержит $K_{1,2}$ и является минимальным порожденным подграфом, к которому не применима схема Σ_0. Следовательно, $H_{\Sigma_0} = \{C_n \mid n > 3\}$ и P_{Σ_0} — множество всех хордальных графов.

Пусть $S = \overline{K_{1,2}}$, $T = \overline{K_2}$ (рис. 2, *а*).

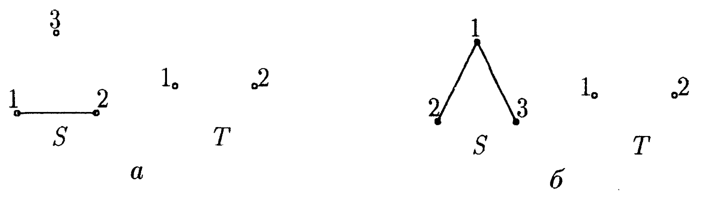


Рис. 2

Графы D_1, соответствующие существенно (с учетом симметрии) различным парам (φ, ψ), изображены на рис. 3:

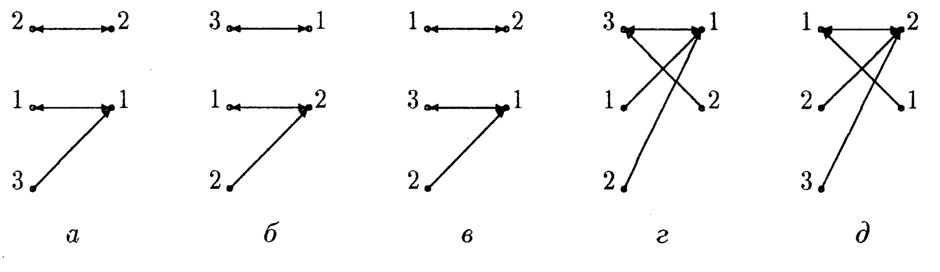


Рис. 3

Схемы, которые получаются для отображений (*б*–*д*), не являются максимальными; более сильной является схема, характеризующая элементарное сжатие. Единственная максимальная схема приведена на рис. 3, *а*. Часть условий (3), соответствующих этому графу D_1, имеет вид

$$X_1 = Y_1, \quad X_2 = Y_2, \quad Y_1 \subseteq X_3. \tag{6}$$

D_2 может иметь один из двух видов, изображенных на рис. 4:

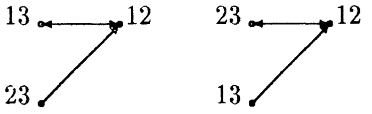


Рис. 4

Первый из них дает систему $X_1 \cup X_3 = Y_1 \cup Y_2 \subseteq X_2 \cup X_3$, что вместе с (6) эквивалентно системе

$$X_1 = Y_1, \quad X_2 = Y_2, \quad X_3 = X_1 \cup X_2.$$

К такому же результату приводит и второй граф рис. 4. Булева функция, удовлетворяющая этим условиям, принимает значение 1 на следующих наборах:

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	1

По этим наборам находим систему правил L:

$$(\varnothing, \varnothing), \quad (\{2,3\}, \{2\}), \quad (\{1,3\}, \{1\}), \quad (\{1,2,3\}, \{1,2\}).$$

Построенную схему обозначим через Σ_1. Ясно, что графами ограничений, соответствующими этой схеме, являются $\overline{K_{1,3}}$, $\overline{C_4}$, $\overline{W}$. Ни к одному из них схема Σ_1 не применима. Следовательно, по теореме 1 имеем $P_{\Sigma_1} = \Gamma(\overline{K_{1,3}}, \overline{C_4}, \overline{W})$.

В случае $S = K_{1,2}$ и $T = \overline{K_2}$ (см. рис. 2, *б*) аналогичные рассуждения приводят к двум различным схемам замены.

Первая из них определяется следующей системой условий и соответствующих им правил:

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = Y_1, \quad X_1 \subseteq X_2 \cap X_3, \quad Y_2 = X_2 \cup X_3, \\ (\varnothing, \varnothing), \quad (\{2,3\}, \{2\}), \quad (\{3\}, \{2\}), \quad (\{2\}, \{2\}), \quad (\{1,2,3\}, \{1,2\}). \end{array}\right\}$$

Эту схему обозначим через Σ_2. Чтобы проиллюстрировать преобразование, соответствующее этой схеме, множество всех вершин графа, не принадлежащих $K_{1,2}$, разобьем на подмножества таким образом, как это показано на рис. 5. Здесь $K_{1,2}$ порождается вершинами 1, 2, 3, подмножества помечены буквами A, B, C, D, E, F, H, R, всякое ребро, соединяющее вершину с подмножеством, означает, что эта вершина смежна со всеми вершинами данного подмножества и других ребер, инцидентных данной вершине, нет.

