ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 1998. Серия 1. Том 5, № 1, 20–31

УДК 519.87

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА С ВПОЛНЕ УРАВНОВЕШЕННОЙ МАТРИЦЕЙ*)

В. Л. Береснев

Рассматривается эффективный алгоритм решения задачи размещения производства, когда матрица транспортных затрат имеет вполне уравновешенную характеристическую матрицу. Описание алгоритма и его обоснование ведутся применительно к задаче минимизации полинома от булевых переменных, эквивалентной задаче размещения. Основу алгоритма составляет возможность сведéния задачи минимизации вполне уравновешенного полинома к задаче минимизации аналогичного полинома, но с числом переменных на единицу меньше.

Введение

Задача размещения производства (см., например, [4, 5, 9]) чаще всего формулируется в виде следующей задачи частично целочисленного программирования.

Минимизировать

$$\sum_{i\in I} f_i z_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \quad j\in J;$$

$$z_i \geqslant x_{ij}, \quad i\in I, \quad j\in J;$$

$$z_i \in \{0,1\}, \quad i\in I;$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i\in I, \quad j\in J.$$

В этой задаче через $I = \{1,\dots,m\}$ обозначено множество возможных пунктов размещения предприятий по производству некоторого продукта,

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 95–01–00989, 97–01–00890).

через $J = \{1, \dots, n\}$ — множество потребителей этого продукта, через f_i — затраты на размещение предприятия в i-м пункте, а через c_{ij} — транспортные затраты на удовлетворение спроса j-го потребителя предприятием, размещенным в i-м пункте.

Возможны и другие формулировки задачи размещения, эквивалентные приведенной. К ним прежде всего следует отнести *задачу о покрытии конечного множества подмножествами* и *задачу минимизации полинома от булевых переменных.* Эти формулировки требуют некоторого преобразования исходных данных задачи размещения, задаваемых вектор-столбцом затрат на размещение $F = (f_i)(i \in I)$ и матрицей транспортных затрат $C = (c_{ij})(i \in I,\ j \in J)$.

Для каждого $j \in J$ рассмотрим такую перестановку $(i_1^j, \dots, i_m^j)$ элементов множества I, что

$$c_{i_1^j j} \leqslant c_{i_2^j j} \leqslant \dots \leqslant c_{i_m^j j},$$

и коэффициенты Δ_{lj}, $l = 0, 1, \dots, m-1$, определяемые следующим образом:

$$\Delta_{0j} = c_{i_1^j j},$$
$$\Delta_{lj} = c_{i_{l+1}^j j} - c_{i_l^j j}, \quad l = 1, \dots, m-1.$$

Произвольное множество $I' \subset I$ мощности l, $1 \leqslant l \leqslant m-1$, назовем *характеристическим множеством* j-го столбца матрицы C, если $I' = \{i_1^j, \dots, i_l^j\}$ и $\Delta_{lj} > 0$. Отметим, что число характеристических множеств столбца равняется величине $m' - 1$, где m' — число различных элементов данного столбца.

Пусть $I_1, \dots, I_K$ — все такие подмножества множества I, что каждое из них является характеристическим хотя бы для одного столбца матрицы C. Матрицу $H = (h_{ik})(i \in I;\ k = 1, \dots, K)$, в которой

$$h_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in I_k, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

назовем *характеристической* для матрицы C.

Пусть подмножество I_k, $1 \leqslant k \leqslant K$, мощности l, $1 \leqslant l \leqslant m-1$, является характеристическим для столбцов матрицы C с номерами из множества $J_k \subset J$. Положим

$$c_k = \sum_{j \in J_k} \Delta_{lj}.$$

Коэффициенты c_k, $k = 1, \dots, K$, назовем *характеристическими коэффициентами* матрицы C.

С использованием введенных обозначений сформулируем следующую задачу о покрытии конечного множества подмножествами, к которой сводится задача размещения [1].

