ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 1998. Серия 1. Том 5, № 1, 32–59

УДК 519.716

A-ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ ИДЕМПОТЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ДВУМЕСТНЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ*)

С. С. Марченков

A-замыкание на множестве функций многозначной логики определяется как замыкание относительно операций суперпозиции и перехода к двойственным функциям относительно подстановок из знакопеременной группы. Класс I_k идемпотентных функций при $k \geqslant 5$ является одним из двух, а при $k = 4$ — одним из четырех A-предполных классов в P_k. На множестве E_k определяется 12 типов стандартных отношений, называемых основными. Доказывается, что любой A-замкнутый класс функций из I_k, который определяется произвольными двуместными отношениями, можно задать подходящим набором основных отношений.

Введение

Пусть P_k обозначает множество всех функций k-значной логики [14]. В работах [2, 3, 5, 7–9] показано, как построить эффективную и нетривиальную классификацию множества P_k, которая базируется на операциях суперпозиции и перехода к произвольным двойственным функциям (S-классификация). Из [3, 5, 8, 9] вытекает, что при любом k, $k \geqslant 3$, число S-замкнутых классов в P_k конечно и зависит от k сверхэкспоненциальным образом. Дальнейшие исследования [4, 10, 11] показали, что эффективные и нетривиальные классификации множества P_k можно строить подобно S-классификации, опираясь на группы подстановок, обладающие достаточно большой степенью транзитивности. Из всевозможных групп подстановок, отличных от полной симметрической группы, прежде всего выделяется знакопеременная группа. Ее отличают максимально возможное число элементов и максимально возможная степень транзитивности. Кроме того, ввиду массивности знакопеременной

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00089).

группы есть основания полагать, что необходимые выкладки для соответствующей классификации множества P_k (A-классификации) можно еще выполнить в полном объеме.

Систематическое исследование A-классификации функций многозначной логики начато в [4], где доказано, что при любом $k \geqslant 5$ в P_k имеется два, а при $k = 4$ — четыре A-предполных класса (часть из этих результатов получена также в [10, 11]). При любом k, $k \geqslant 4$, одним из A-предполных классов в P_k является класс I_k идемпотентных функций. В [6] построена A-классификация частичных одноместных инъективных функций, где наряду с операциями суперпозиции и перехода к двойственным функциям для подстановок из знакопеременной группы рассматривается также операция обращения функции. Этот результат чисто функционального характера в дальнейшем мы применяем для получения A-классификации отношений, определяющих A-замкнутые классы из I_k. Именно, с использованием теории Галуа для алгебр Поста [1] мы находим и описываем на языке отношений все A-замкнутые классы из I_k. Для этого мы предварительно изучаем все множества отношений, содержащие отношение $x = 0$ и замкнутые относительно операций перехода к двойственным отношениям для подстановок из знакопеременной группы и еще некоторых логических операций (A-замкнутые классы отношений). Это исследование ввиду его громоздкости проводится в два этапа: сначала изучаются A-замкнутые классы из I_k, определяемые двуместными отношениями, а затем — отношениями от большего числа переменных. Часть первого этапа (на языке функций) выполнена в [6]. В настоящей статье мы завершаем первый этап: определяем 12 стандартных отношений, называемых основными, и доказываем, что любой A-замкнутый класс функций из I_k, задаваемый произвольными двуместными отношениями, можно определить с помощью основных отношений.

1. Основные понятия

Дадим необходимые определения. Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, P_k — множество всех конечноместных функций на E_k. Через $\mathbf{A}_k$ обозначим множество всех четных подстановок на E_k, т. е. знакопеременную подгруппу полной симметрической группы подстановок на E_k. *Селекторными* называем функции $e_i^n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$, где $n \geqslant 1$ и $1 \leqslant i \leqslant n$. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ и π — подстановка на E_k, то функция

$$f^\pi(x_1, \ldots, x_n) = \pi^{-1}(f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)))$$

называется *двойственной* к f относительно подстановки π.

На множестве P_k предполагается заданной операция суперпозиции [14]. Если $F \subseteq P_k$, то через $[F]$ обозначается замыкание множества F относительно операции суперпозиции. Множества вида $[F]$ называются замкнутыми классами. Замкнутый класс из P_k называем

A-замкнутым, если вместе с любой функцией f ему принадлежат все функции вида f^π, где $\pi \in \mathbf{A}_k$. Через $[F]_A$ обозначаем A-замыкание множества функций F.

Наряду с функциями на E_k рассматриваем также отношения на E_k. Совокупность всех отношений на E_k обозначаем через Π_k. Если $\rho(x_1, \dots, x_m)$ и $\sigma(x_1, \dots, x_n)$ принадлежат Π_k, то конъюнкцией отношений ρ, σ называем $(m+n)$-местное отношение

$$\rho(x_1, \dots, x_m) \& \sigma(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}).$$