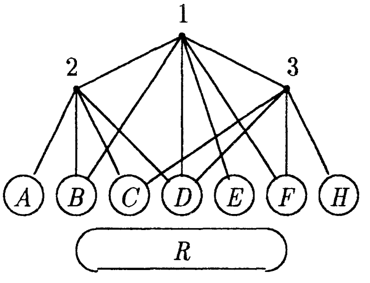
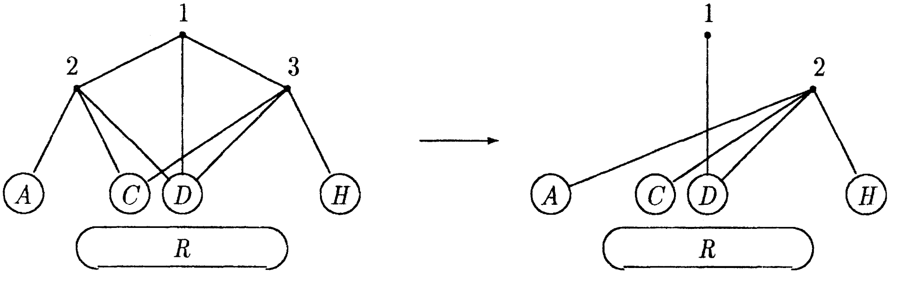


Рис. 5

В случае применения схемы Σ_2 подмножества B, E и F должны быть пустыми, поскольку для вершин из этих подмножеств отсутствуют правила в L. Подмножеству E соответствует граф ограничений $K_{1,3}$, подмножествам B и F — граф W. Так как к обоим графам схема Σ_2 не применима, $P_{\Sigma_2} = \Gamma(K_{1,3},\ W)$.

Преобразование, соответствующее схеме Σ_2, иллюстрирует рис. 6:



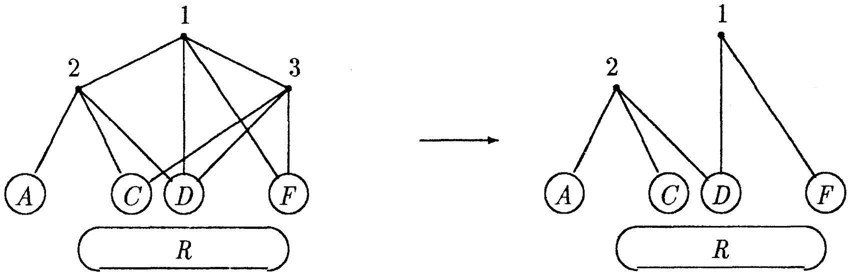
Граф G Граф G'

Рис. 6

Вторая схема, соответствующая графам рис. 2, *б*, описывается следующей системой условий и правил:

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = Y_1, \quad X_2 = Y_2, \quad X_1 \subseteq X_3, \quad X_3 \subseteq X_1 \cup X_2, \\ (\varnothing, \varnothing), \quad (\{2,3\},\{2\}), \quad (\{1,3\},\{1\}), \quad (\{2\},\{2\}), \quad (\{1,2,3\},\{1,2\}). \end{array}\right\}$$

Данную схему обозначим через Σ_3. Рис. 7 иллюстрирует соответствующее ей преобразование:



Граф G Граф G'

Рис. 7

5. Определение числа независимости посредством преобразования графов

Рассмотренные схемы определяют преобразования, которые, сохраняя число независимости, уменьшают число вершин графа. Рассмотрим вопрос о том, каким образом можно использовать данное свойство для определения числа независимости некоторых графов за полиномиальное время. Ясно, что такие графы должны принадлежать области применимости по крайней мере одного из перечисленных преобразований. Каждую такую область мы характеризуем максимальным наследственным классом, содержащимся в ней. Потому желательно, чтобы преобразования сохраняли наследственные свойства графов. К сожалению, это справедливо не для каждого преобразования. Например, класс графов $P_{\Sigma_2} = \Gamma(K_{1,3}, W)$ не замкнут относительно преобразования по схеме Σ_2. Однако всякий граф из $\Gamma(K_{1,3}, W)$, содержащий подграф, изоморфный графу P_4, может быть преобразован по схеме Σ_2 в граф из класса $\Gamma(K_{1,3}, W)$.