Минимизировать

$$\sum_{i\in I} f_i z_i + \sum_{k=1}^{K} c_k w_k$$

при ограничениях

$$\sum_{i\in I} h_{ik} z_i + w_k \geqslant 1, \quad k = 1,\dots,K;$$

$$z_i, w_k \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad k = 1,\dots,K.$$

В случае, когда матрица ограничений $H = (h_{ik})(i \in I;\ k = 1,\dots,K)$ является вполне уравновешенной, в [8] для решения этой задачи предложен эффективный алгоритм, названный *жадным алгоритмом.* Напомним, что $(0,1)$-матрица называется *вполне уравновешенной,* если в ней нет циклической подматрицы, т. е. квадратной матрицы без одинаковых строк и одинаковых столбцов, содержащей ровно по две единицы в каждой строке и каждом столбце.

Этот жадный алгоритм представляет собой процедуру последовательного вычисления значений переменных задачи, двойственной к LP-релаксированной задаче о покрытии. При доказательстве оптимальности найденного решения и построенного по нему целочисленного решения LP-релаксированной задачи о покрытии используется так называемое *g-свойство* вполне уравновешенной матрицы ограничений. Этому свойству может быть дано несколько эквивалентных определений. В [8] g-свойство матрицы отождествляется с возможностью приведения перестановкой строк и столбцов исходной $(0,1)$-матрицы к так называемой *SG-матрице.* Такая матрица по определению не содержит подматрицы вида $\binom{11}{10}$.

При этом следует отметить, что хотя работа [8] содержит наиболее значимые и известные результаты, связанные с вполне уравновешенными матрицами, впервые жадный алгоритм для решения задачи о покрытии был построен в работе [6]. В ней не используется понятие вполне уравновешенной матрицы и дается определение g-свойства, отличное от используемого в [8].

В настоящей работе для решения задачи размещения с вполне уравновешенной характеристической матрицей применяется алгоритм, который также может быть назван жадным алгоритмом. Алгоритм, в отличие от упомянутого выше, строится не для решения задачи о покрытии, а применительно к решению задачи минимизации полинома от булевых переменных [2–4], также эквивалентной задаче размещения.

Впервые рассматриваемый алгоритм был предложен в [3] и использован для минимизации полиномов с характеристическими матрицами, обладающими так называемым свойством квазивогнутости. В основе алгоритма лежит идея из псевдобулева программирования [7], которая по исходному полиному в принципе позволяет находить полином с числом переменных на единицу меньше и получать оптимальное решение задачи минимизации исходного полинома из решения задачи минимизации построенного полинома. Особенность рассматриваемого алгоритма состоит в том, что в нем используется эффективная процедура построения полинома с меньшим числом переменных.

В [1] показано, что алгоритм применим и в более общем, по сравнению с [3], случае, когда полином порождается растущим из корня деревом, а в [5] отмечается, что возможно дальнейшее расширение области применения алгоритма и его использование для минимизации вполне уравновешенных полиномов. Ниже дается обоснование корректности использования указанного алгоритма для этого случая. Кроме того, показано, что соответствующий модифицированный алгоритм позволяет получить решение задачи минимизации полиномов более общего вида. В этих полиномах коэффициенты при нелинейных членах могут иметь разные знаки в отличие от полиномов, порождаемых задачей размещения, у которых коэффициенты неотрицательны.

1. Задача минимизации полинома от булевых переменных

Поскольку всякую функцию $f(y_1, \ldots, y_m)$ с переменными, принимающими значение 0 и 1, можно представить в виде полинома, то в [2, 3] такие функции названы *полиномами с булевыми переменными.* При их рассмотрении считаем, что члены соответствующего полинома уже заданы и функция $f(y_1, \ldots, y_m)$ представлена в виде

$$f(y_1, \ldots, y_m) = a_0 - \sum_{i=1}^{m} a_i y_i + \sum_{k=1}^{K} b_k \prod_{i \mid h_{ik}=1} y_i,$$

где a_0; $a_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$; b_k, $k = 1, \ldots, K$, — некоторые коэффициенты, а $H = (h_{ik})(i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, K)$ — $(0,1)$-матрица, называемая *характеристической матрицей полинома* $f(y_1, \ldots, y_m)$. Если $b_k \geqslant 0$ для каждого $k = 1, \ldots, K$, то $f(y_1, \ldots, y_m)$ называют *полиномом с неотрицательными коэффициентами.*

Справедлива [2–4] следующая теорема, устанавливающая взаимосвязь между задачей размещения производства и задачей минимизации полинома от булевых переменных.