Проекцией отношения $\rho(x_1, \dots, x_m)$ по переменной $x_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ называется $(m-1)$-местное отношение

$$(\exists x_i)\rho(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m).$$

Операции перестановки и отождествления переменных для отношений предполагаем известными. Если $\rho \in \Pi_k$, π — подстановка на E_k, то отношение

$$\rho^\pi(x_1, \dots, x_m) \equiv \rho(\pi(x_1), \dots, \pi(x_m))$$

называем *двойственным* к ρ относительно подстановки π. *Диагоналями* называем отношения, которые можно получить из элементарных диагоналей вида $x_i = x_j$ с помощью операций конъюнкции, перестановки и отождествления переменных. Если $R \subseteq \Pi_k$, то через $[R]$ обозначаем множество всех отношений из Π_k, которые можно получить из отношений в R и диагоналей с помощью операций конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных. Множества вида $[R]$ называем замкнутыми классами (отношений). Замкнутый класс отношений $[R]$ из Π_k называем *A-замкнутым*, если вместе с любым отношением ρ классу $[R]$ принадлежат все отношения вида ρ^π, где $\pi \in \mathbf{A}_k$. Через $[R]_A$ обозначаем A-замыкание множества отношений R.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ и $\rho(x_1, \dots, x_m) \in \Pi_k$. Говорят, что функция f сохраняет отношение ρ, если для любых n наборов $(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{mn})$ из E_k^m, удовлетворяющих отношению ρ, набор $(f(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, f(a_{m1}, \dots, a_{mn}))$ также удовлетворяет отношению ρ. Множество всех функций из P_k, сохраняющих отношение ρ, обозначим через $\mathrm{Pol}\rho$, а множество всех отношений из Π_k, которые сохраняет функция f, — через $\mathrm{Inv} f$. Легко проверяется, что для любой функции f и любого отношения ρ множество $\mathrm{Pol}\rho$ является замкнутым классом функций, содержащим все селекторные функции, а множество $\mathrm{Inv} f$ — замкнутым классом отношений, содержащим все диагонали.

Отображения Pol и Inv распространим на все подмножества из Π_k и P_k: если $R \subseteq \Pi_k$ и $F \subseteq P_k$, то

$$\mathrm{Pol} R = \bigcap_{\rho \in R} \mathrm{Pol}\rho, \quad \mathrm{Inv} F = \bigcap_{f \in F} \mathrm{Inv} f.$$

Отображения Pol и Inv определяют соответствие Галуа [12, 13] между частично упорядоченными по включению множествами всех подмножеств из P_k и всех подмножеств из Π_k. При этом Галуа-замкнутыми множествами являются замкнутые классы функций из P_k, которым принадлежат все селекторные функции, и замкнутые классы отношений из Π_k, содержащие все диагонали [1]. Более того, отображение Pol (или Inv) задает антиизоморфизм между частично упорядоченными множествами замкнутых классов функций и замкнутых классов отношений. Нетрудно видеть, что для рассматриваемых соответствий Галуа A-замкнутым классам функций отвечают A-замкнутые классы отношений и A-замкнутым классам отношений — A-замкнутые классы функций.

Таким образом, описание A-замкнутых классов функций, содержащих селекторные функции, равносильно описанию A-замкнутых классов отношений, содержащих диагонали.

Если π — подстановка, то отношение $\pi(x) = y$ называется *графиком* подстановки π. Через $|E|$ обозначаем число элементов в множестве E.

Для любого k, $k \geqslant 4$, следующие отношения на E_k называем *основными*:

(1) $E_k^i(x) \equiv (x \in E_i), \quad 1 \leqslant i < k$.

(2) $\mu_k^i(x,y) \equiv E_k^2(x)\&E_k^2(y)\&(x \neq y) \vee (x, y \in \{2,3,\dots,i-1\})\&(x = y), \quad 2 \leqslant i < k$.

(3) $\nu_k^i(x,y) \equiv (x = 0)\&(y = 1) \vee (x, y \in \{2,3,\dots,i\})\&(x = y)$, $2 \leqslant i \leqslant k-1$.

(4) $\eta_k^i(x,y) \equiv E_k^3(x)\&E_k^3(y)\&(x+1 = y) \vee (x, y \in \{3,\dots,i-1\})\&(x = y)$, где сложение рассматривается по модулю 3 и $3 \leqslant i \leqslant k$.

(5) $\theta_k(x,y) \equiv E_k^2(x)\&(x+1 = y) \vee (x, y \in \{3,\dots,k-1\})\&(x = y)$.

(6) $\kappa_k(x,y) \equiv (E_k^2(x)\&E_k^2(y) \vee (x, y \in \{2,3\})\&(x \neq y)$.

(7) $\zeta_k(x,y) \equiv (x \in \{0,2,\dots,k-2\})\&(x+1 = y)$, где k четно.

(8) $\xi_k(x,y) \equiv (x = 0)\&(y = 3) \vee (x = 2)\&(y = 1) \vee (x \in \{4,\dots,k-2\})\&(x+1 = y)$, где k кратно 4.

(9) $\chi_k(x,y) \equiv E_k^1(x)\&E_k^i(y) \vee x = y = i-1, \quad 2 \leqslant i \leqslant k$.

(10) $\lambda_k(x,y,z) \equiv E_k^2(x)\&E_k^2(y)\&E_k^2(z)\&(x+y+z = 0)$, где сложение рассматривается по модулю 2.

(11) $\kappa_4^1(x,y) \equiv E_4^3(x)\&\kappa_4(x,y)$.

(12) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, где $+$ обозначает сложение в поле Галуа $GF(4)$ с нулем 0 и единицей 1.

Основные отношения (1)–(7), (9)–(12) вводились в работах [2, 3]. Кроме того, отношения (2)–(8), (11) представляют собой графики соответствующих основных инъективных функций из [6].