Лемма 1. *Любой граф G из $\Gamma(K_{1,3}, W) - \Gamma(P_4)$ по схеме Σ_2 может быть преобразован в граф $G' \in \Gamma(K_{1,3}, W)$.*

Доказательство. Пусть G принадлежит множеству $\Gamma(K_{1,3}, W) - \Gamma(P_4)$ и $2, 1, 3$ — три последовательные вершины некоторой цепи P_4. Поскольку запрещенные графы $K_{1,3}$ и W являются графами ограничений для схемы Σ_2, она применима к любому вхождению графа $K_{1,2}$ в граф G и, в частности, графа $K_{1,2} = G\langle 2, 1, 3\rangle$ (см. рис. 6). Пусть для определенности четвертой вершиной цепи является $a \in A$. В этом случае $D = \varnothing$ и $C = \varnothing$. Действительно, предположим, что $d \in D$ и $c \in C$. Тогда если a и d смежны, то $G\langle a, d, 2, 3\rangle \cong W$; если a и d не смежны, то $G\langle a, d, 2, 1\rangle \cong W$. Если a и c смежны, то $G\langle a, c, 2, 3\rangle \cong W$; если a и c не смежны, то $G\langle a, c, 2, 1\rangle \cong K_{1,3}$.

Теперь предположим, что A содержит еще одну вершину a'. Тогда вершины a, a', 1, 2 порождают в G подграф W или $K_{1,3}$ в зависимости от того, смежны или нет вершины a и a'. Следовательно, $A = \{a\}$. Аналогично убеждаемся, что $|H| \leqslant 1$.

Допустим, что G' (см. рис. 6) содержит порожденный подграф G'', изоморфный графу W или $K_{1,3}$. Тогда $H = \{h\}$ и вершины $2, a, h$ принадлежат G'', иначе G'' содержится в G. Поэтому $G'' = W$, т. е. a и h смежны, а четвертая вершина $r \in R$ смежна с одной из них, например с h. Но тогда $G\langle r, a, h, 3\rangle \cong K_{1,3}$. Лемма 1 доказана.

В случае, когда $G \in \Gamma(K_{1,3}, W) \cap \Gamma(P_4)$, можно воспользоваться преобразованием по схеме Σ_3 в комбинации с элементарным сжатием. В действительности справедливо более общее утверждение.

Лемма 2. *К любому графу $G \in \Gamma(K_{1,3}, P_4)$ применимо преобразование по схеме Σ_0 или схеме Σ_3.*

Доказательство. Пусть к $G \in \Gamma(K_{1,3}, P_4)$ не применимо элементарное сжатие. Тогда в G найдутся три вершины, например 1, 2, 3, порождающие $K_{1,2}$ (см. рис. 5). Так как $K_{1,3}$ и P_4 запрещены в G, то $A = E = H = \varnothing$.

Предположим, что $b \in B$. Если b смежна с некоторой вершиной $r \in R$, то $G\langle r, b, 1, 3\rangle \cong P_4$. Если b смежна с $f \in F$, то $G\langle 2, b, f, 3\rangle \cong P_4$. Поэтому к графу G применимо элементарное сжатие относительно ребра (2, b), что противоречит выбору графа G. Таким образом, $B = \varnothing$. Аналогично убеждаемся, что $F = \varnothing$. Значит, к G применима схема Σ_3. Лемма 2 доказана.

Преобразование по схеме Σ_3, так же как и по схеме Σ_2, в общем случае не сохраняет наследственные свойства графов. Однако его применение в комбинации с элементарным сжатием в некоторых случаях дает необходимый результат.