Теорема 1. *Задача размещения производства сводится к задаче минимизации полинома*

$$f(y_1,\dots,y_m) = -\sum_{i\in I} f_i y_i + \sum_{k=1}^{K} c_k \prod_{i|h_{ik}=1} y_i,$$

где $H = (h_{ik})(i \in I;\ k = 1,\dots,K)$ *— характеристическая матрица для матрицы* C, *а* c_k, $k = 1,\dots,K$, *— характеристические коэффициенты матрицы* C.

Отметим, что указанный в формулировке теоремы полином имеет неотрицательные коэффициенты, а его характеристическая матрица является характеристической матрицей для матрицы C.

2. Эффективный алгоритм для задачи минимизации вполне уравновешенного полинома с неотрицательными коэффициентами

Полином $f(y_1,\dots,y_m)$ с булевыми переменными назовем *вполне уравновешенным*, если его характеристическая матрица является вполне уравновешенной. Предлагаемый алгоритм основан на следующем утверждении.

Теорема 2. *Задача минимизации вполне уравновешенного полинома с неотрицательными коэффициентами сводится к задаче минимизации аналогичного полинома, но с числом переменных на единицу меньше.*

Доказательство. Если характеристическая матрица H исходного полинома $f(y_1,\dots,y_m)$ является SG-матрицей, то все столбцы этой матрицы, имеющие единицу в первой строке, сравнимы по включению. Поэтому можем рассмотреть перестановку $(i_1 = 1, i_2,\dots,i_m)$ строк матрицы по невозрастанию числа единиц в строках указанных столбцов и представить полином $f(y_1,\dots,y_m)$ следующим образом:

$$f(y_1,\dots,y_m) = y_1\Big(-f_1 + \sum_{l=1}^{m} a_l y_{i_2},\dots,y_{i_l}\Big) + r(y_2,\dots,y_m),$$

где каждый коэффициент a_l, $1 \leqslant l \leqslant m$, равняется либо нулю, либо соответствующему коэффициенту c_k, $1 \leqslant k \leqslant K$, а полином $r(y_2,\dots,y_m)$ включает в себя все члены полинома $f(y_1,\dots,y_m)$, не содержащие переменной y_1.

В соответствии с основной идеей метода псевдобулева программирования [7] построим функцию $y_1(y_2,\dots,y_m)$ от булевых переменных

$y_2, \dots, y_m$ такую, что

$$y_1(y_2, \dots, y_m) = \begin{cases} 0, & \text{если } -f_1 + \sum\limits_{l=1}^{m} a_l y_{i_2}, \dots, y_{i_l} > 0, \\ 1, & \text{если } -f_1 + \sum\limits_{l=1}^{m} a_l y_{i_2}, \dots, y_{i_l} < 0. \end{cases}$$

Для этого рассмотрим функцию $\rho(l) = -f_1 + \sum\limits_{i=1}^{l} a_i$, $1 \leqslant l \leqslant m$, и определим такой наименьший номер l_1, $1 \leqslant l_1 \leqslant m$, что $\rho(l_1) > 0$. Если $\rho(m) \leqslant 0$, то считаем, что $l_1 = m + 1$.

Положим

$$y_1(y_2, \dots, y_m) = \begin{cases} 1 - y_{i_2}, \dots, y_{i_{l_1}}, & \text{если } 1 \leqslant l_1 \leqslant m, \\ 1, & \text{если } l_1 = m + 1, \end{cases}$$

и покажем, что эта функция обладает требуемым свойством.