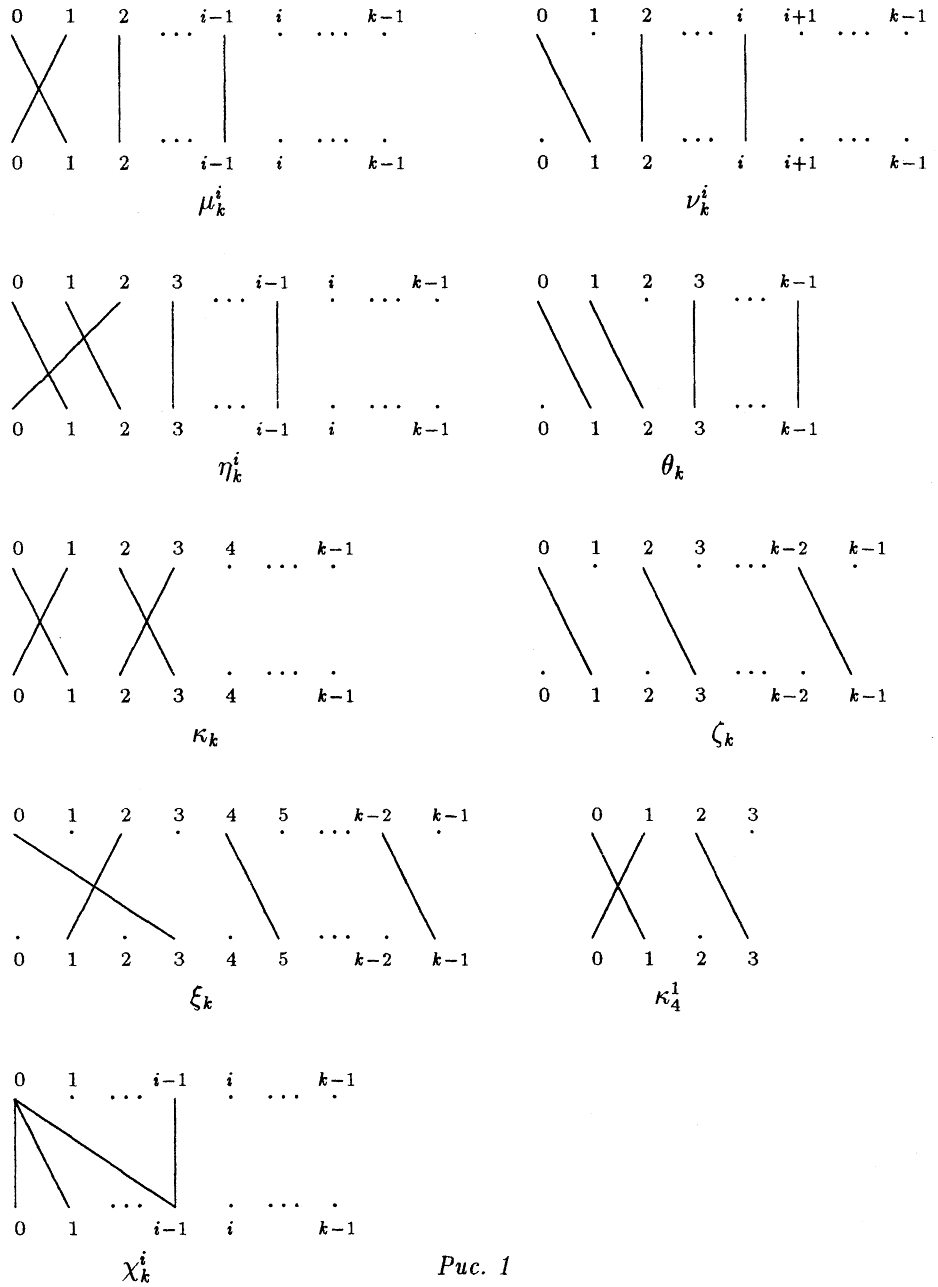

Рис. 1

На рис. 1 отношения (2)–(9), (11) изображены в виде двудольных графов, ребра которых соответствуют наборам, удовлетворяющим данным отношениям.

Класс I_k состоит из всех идемпотентных функций из P_k, т. е. таких функций f, что $f(x,\dots,x) = x$. Как нетрудно видеть (см., например, [4]), класс I_k определяется всеми отношениями вида $x = a$, где $a \in E_k$. Иными словами, $I_k = \mathrm{Pol}\{x = 0,\dots,x = k-1\}$. Так как класс I_k является A-замкнутым, а множество $[\{E_k^1(x)\}]_A$ включает все отношения $x = 0,\dots,x = k-1$, то $I_k = \mathrm{Pol}[\{E_k^1(x)\}]_A$. Тем самым описание всех A-замкнутых классов идемпотентных функций, содержащих селекторные функции, можно свести к описанию всех A-замкнутых классов отношений, содержащих отношение $E_k^1(x)$. С использованием этой редукции ниже на языке отношений будет сформулирован основной результат из [6] (теорема 1).

Отметим, что если f, g — частичные одноместные инъективные функции, а ρ, σ — графики этих функций, т. е

$$\rho(x,y) \equiv (f(x) = y), \quad \sigma(x,y) \equiv (g(x) = y),$$

то суперпозиции gf соответствует график $(\exists z)(\rho(x,z)\&\sigma(z,y))$, обращению f^{-1} — график $\rho(y,x)$, а функции f^π, двойственной к f относительно подстановки π, — график $\rho^\pi(x,y)$. Поэтому если частичная одноместная инъективная функция g получается из аналогичных функций $f_1,\dots,f_s$ с помощью операций суперпозиции, обращения и перехода к двойственным функциям для подстановок из $\mathbf{A}_k$, то график функции g можно получить из графиков функций $f_1,\dots,f_s$ с помощью операций конъюнкции, проектирования, перестановки переменных и перехода к двойственным отношениям для подстановок из $\mathbf{A}_k$.