Лемма 3. *Для любого непустого графа $G \in \Gamma(K_{1,3}, P_4)$ существует непустая последовательность преобразований по схемам Σ_0 и Σ_3, превращающая G в граф $G'' \in \Gamma(K_{1,3}, P_4)$.*

Доказательство. Из доказательства леммы 2 следует, что к графу $G \in \Gamma(K_{1,3}, P_4)$, не допускающему элементарного сжатия, применимо преобразование по схеме Σ_3 (см. рис. 7), причем в этом случае все множества вне $K_{1,2}$, кроме C, D и R, являются пустыми. Заметим, что при этом $C \neq \varnothing$, иначе к графу G применимо элементарное сжатие относительно ребер (1,2) или (1,3). Кроме того, вершины $x \in C$ и $r \in R$ не смежны, иначе $G\langle r, x, 2, 3\rangle \cong K_{1,3}$. Следовательно, к графу G' (см. рис. 7) применимо элементарное сжатие относительно ребра $(2, x)$. Удаление из G' вершины 2 приводит к графу G'', который является порожденным подграфом графа G. Лемма 3 доказана.

Из лемм 1–3 следует, что число независимости графов из классов $\Gamma(K_{1,3}, W)$ и $\Gamma(K_{1,3}, P_4)$ может быть найдено (за полиномиальное время) с помощью преобразований по схемам Σ_0, Σ_2 и Σ_3. Оба эти класса являются подклассами класса $\Gamma(K_{1,3})$, для которого полиномиальное решение рассматриваемой задачи хорошо известно [11]. Однако возможности описанных схем данными двумя классами не ограничиваются.

В подтверждение этому рассмотрим еще один пример — класс графов $Y = \bigcup\limits_{k>4} Y_k$, где $Y_k = \Gamma(C_4, C_5, \ldots, C_{k-1}, P_k)$. Заметим, что Y содержит класс хордальных графов как собственный подкласс. В [5] дана характеризация класса $Y_5 = \Gamma(C_4, P_5)$, из которой, в частности, следует, что задача о независимом множестве для графов из данного класса решается за полиномиальное время. Покажем, что это справедливо для любого $k > 5$, а следовательно, и для всего класса Y.

Лемма 4. *К любому графу $G \in Y$ применимо преобразование по схеме Σ_0 или по схеме Σ_2.*

Доказательство. Пусть к графу $G \in Y$ не применимо элементарное сжатие. Покажем, что в этом случае $G \in \Gamma(K_{1,3}, W) = P_{\Sigma_2}$. Обозначим через k целое число такое, что $G \in Y_k$.

Предположим, что вершины x_1, x_2, x_3, y порождают в G подграф, изоморфный графу $K_{1,3}$ (см. рис. 8, *a*). Пусть $P_l = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_l)$ — порожденная цепь наибольшей длины в графе G, в которой вершины x_1, x_2, x_3 расположены вначале. По условию $3 \leqslant l \leqslant k-1$. Отсюда, в частности, следует, что ни одна вершина цепи из P_l не смежна с y, иначе в графе имелся бы запрещенный цикл. Поскольку элементарное сжатие не применимо к G, существует вершина v, смежная с x_l, но не смежная с x_{l-1}. В силу максимальности P_l вершина v смежна еще хотя бы с одной вершиной цепи P_l.

Пусть x_j — одна из таких вершин, имеющая наибольший индекс. Тогда вершины $x_j, \ldots, x_l, v$ принадлежат в G порожденному циклу длины $l-j+2 > 3$. Не считая треугольников, в G допустимы только циклы длины k. Следовательно, $l-j+2 = k$. Учитывая ограничения на l, получаем $j = l-k+2 \leqslant k-1-k+2 = 1$. Таким образом, $j = 1$, $l = k-1$. Если при этом v не смежна с y, то $G\langle y, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, v\rangle \cong P_k$; если же v смежна с y, то $G\langle x_1, x_2, y, v\rangle \cong C_4$. Оба случая противоречат условию. Следовательно, граф $K_{1,3}$ не содержится в G в качестве порожденного подграфа.