Рассмотрим произвольный неединичный булевый вектор $(y_2, \dots, y_m)$, и пусть q, $2 \leqslant q \leqslant m$, — наименьший номер такой, что $y_{i_q} = 0$. Поскольку

$$-f_1 + \sum_{l=1}^{m} a_l y_{i_2} \cdot \ldots \cdot y_{i_l} = -f_1 + \sum_{l=1}^{q-1} a_l = \rho(q-1),$$

то исследуем зависимость между знаком величины $\rho(q-1)$ и значением функции $y_1(y_2, \dots, y_m)$.

Если $\rho(q-1) > 0$, то $l_1 \leqslant q - 1$ и, следовательно, $y_1(y_2, \dots, y_m) = 1 - y_{i_2} \cdot \ldots \cdot y_{i_{l_1}} = 0$. Если же $\rho(q-1) < 0$, то $l_1 \geqslant q$ и $y_1(y_2, \dots, y_m) = 0$.

К таким же результатам приходим и при единичном векторе $(y_2, \dots, y_m)$. В этом случае рассмотрим знак величины $\rho(m)$.

Если $\rho(m) > 0$, то $l_1 \leqslant m$ и $y_1(y_2, \dots, y_m) = 0$. Если же $\rho(m) < 0$, то $l_1 = m + 1$ и, следовательно, $y_1(y_2, \dots, y_m) = 1$.

Таким образом, получаем полином

$$f'(y_2, \dots, y_m) = y_1(y_2, \dots, y_m)\left(-f_1 + \sum_{l=2}^{m} a_l y_{i_2} \cdot \ldots \cdot y_{i_l} \right) + r(y_2, \dots, y_m),$$

который по построению обладает тем свойством, что если $(y_2^*, \dots, y_m^*)$ — оптимальное решение задачи минимизации этого полинома, то булевый вектор $(y_1(y_2^*, \dots, y_m^*), y_2^*, \dots, y_m^*)$ является оптимальным решением задачи минимизации исходного полинома $f(y_1, \dots, y_m)$.

Покажем, что $f'(y_2, \dots, y_m)$ есть вполне уравновешенный полином с неотрицательными коэффициентами. Для этого рассмотрим полином

$$y_1(y_2, \dots, y_m)\left(-f_1 + \sum_{l=1}^{m} a_l y_{i_2} \cdot \ldots \cdot y_{i_l} \right).$$

Ясно, что если $y_1(y_2,\dots,y_m) = 1 - y_{i_1}\cdot\ldots\cdot y_{i_{l_1}}$, то можно написать

$$(1 - y_{i_1}\cdot\ldots\cdot y_{i_{l_1}})\Big(-f_1 + \sum_{l=1}^{m} a_l y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_l}\Big)$$
$$= -f_1 + \sum_{l=1}^{m} a_l y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_l} + \Big(f_1 - \sum_{l=1}^{l_1} a_l\Big) y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_l} - \sum_{l=l_1+1}^{m} a_l y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_l}$$
$$= -f_1 + \sum_{l=1}^{l_1-1} a_l y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_l} + \Big(f_1 - \sum_{l=1}^{l_1-1} a_l\Big) y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_{l_1}}.$$

Отсюда следует, что характеристическая матрица H' полинома $f'(y_2,\dots,y_m)$ получается из матрицы H вычеркиванием первой строки и некоторых столбцов, имеющих единицу в первой строке. Таким образом, H' — подматрица матрицы H и, следовательно, является вполне уравновешенной. Кроме того, так как $\rho(l_1) \leqslant 0$, то коэффициенты $f'(y_2,\dots,y_m)$ неотрицательны. К такому же результату приходим, когда $y_1(y_2,\dots,y_m) = 1$. Теорема 2 доказана.