В [6] доказано, что при любом k, $k \geqslant 3$, всякая непустая инъективная функция, определенная на некотором подмножестве множества E_k, A-эквивалентна (в смысле операций суперпозиции, обращения и перехода к двойственным функциям для подстановок из $\mathbf{A}_k$) одной из основных функций $\alpha_k^i, \mu_k^i, \nu_k^i, \eta_k^i, \theta_k, \kappa_k, \zeta_k, \xi_k, \kappa_4^1$. Функции $\mu_k^i, \nu_k^i, \eta_k^i, \theta_k, \kappa_k, \zeta_k, \xi_k, \kappa_4^1$, за исключением функции ν_k^1, в качестве графиков имеют соответствующие основные отношения (2)–(8), (11). График функции ν_k^1 представи́м в виде $(x = 0)\&(y = 1)$, а функции α_k^i — в виде $E_k^i(x)\&(x = y)$. Так как последнее отношение A-эквивалентно отношению E_k^i, приходим к следующей форме основного утверждения из [6].

Теорема 1. *Пусть $k \geqslant 3, \rho(x,y)$ — отличное от диагонали отношение из Π_k вида*

$$(x \in E)\&(\pi(x) = y), \tag{1}$$

где $|E| \geqslant 2$ и π — подстановка на E_k. Тогда отношение ρ A-эквивалентно одному из основных отношений (1)–(8), (11).

2. Вспомогательные результаты

Перейдем к изучению двуместных отношений, отличных от отношений (1). Далее предполагаем, что $k \geqslant 4$.

Лемма 1. *Пусть отношение* $\rho(x,y)$ *из* Π_k *имеет вид*

$$(x = a_1)\&(y \in \{b_1, b_2\}) \vee (x = a_2)\&(y = b_2), \tag{2}$$

где $a_1 \neq a_2$ *и* $b_1 \neq b_2$. *Тогда* $\chi_k^2 \in [\{\rho\}]_A$. *Кроме того, если* $(b_1, b_2) = (a_2, a_1)$, *то* $\mu_k^2 \in [\{\rho\}]_A$; *если* $k = 4$ *и* $\{a_1, a_2\} \cap \{b_1, b_2\} = \varnothing$, *то множеству* $[\{\rho\}]_A$ *принадлежит одно из отношений* ζ_4 *или* ξ_4; *во всех остальных случаях, если* $(b_1, b_2) \neq (a_1, a_2)$, *то* $\nu_k^2 \in [\{\rho\}]_A$.

Доказательство. Если $(b_1, b_2) = (a_1, a_2)$, то отношение χ_k^2 двойственно к ρ относительно любой четной подстановки, переводящей 0 в a_1 и 1 в a_2 (такие существуют, поскольку $k \geqslant 4$).

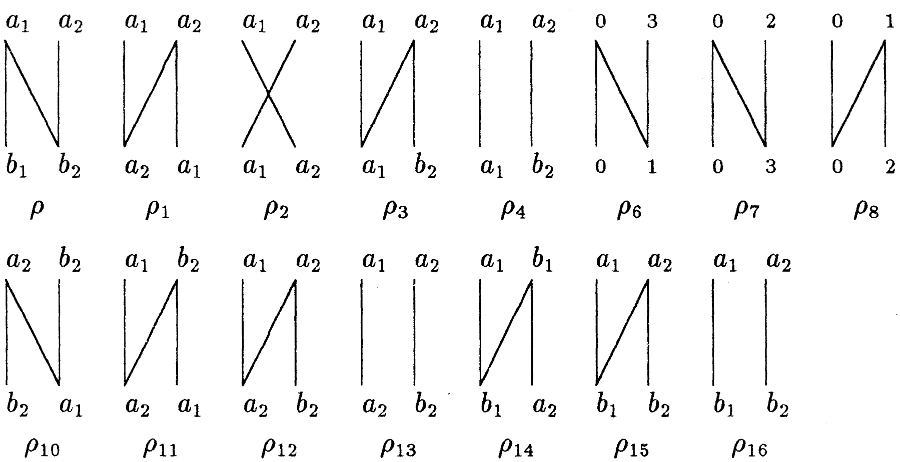

Рис. 2

Если $(b_1, b_2) = (a_2, a_1)$, то пусть c, d — различные элементы из $E_k \setminus \{a_1, a_2\}$. Определим $\rho_1 = \rho^\pi$, где $\pi = (a_1 a_2)(cd)$ (мы указываем лишь неодноэлементные циклы в цикловом разложении подстановок), и положим

$$\rho_2(x,y) \equiv \rho(x,y)\&\rho_1(x,y)$$

(рис. 2). Тогда μ_k^2 будет двойственно к ρ_2 относительно любой четной подстановки, переводящей 0 в a_1 и 1 в a_2. Относительно этой же подстановки χ_k^2 двойственно отношению, которое определяется формулой

$$(\exists z)(\rho(x,z)\&\rho_2(z,y)).$$

Пусть $\{b_1, b_2\} \neq \{a_1, a_2\}$. Рассмотрим сначала случай, когда $\{b_1, b_2\} \cap \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$.

Если $b_1 = a_1$ (и, следовательно, $b_2 \notin \{a_1, a_2\}$), то при $k \geqslant 5$ выберем различные элементы c, d из множества $E_k \setminus \{a_1, a_2, b_2\}$, образуем отношение ρ_3 (см. рис. 2), двойственное к $\rho(y, x)$ относительно четной подстановки $(a_2 b_2)(cd)$, и положим

$$\rho_4(x, y) \equiv \rho(x, y) \& \rho_3(x, y).$$

Тогда ν_k^2 будет двойственно к ρ_4 относительно любой четной подстановки, переводящей 0 в a_2, 1 в b_2 и 2 в a_1.