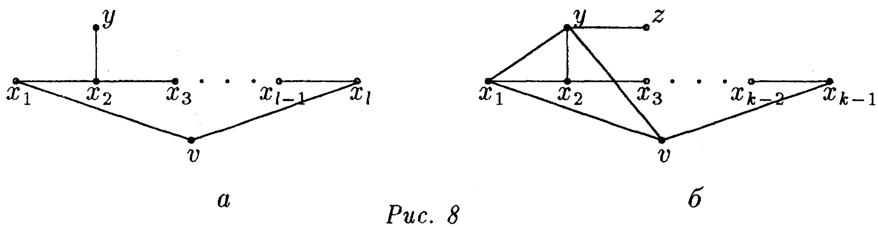


Рис. 8

Теперь предположим, что вершины x_1, x_2, x_3, y порождают в G подграф, изоморфный графу W (см. рис. 8, *б*). Повторяя рассуждения, приведенные выше, приходим к единственно возможной ситуации, когда вершины v и y смежны. Так как элементарное сжатие не применимо к паре смежных вершин x_1, y, то существует вершина z, смежная с одной из них, скажем, с y, но не смежная с x_1. Если z смежна одновременно с x_2 и v, то $G\langle z, x_2, x_1, v\rangle = C_4$. Предположим для определенности, что z не смежна с x_2. Если при этом z не смежна ни с одной вершиной из множества $\{x_3, \dots, x_{k-1}\}$, то $G\langle z, y, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}\rangle \cong P_k$. Предположим, что x_j — вершина с наименьшим индексом из данного множества, смежная с z. Если $2 < j < k-1$, то $G\langle z, y, x_2, \dots, x_j\rangle \cong C_{j+1}$ — запрещенный цикл. Если $j = k-1$, то $G\langle x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, z\rangle \cong P_k$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 4.

Из лемм 1–4 вытекает следующий алгоритм определения числа независимости графа $G \in Y$. Сначала, если это возможно, используем элементарное сжатие, чтобы получить граф из $\Gamma(K_{1,3}, W)$. Затем, применяя надлежащим образом комбинацию преобразований по схемам Σ_0, Σ_2 и Σ_3, приходим к пустому графу, число вершин которого равняется числу независимости G. Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Число независимости графа $G \in Y$ может быть найдено за полиномиальное время.*

Заключение

Полная алгоритмизация описанной процедуры выявления α-сохраняющих преобразований требует еще уточнения ряда деталей, но уже сейчас ясно, что такой алгоритм будет весьма трудоемким. Однако тот факт, что для графов S и T с небольшим числом вершин вопрос удается исчерпывающе решить «вручную», позволяет надеяться, что для графов умеренных размеров это можно будет сделать с помощью вычислительной техники. Это входит в дальнейшие намерения авторов, рассчитывающих на этом пути обнаружить новые классы графов, для которых задача о независимом множестве решается за полиномиальное время.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е.** О сжимаемых графах // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1979. Вып. 36. С. 23–31.
2. **Алексеев В. Е.** О влиянии локальных ограничений на сложность определения числа независимости графа // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1982. С. 3–13.
3. **Alekseev V. E., Lozin V. V.** On determination of the independence number by graph transformations // Proc. 5-th Twente workshop «Graphs and combinatorial optimization» (May 20–22, 1997, Enschede, NL). 1997. P. 5–8.
4. **Ebenegger Ch., Hammer P. L., de Werra D.** Pseudo-Boolean functions and stability of graphs // Algebraic and combinatorial methods in operations research. Amsterdam: North-Holland, 1984. P. 83–97. (Ann. Discrete Math.; V. 19).
5. **Fouquet J.-L., Giakoumakis V., Maire F., Thuillier H.** On graphs without P_5 and $\overline{P_5}$ // Discrete Math. 1995. V. 146, N 1–3. P. 33–44.
6. **Golumbic M. C., Hammer P. L.** Stability in circular arc graphs // J. Algorithms. 1988. V. 9, N 3. P. 314–320.
7. **Hammer P. L., Hertz A.** On a transformation which preserves the stability number. RUTCOR Research Rep. 69-91, Rutgers Univ., 1991.
8. **Hammer P. L., Mahadev N. V. R., de Werra D.** Stability in *CAN*-free graphs // J. Combin. Theory Ser. B. 1985. V. 38, N 1. P. 23–30.
9. **Hammer P. L., Mahadev N. V. R., de Werra D.** The struction of a graph: application to *CN*-free graphs // Combinatorica. 1985. V. 5, N 2. P. 141–147.
10. **Hoke K. W., Troyon M. F.** The struction algorithm for the maximum stable set problem revisited // Discrete Math. 1994. V. 131, N 1–3. P. 105–113.
11. **Minty G.** On maximal independent sets in claw-free graphs // J. Combin. Theory Ser. B. 1980. V. 28, N 3. P. 284–304.

Адрес авторов:

Нижегородский
государственный университет,
пр. Гагарина, 23, корп. 2,
603600 Нижний Новгород,
ГСП-20, Россия.
E-mail: lozin@ml.unn.ac.ru

Статья поступила
28 ноября 1997 г.