Из приведенного доказательства ясно, как устроен предлагаемый алгоритм для решения задачи минимизации вполне уравновешенного полинома. Алгоритм состоит из двух этапов. На первом этапе для каждой переменной y_l, $l = 1,\dots,m$, последовательно определяется номер $k(l)$, задающий формулу для вычисления оптимального значения этой переменной по оптимальным значениям переменных с бóльшими номерами. На втором этапе по найденным величинам $k(l)$, $l = 1,\dots,m$, последовательно восстанавливаются оптимальные значения y_l^* переменных y_l, $l = m, m-1,\dots,1$.

Рассмотрим работу алгоритма более подробно. При этом будем считать, что характеристическая матрица $H = (h_{ik})(i \in I;\ k = 1,\dots,K)$ приведена к SG-матрице. В этом случае подматрица, полученная из H вычеркиванием строк с номерами $1,2,\dots,i-1$, $1 \leqslant i \leqslant m$, которую будем называть *i-усеченной подматрицей*, обладает следующим свойством. Столбцы i-усеченной подматрицы, имеющие единицу в i-й строке, сравнимы и упорядочены по включению.

Первый этап состоит из m шагов. На первом шаге рассматриваются исходные коэффициенты c_k, $k = 1,\dots,K$. Шаг начинается с поиска наименьшего номера $k(1)$, $1 \leqslant k(1) \leqslant K$, такого, что $-f_1 + \sum\limits_{k=1}^{k(1)} h_{1k}c_k > 0$. Если такого номера нет, то полагается $k(1) = K+1$. Если $k(1) \neq K+1$, то пересчитываются коэффициенты c_k, $1 \leqslant k \leqslant K$, следующим образом: $c_{k(1)} = f_1 - \sum\limits_{k=1}^{k(1)-1} c_k$; $c_k = 0$ для $k > k(1)$, если $h_{1k} = 1$. Далее для каждой пары номеров k и k', $k < k'$, таких, что $h_{2k} = h_{2k'} = 1$ и $\sum\limits_{i=2}^{m} h_{ik} = \sum\limits_{i=2}^{m} h_{ik'}$, полагается $c_{k'} = c_{k'} + c_k$ и $c_k = 0$. После этого начинается второй шаг.

На m-м шаге рассматриваются коэффициенты c_k, $k = 1, \dots, K$, вычисленные на предыдущих шагах. Если $-f_m + \sum\limits_{k=1}^{K} c_k h_{mk} > 0$, то полагается $k(m) = K$; в противном случае считается, что $k(m) = K + 1$. После этого выполняется второй этап алгоритма.

Второй этап также состоит из m шагов. На первом шаге определяется оптимальное значение y_m^* переменной y_m следующим образом: $y_m^* = 1$, если $k(m) = K + 1$, и $y_m^* = 0$, если $k(m) = K$. После этого начинается второй шаг.

На очередном $(m - l + 1)$-м шаге, $1 < l \leqslant m$, имеются оптимальные значения $y_{l+1}^*, \dots, y_m^*$ соответствующих переменных, вычисленные на предыдущих шагах, и определяется оптимальное значение y_l^* переменной y_l. Полагается $y_l^* = 1$, если $k(l) = K + 1$, и

$$y_l^* = 1 - \prod_{i > l, h_{ik(l)} = 1} y_i^*$$

в противном случае. После этого, если $l < m$, начинается следующий шаг или, если $l = m$, работа алгоритма заканчивается.

Временная сложность первого этапа алгоритма оценивается величиной $O(mk)$, а второго — величиной $O(m^2)$. Поэтому оценка временной сложности алгоритма в целом равняется $O(m(k + m))$.

3. Эффективный алгоритм для задачи минимизации вполне уравновешенного полинома с коэффициентами произвольного знака

Доказанная в предыдущем разделе теорема 2 остается справедливой и в случае, когда вполне уравновешенный полином имеет коэффициенты разных знаков.