Полагая

$$\rho_5(x, y) \equiv (\exists z)(\rho(x, z) \& \rho_4(y, z)),$$

видим, что для отношения ρ_5 можно воспользоваться рассуждениями, проведенными выше для отношения ρ в случае $(b_1, b_2) = (a_1, a_2)$. Согласно этим рассуждениям имеем $\chi_k^2 \in [\{\rho_5\}]_A$.

Пусть $k = 4$ и $b_1 = a_1$. Можно считать, что $a_1 = 0$ и $a_2 = 1$, поскольку в противном случае вместо отношения ρ можно взять отношение, двойственное к ρ относительно четной подстановки, переводящей 0 в a_1 и 1 в a_2. Если $b_2 = 2$, то пусть отношения ρ_6, ρ_7 (см. рис. 2) двойственны к ρ относительно четных подстановок (123) и (132). Положим

$$\rho_8(x, y) \equiv (\exists z)(\rho_6(z, x) \& \rho_7(y, z)).$$

Тогда ν_4^2 двойственно отношению

$$\rho_9(x, y) \equiv \rho(x, y) \& \rho_8(x, y)$$

относительно четной подстановки (012). Кроме того, имеем

$$\chi_4^2(x, y) \equiv (\exists z)(\rho(x, z) \& \rho_9(y, z)).$$

Случай $b_2 = 3$ рассматривается аналогично.

Пусть $b_1 = a_2$. Возьмем отношения ρ_{10}, ρ_{11}, двойственные к ρ относительно четных подстановок $(a_1 b_2 a_2)$ и $(a_1 a_2 b_2)$, и положим

$$\rho_{12}(x, y) \equiv (\exists z)(\rho_{10}(y, z) \& \rho_{11}(z, x)), \quad \rho_{13}(x, y) \equiv \rho(x, y) \& \rho_{12}(x, y).$$

Тогда формула $(\exists z)(\rho(x, z) \& \rho_{13}(y, z))$ приводит к рассмотренному случаю $(b_1, b_2) = (a_1, a_2)$. Поэтому $\chi_k^2 \in [\{\rho\}]_A$. Кроме того, согласно лемме 11 из [6], рассматриваемой для соответствующих отношений, имеем $\nu_k^2 \in [\{\rho_{13}\}]_A$.

Пусть $b_2 = a_1$. Положим $\rho_{14} = \rho^\pi$, где $\pi = (a_1 a_2 b_1)$. Тогда отношение $(\exists z)(\rho(x, z) \& \rho_{14}(z, y))$ приводит к рассмотренному случаю $b_1 = a_2$.

Случай $b_2 = a_2$ сводится к случаю $b_1 = a_1$ перестановкой переменных.

Предположим, что $\{b_1, b_2\} \cap \{a_1, a_2\} = \varnothing$. Пусть $\rho_{15} = \rho^{\pi}$, где $\pi = (a_1 a_2)(b_1 b_2)$. Положим

$$\rho_{16}(x, y) \equiv \rho(x, y) \& \rho_{15}(x, y).$$

Как и выше, для получения отношения χ_k^2 обращаемся к отношению $(\exists z)(\rho(x, z) \& \rho_{16}(y, z))$, которое можно рассматривать в качестве отношения ρ в случае $(b_1, b_2) = (a_1, a_2)$. Если $k \geqslant 5$, то включение $\nu_k^2 \in [\{\rho_{16}\}]_A$ следует из леммы 11 [6]. Если же $k = 4$, то согласно лемме 12 из [6] отношение ρ_{16} A-эквивалентно одному из отношений ζ_4 или ξ_4. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $\rho(x, y)$ — отношение из Π_k вида (2), которое не является A-эквивалентным отношению χ_k^2. Тогда в множестве $\{\mu_k^2, \nu_k^2, \zeta_4, \xi_4\}$ найдется такое отношение σ, что отношение ρ A-эквивалентно множеству $\{\sigma, \chi_k^2\}$.*

Доказательство. Используем обозначения a_1, a_2, b_1, b_2 из леммы 1. Если $(b_1, b_2) = (a_2, a_1)$, то по лемме 1 имеем $\{\mu_k^2, \chi_k^2\} \subseteq [\{\rho\}]_A$. С другой стороны, отношение ρ двойственно к $(\exists z)(\mu_k^2(x, z) \& \chi_k^2(z, y))$ относительно любой четной подстановки, переводящей a_1 в 1 и a_2 в 0.

В случаях, когда $\{\nu_k^2, \chi_k^2\} \subset [\{\rho\}]_A$, согласно лемме 5 из [6] множеству $[\{\nu_k^2\}]_A$ принадлежат отношения

$$\sigma_1(x, y) \equiv (x = a_1) \& (y = 0) \vee (x = a_2) \& (y = 1),$$
$$\sigma_2(x, y) \equiv (x = 0) \& (y = b_1) \vee (x = 1) \& (y = b_2).$$

Из отношений χ_k^2, σ_1 и σ_2 получаем отношение ρ:

$$\rho(x, y) \equiv (\exists z_1)(\exists z_2)(\sigma_1(x, z_1) \& \chi_k^2(z_1, z_2) \& \sigma_2(z_2, y)).$$

Пусть $k = 4$ и $\{b_1, b_2\} \cap \{a_1, a_2\} = \varnothing$. Тогда согласно лемме 1 имеем $\{\zeta_4, \chi_4^2\} \subset [\{\rho\}]_A$ или $\{\xi_4, \chi_4^2\} \subset [\{\rho\}]_A$, причем отношение ρ_{16} (см. рис. 2), принадлежащее множеству $[\{\rho\}]_A$, A-эквивалентно соответствующему отношению ζ_4 или ξ_4. Если $\{\zeta_4, \chi_4^2\} \subset [\{\rho\}]_A$, то возьмем отношение χ, двойственное к χ_4^2 относительно четной подстановки, переводящей a_1 в 0 и a_2 в 1. Так как в этом случае $\rho_{16} \in [\{\zeta_4\}]_A$ и

$$\rho(x, y) \equiv (\exists z)(\chi(x, z) \& \rho_{16}(z, y)),$$

то имеем $\rho \in [\{\zeta_4, \chi_4^2\}]_A$. Аналогично рассматривается случай, когда $\{\xi_4, \chi_4^2\} \subset [\{\rho\}]_A$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть отношение $\rho(x, y)$ из Π_k имеет вид*

$$(x \in E) \& (y \in F) \& (x = a \vee y = b), \tag{3}$$

где $E \subseteq E_k, F \subseteq E_k, a \in E$ *и* $b \in F$. *Если*

$$i = \min(|E|,|F|) \geqslant 2, \quad j = \max(|E|,|F|) \geqslant 3,$$

то отношение ρ *A-эквивалентно отношению* χ_k^j *при* $j < k$ *и множеству* $\{E_k^i(x), \chi_k^k\}$ *при* $j = k$.

Доказательство. Для определенности будем считать, что $i = |E|$, $j = |F|$. Сначала предположим, что $j < k$. Имеем $(y \in F) \equiv (\exists x)\rho(x,y)$. Следовательно, множеству $[\{\rho\}]_A$ принадлежит отношение $(x \in F)\&(x = y)$. Тогда по лемме 1 из [6] в $[\{\rho\}]_A$ входит любое отношение вида $(x \in G)\&(x = y)$, где $|G| \leqslant |F|$, и, значит, отношение $x \in G$. Поэтому множеству $[\{\rho\}]_A$ принадлежит отношение

$$\rho_1(x,y) \equiv (x \in \{a,c\})\&(y \in \{b,d\})\&\rho(x,y),$$

где c — элемент из E, отличный от a, и d — элемент из F, отличный от b. Поскольку $j \geqslant 3$, выберем элемент d таким, чтобы согласно лемме 1 в множество $[\{\rho_1\}]_A$ входило отношение ν_k^2. Пусть π — какая-либо четная подстановка на E_k, отображающая E_j на F, $\rho_2(x,y) \equiv \rho^\pi(x,y)$, $e = \pi^{-1}(a)$, $g = \pi^{-1}(c)$. Если в соответствии с леммой 5 из [6] в множестве $[\{\nu_k^2\}]_A$ выбрать отношение

$$\rho_3(x,y) \equiv (x = 0)\&(y = e) \vee (x = i-1)\&(y = g),$$

то будем иметь

$$(\exists z)(\rho_3(x,z)\&\rho_2(z,y)) \equiv \chi_k^j(x,y).$$

Теперь докажем, что $\rho \in [\{\chi_k^j\}]_A$. Так как в приведенных выше доказательствах в качестве отношения ρ можно рассматривать отношение χ_k^j, то $\{E_k^i(x), \nu_k^2\} \subset [\{\chi_k^j\}]_A$. Построим отношение χ_k^i. Если $j \geqslant 4$, то пусть отношение ρ_4 двойственно к χ_k^j относительно четной подстановки, переводящей 0 в 0, $i-1$ в $j-1$ и сохраняющей множество E_j. Тогда

$$E_k^i(y)\&\rho_4(x,y) \equiv \chi_k^i(x,y).$$

В случае $j = 3$ и $i = 2$ для получения отношения χ_k^i следует образовать отношение $(y \in \{0,2\})\&\chi_k^3(x,y)$ и воспользоваться леммой 1. Таким образом, $\chi_k^i \in [\{\chi_k^j\}]_A$.

Пусть отношение ρ_5 двойственно к χ_k^i относительно четной подстановки π_1, отображающей множество E на множество E_i и переводящей a в $i-1$, отношение ρ_6 двойственно к χ_k^j относительно четной подстановки π_2, отображающей F на E_j и переводящей b в $j-1$. Пусть также $c = \pi_1^{-1}(0)$ и $d = \pi_2^{-1}(0)$ (рис. 3). Если в множестве $[\{\nu_k^2\}]_A$ взять отношение

$$\rho_7(x,y) \equiv (x = a)\&(y = d) \vee (x = c)\&(y = b),$$

то будем иметь

$$\rho(x,y) \equiv (\exists z_1)(\exists z_2)(\rho_5(z_1,x)\&\rho_7(z_1,z_2)\&\rho_6(z_2,y)).$$

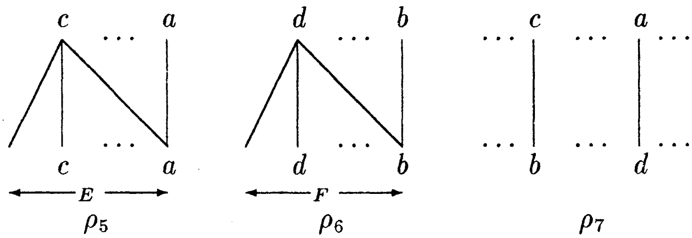

Рис. 3

Предположим, что $j = k$, т. е. $F = E_k$. Справедливость леммы устанавливается так же, как и при $j < k$. Исключение составляет случай, когда $i = k$. В этом случае дополнительные рассуждения необходимы для доказательства принадлежности отношения $E_k^2(x)$ множеству $[\{\rho\}]_A$.