Теорема 3. *Задача минимизации вполне уравновешенного полинома сводится к задаче минимизации аналогичного полинома, но с числом переменных на единицу меньше.*

Доказательство отличается от доказательства теоремы 2 только в части, связанной с более сложным видом функции $y_1(y_2, \dots, y_m)$. Для ее построения, как и ранее, рассмотрим вспомогательную функцию $\rho(l) = -f_1 + \sum\limits_{i=1}^{l} a_i$, $1 \leqslant l \leqslant m$, которая в отличие от предыдущей функции не является неубывающей, а может несколько раз менять знак. Обозначим через $l_1, l_2, \dots, l_T$ $(0 = l_0 < l_1 < \dots < l_T < l_{T+1} = m + 1,\ T \geqslant 0)$

точки перемены знака функции $\rho(l)$, т. е. такие точки, что при каждом $t = 1, \ldots, T$ имеет место одна из следующих возможностей:

$$\rho(l) \leqslant 0, \quad \text{если } l_{t-1} < l < l_t; \ \rho(l_t) > 0; \ \rho(l) \geqslant 0, \quad \text{если } l_t < l < l_{t+1};$$
$$\rho(l) \geqslant 0, \quad \text{если } l_{t-1} < l < l_t; \ \rho(l_t) < 0; \ \rho(l) \leqslant 0, \quad \text{если } l_t < l < l_{t+1}.$$

В случае, когда $T = 0$, т. е. функция $\rho(l)$ принимает значения только одного знака, будем считать, что $\rho(l_1) > 0$, когда $\rho(l) \leqslant 0$, $l = 1, \ldots, m$, и $\rho(l_1) < 0$, когда $\rho(l) \geqslant 0$, $l = 1, \ldots, m$.

Положим

$$y_1(y_2, \ldots, y_m) = \begin{cases} 1 + \sum\limits_{t=1}^{T} (-1)^t y_{i_2} \cdot \ldots \cdot y_{i_{l_t}}, & \text{если } \rho(l_1) > 0, \\ \sum\limits_{t=1}^{T} (-1)^{t+1} y_{i_2} \cdot \ldots \cdot y_{i_{l_t}}, & \text{если } \rho(l_1) < 0, \end{cases}$$

и покажем, что эта функция обладает необходимыми свойствами.

Рассмотрим произвольный неединичный булевый вектор $(y_2, \ldots, y_m)$, и пусть q, $2 \leqslant q \leqslant m$, — наименьший номер такой, что $y_{i_q} = 0$. Пусть, кроме того, t_0, $1 \leqslant t_0 \leqslant T + 1$, — такой номер, что $l_{t_0 - 1} < q \leqslant l_{t_0}$. Поскольку для рассматриваемого вектора $(y_2, \ldots, y_m)$ имеем

$$-f_1 + \sum_{l=1}^{m} a_l y_{i_2} \cdot \ldots \cdot y_{i_l} = \rho(q-1),$$

то исследуем зависимость между знаком величины $\rho(q-1)$ и значением функции $y_1(y_2, \ldots, y_m)$.

Если $\rho(q-1) > 0$, то $\rho(l_{t_0}) < 0$. Рассмотрим два случая: $\rho(l_1) > 0$ и $\rho(l_1) < 0$. В первом случае t_0 — четно и, следовательно, $y_1(y_2, \ldots, y_m) = 1 + \sum\limits_{t=1}^{t_0-1} (-1)^t = 0$. Во втором случае t_0 — нечетно и $y_1(y_2, \ldots, y_m) = \sum\limits_{t=1}^{t_0-1} (-1)^{t+1} = 0$. Таким образом, если $\rho(q-1) > 0$, то $y_1(y_2, \ldots, y_m) = 0$.

Пусть $\rho(q-1) < 0$. Тогда с учетом того, что $\rho(l_{t_0}) > 0$, имеем t_0 — нечетно при $\rho(l_1) > 0$ и t_0 — четно при $\rho(l_1) < 0$. В любом из этих случаев получаем $y_1(y_2, \ldots, y_m) = 1$.