Если $a \neq b$, то $(x \in \{a,b\}) \equiv \rho(x,x)$. Если же $a = b$, то пусть c, d, e — различные элементы из $E_k \setminus \{a\}$. Возьмем отношение ρ_8, двойственное к ρ относительно четной подстановки $(ac)(de)$. Тогда

$$\rho(x,y)\&\rho_8(x,y) \equiv (x,y \in \{a,c\})\&(x \neq y).$$

Из этого отношения проектированием по переменной y получаем отношение $x \in \{a,c\}$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть отношение $\rho(x,y)$ из Π_k имеет вид (3). Тогда ρ A-эквивалентно одному или двум основным отношениям.*

Доказательство. Сначала предположим, что одно из множеств E, F одноэлементно. Пусть, например, $E = \{a\}$. Тогда

$$\rho(x,y) \equiv (x = a)\&(y \in F).$$

Проектируя отношение $\rho(x,y)$ по переменным x и y, получаем, что множеству $[\{\rho\}]_A$ принадлежат отношения $x = a$ и $y \in F$. Поэтому в случае $|F| < k$ отношение ρ A-эквивалентно отношению $E_k^j(x)$, где $j = |F|$, а в случае $F = E_k$ — отношению $E_k^1(x)$.

Если каждое множество E, F содержит не менее двух элементов, то утверждение леммы следует из лемм 2 и 3.

Лемма 5. *Пусть отношение $\rho(x,y)$ из Π_k имеет вид*

$$(x = a_1)\&(y \in \{b_1,b_2\}) \vee (x = a_2)\&(y = b_3),$$

где элементы каждого из множеств $\{a_1,a_2\}, \{b_1,b_2,b_3\}$ попарно различны. Тогда $\{\lambda_k, \chi_k^3\} \subset [\{\rho\}]_A$.

Доказательство. Так как проекция отношения $\rho(x, y)$ по переменной y совпадает с отношением $x \in \{a_1, a_2\}$, то множеству $[\{\rho\}]_A$ принадлежит отношение $E_k^2(x)$. Положим (рис. 4)

$$\rho_1(x, y) \equiv (\exists z)(\rho(z, x) \& \rho(z, y)).$$

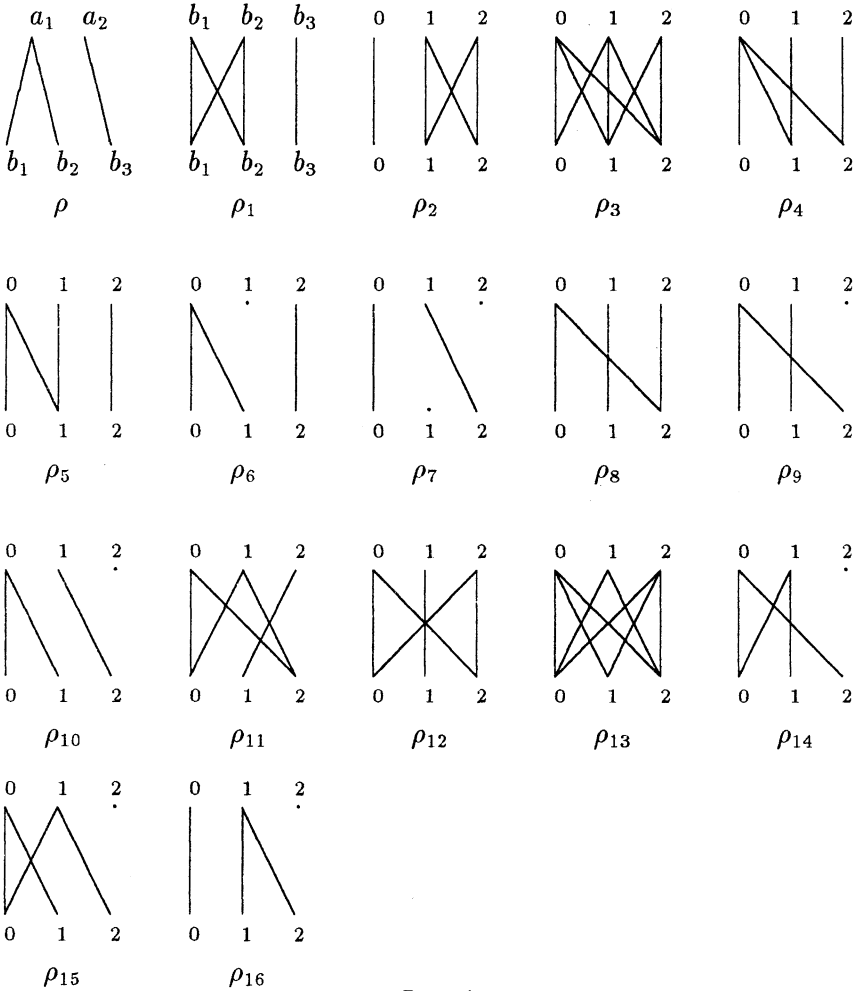

Рис. 4

Можно считать, что $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, поскольку в противном случае можно рассмотреть отношение, двойственное к ρ_1 относительно четной подстановки, отображающей множество $\{0, 1\}$ на множество $\{b_1, b_2\}$ и 2 в b_3.