К таким же результатам приходим, когда $(y_2, \ldots, y_m)$ — единичный вектор. В этом случае значение функции $y_2(y_1, \ldots, y_m)$ необходимо сравнить с величиной $\rho(m)$.

Если $\rho(m) > 0$, то $\rho(l_T) > 0$. Тогда если $\rho(l_1) > 0$, то T — нечетно и, следовательно, $y_1(y_2, \ldots, y_m) = 1 + \sum\limits_{t=1}^{T} (-1)^t = 0$. Если же $\rho(l_1) < 0$, то T — четно и $y_1(y_2,\dots,y_m) = \sum\limits_{t=1}^{T}(-1)^{t+1} = 0$. Если $\rho(m) < 0$, то независимо от знака $\rho(l_1)$ получаем $y_1(y_2,\dots,y_m) = 1$.

Покажем, что в случае рассматриваемой функции $y_1(y_2,\dots,y_m)$ полином $f'(y_2,\dots,y_m)$ является вполне уравновешенным. Для этого достаточно показать, что таковым будет полином

$$y_1(y_2,\dots,y_m)\Big(-f_1+\sum_{l=1}^{m} a_l y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_l}\Big)$$

при любом из двух возможных выражений для функции $y_1(y_2,\dots,y_m)$.

Если $y_1(y_2,\dots,y_m) = 1+\sum\limits_{t=1}^{T} y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_{l_t}}$, то можем написать

$$\Big(1+\sum_{t=1}^{T}(-1)^t y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_{l_t}}\Big)\Big(-f_1+\sum_{l=1}^{m} a_l y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_l}\Big)$$
$$= -f_1+\sum_{l=1}^{m} a_l y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_l}+\sum_{t=1}^{T}(-1)^t y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_l}\Big(-f_1+\sum_{l=1}^{m} a_l y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_l}\Big)$$
$$= -f_1+\sum_{l=1}^{m} a_l y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_l}+\sum_{t=1}^{T}(-1)^t\Big[\Big(-f_1+\sum_{l=1}^{l_t} a_l\Big) y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_{l_t}}$$
$$+\sum_{l=l_t+1}^{m} a_l y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_l}\Big] = -f_1+\sum_{l=1}^{m} a_l y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_l}$$
$$+\sum_{t=1}^{T}\Big\{\Big[a_{l_t}\sum_{\tau=1}^{t-1}(-1)^\tau+(-1)^t\Big(-f_1+\sum_{l=1}^{l_t} a_l\Big)\Big] y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_{l_t}}$$
$$+\sum_{l=l_t+1}^{l_{t+1}-1} a_l\sum_{\tau=1}^{t}(-1)^\tau y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_l}\Big\}.$$

Ясно, что рассматриваемый полином преобразуется в полином $\sum\limits_{l=2}^{m} a'_l y_{i_2}\cdot\ldots\cdot y_{i_l}$, коэффициенты которого выражаются через коэффициенты исходного полинома $f(y_1,\dots,y_m)$ следующим образом:

$$a'_l = \begin{cases} -f_1+\sum\limits_{l=1}^{l_t} a_l, & \text{если } l = l_t \text{ и } t \text{ — четное;}\\ f_1-\sum\limits_{l=1}^{l_t-1} a_l, & \text{если } l = l_t \text{ и } t \text{ — нечетное;}\\ a_l, & \text{если } l_t < l < l_{t+1} \text{ и } t \text{ — четное;}\\ 0, & \text{если } l_t < l < l_{t+1} \text{ и } t \text{ — нечетное,}\end{cases}$$

$l = 2, \ldots, m$.

Случай $y_1(y_2, \ldots, y_m) = \sum_{t=1}^{T}(-1)^{t+1} y_{i_2} \cdot \ldots \cdot y_{i_{l_t}}$ приводит к полиному $\sum_{l=2}^{m} a'_l y_{i_2} \cdot \ldots \cdot y_{i_l}$ со следующими коэффициентами:

$$a'_l = \begin{cases} f_1 - \sum_{l=1}^{l_t-1} a_l, & \text{если } l = l_t \text{ и } t \text{ — четное;} \\ -f_1 + \sum_{l=1}^{l_t} a_l, & \text{если } l = l_t \text{ и } t \text{ — нечетное;} \\ 0, & \text{если } l_t < l < l_{t+1} \text{ и } t \text{ — четное;} \\ a_l, & \text{если } l_t < l < l_{t+1} \text{ и } t \text{ — нечетное,} \end{cases}$$

$l = 2, \ldots, m$.

Таким образом, характеристическая матрица H' полинома $f'(y_2, \ldots, y_m)$, так же как и полинома с неотрицательными коэффициентами, получается из исходной характеристической матрицы H удалением первой строки и некоторых столбцов, имеющих единицу в первой строке. Теорема 3 доказана.

Из доказательства теоремы 3 следует, что незначительная модификация рассматриваемого алгоритма позволяет расширить область его применения до вполне уравновешенного полинома с коэффициентами произвольного знака.

В модифицированном алгоритме действия на шагах первого и второго этапов состоят в следующем.

На l-м шаге первого этапа, $1 \leqslant l \leqslant m$, вычисляются номера $k_1(l), \ldots, k_{T(l)}(l)$, $T(l) \geqslant 0$, задающие точки перемены знака функции $\rho_l(p) = -f_l + \sum_{k=1}^{p} h_{lk} c_k$. При этом считается, что $k_0(l) = 1$ при $\rho_l(k_1(l)) > 0$ и $k_0(l) = -1$ при $\rho_l(k_1(l)) < 0$. Далее по соответствующим формулам пересчитываются коэффициенты c_k, $k = 1, \ldots, K$.

На $(m - l + 1)$-м шаге второго этапа, $1 \leqslant l \leqslant m$, по величинам $y^*_{l+1}, \ldots, y^*_m$ и номерам $k_0(l), k_1(l), \ldots, k_{T(l)}(l)$ вычисляется оптимальное значение переменной y_l следующим образом:

$$y^*_l = \begin{cases} 1 + \sum_{t=1}^{T(l)}(-1)^t \prod_{i>l, h_{ik(l)}=1} y^*_i, & \text{если } k_0(l) = 1, \\ \sum_{t=1}^{T(l)}(-1)^{t+1} \prod_{i>l, h_{ik(l)}=1} y^*_i, & \text{если } k_0(l) = -1. \end{cases}$$

Указанные изменения не ухудшают оценки временной сложности, полученной для первоначального варианта алгоритма. Поэтому временная сложность алгоритма минимизации вполне уравновешенного полинома оценивается прежней величиной $O(m(k + m))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агеев А. А.** О сложности задач минимизации полиномов от булевых переменных // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1983. Вып. 23. С. 3–11.
2. **Береснев В, Л.** Алгоритм неявного перебора для задачи типа размещения и стандартизации // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1974. Вып. 12. С. 24–34.
3. **Береснев В. Л.** Алгоритм минимизации полиномов от булевых переменных // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1979. Вып. 36. С. 225–246.
4. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
5. **Гришухин В. П.** Полиномиальность в простейшей задаче размещения. М., 1987. (Препринт / АН СССР. Центр. экон.-мат. ин-т).
6. **Трубин В. А.** Эффективный алгоритм размещения на сети в форме дерева // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, № 3. С. 547–550.
7. **Hammer P. L., Rudeanu S.** Pseudo-Boolean programming // Oper. Res. 1969. V. 17, N 2. P. 233–261.
8. **Hoffman A. J., Kolen A. W. J, Sakarovitch M.** Totally-balanced and greedy matrices // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1985. V. 6, N 4. P. 721–730.
9. **Krarup J., Pruzan P. M.** The simple plant location problem: survey and synthesis // European J. Oper. Res. 1983. V. 12, N 1. P. 36–81.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
24 июля 1997 г.