Образуем отношение ρ_2, двойственное к ρ_1 относительно четной подстановки (021). Пусть

$$\rho_3(x,y) \equiv (\exists z)(\rho_1(x,z) \& \rho_2(z,y)).$$

Замечаем, что отношение $\rho_3(x,y)$ отличается от отношения $E_k^3(x)\&E_k^3(y)$ только набором (2,0), который не удовлетворяет отношению ρ_3. Любое аналогичное отношение, которое отличается от отношения $E_k^3(x)\&E_k^3(y)$ одним набором (a,b), где $a \neq b$, совпадает либо с $\rho_3(y,x)$, либо с отношением, двойственным одному из отношений $\rho_3(x,y), \rho_3(y,x)$ относительно четных подстановок (012), (021). Конъюнкция таких отношений позволяет «удалить» из отношения $E_k^3(x)\&E_k^3(y)$ любое число наборов (a,b), где $a \neq b$. В частности, таким путем получаем отношения ρ_4, ρ_5. Имеем

$$\chi_k^3(x,y) \equiv (x \in \{0,2\}) \& \rho_4(x,y).$$

Аналогичная формула с заменой ρ_4 на ρ_5 дает отношение ρ_6. Отношение ρ_7 двойственно к $(y \in \{1,2\})\&\rho_6(x,y)$ относительно четной подстановки (021). Пусть отношение ρ_8, как и отношения ρ_4, ρ_5, получается из отношения $E_k^3(x)\&E_k^3(y)$ удалением соответствующих наборов и

$$\rho_9(x,y) \equiv E_k^2(x) \& \rho_8(x,y).$$

Положим

$$\rho_{10}(x,y) \equiv (\exists z)(\rho_7(x,z)\&\rho_6(z,y)), \ \rho_{11}(x,y) \equiv (\exists z)(\rho_{10}(x,z)\&\rho_9(z,y)).$$

Возьмем отношение ρ_{12}, двойственное к ρ_2 относительно четной подстановки (021), и определим

$$\rho_{13}(x,y) \equiv (\exists z)(\rho_{12}(x,z)\&\rho_{11}(z,y)).$$

Как видно из рис. 4, отношение $\rho_{13}(x,y)$ отличается от отношения $E_k^3(x)\&E_k^3(y)$ только набором (1,1), который не удовлетворяет отношению ρ_{13}. С помощью четных подстановок (012), (021) можно получить два двойственных к ρ_{13} отношения, которые в этом смысле отвечают наборам (0,0) и (2,2). Вспоминая аналогичные свойства отношения ρ_3, приходим к выводу, что множество $[\{\rho\}]_A$ содержит все девять отношений, которые отличаются от отношения $E_k^3(x)\&E_k^3(y)$ только одним набором. Следовательно, конъюнкцией соответствующих отношений этого типа можно получить отношения $\rho_{14}, \rho_{15}, \rho_{16}$. Полагая

$$\rho_{17}(x,y,z) \equiv (\exists v)(\rho_{14}(x,v)\&\rho_{15}(y,v)\&\rho_{16}(z,v)),$$

видим, что отношению ρ_{17} удовлетворяют лишь наборы (0,0,0), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0). Поэтому

$$\lambda_k(x,y,z) \equiv \rho_{17}(x,y,z)\&\rho_{17}(x,z,y)\&\rho_{17}(y,z,x).$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть отношение* $\rho(x,y)$ *из* Π_k *не имеет вида* (1), (3) *или*

$$(x \in E)\&(y \in F), \tag{4}$$

где $E, F \subseteq E_k$. *Тогда* $\{\lambda_k, \chi_k^3\} \subset [\{E_k^3(x), \rho\}]_A$.

Доказательство. Пусть

$$(x \in E) \equiv (\exists y)\rho(x,y), \ (y \in F) \equiv (\exists x)\rho(x,y).$$

Отношение ρ в этом доказательстве удобно рассматривать в виде графика частичной многозначной функции π с областью определения E и областью значений F, т. е. $\rho(x,y) \equiv (y \in \pi(x))$. Так как ρ не имеет вида (1), то π не является (однозначной) инъективной функцией. Это означает, что для некоторого a из E_k хотя бы одно множество $\pi(a), \pi^{-1}(a)$ содержит более одного элемента. Пусть для определенности это будет множество $\pi(0)$. Предположим еще, что величина $|\pi(0)|$ максимальна среди величин $|\pi(i)|$, где $i \in E$. В силу выбора множества $\pi(0)$ возможны лишь следующие случаи.

1. Существует такое $i, i \in E$, что $\pi(0) \cap \pi(i) = \varnothing$.

2. Существует такое $i, i \in E$, что множества $\pi(0) \setminus \pi(i)$, $\pi(0) \cap \pi(i)$, $\pi(i) \setminus \pi(0)$ непусты.

3. При любом i, $i \in E$, выполняется включение $\pi(i) \subseteq \pi(0)$.

В случае 1 пусть a, b — различные элементы из $\pi(0)$ и $c \in \pi(i)$. Тогда отношение

$$(x \in \{0, i\})\&(y \in \{a, b, c\})\&\rho(x,y) \tag{5}$$

принадлежит множеству $[\{E_k^3(x), \rho\}]_A$ и удовлетворяет условиям леммы 5.

В случае 2 в каждом из перечисленных непустых множеств выберем по элементу и обозначим их через a, b, c. Определим отношение $\rho_1(x,y)$ по формуле (5) и положим

$$\rho_2(x,y) \equiv (\exists z)(\rho_1(z,x)\&\rho_1(z,y)), \ \rho_3(x,y) \equiv (x \in \{a,b\})\&\rho_2(x,y)$$

(рис. 5). Для отношения ρ_3 выполняются условия случая 3. Поэтому далее будем рассматривать лишь отношения ρ, для которых имеет место случай 3. Заметим, что тогда $F = \pi(0)$.

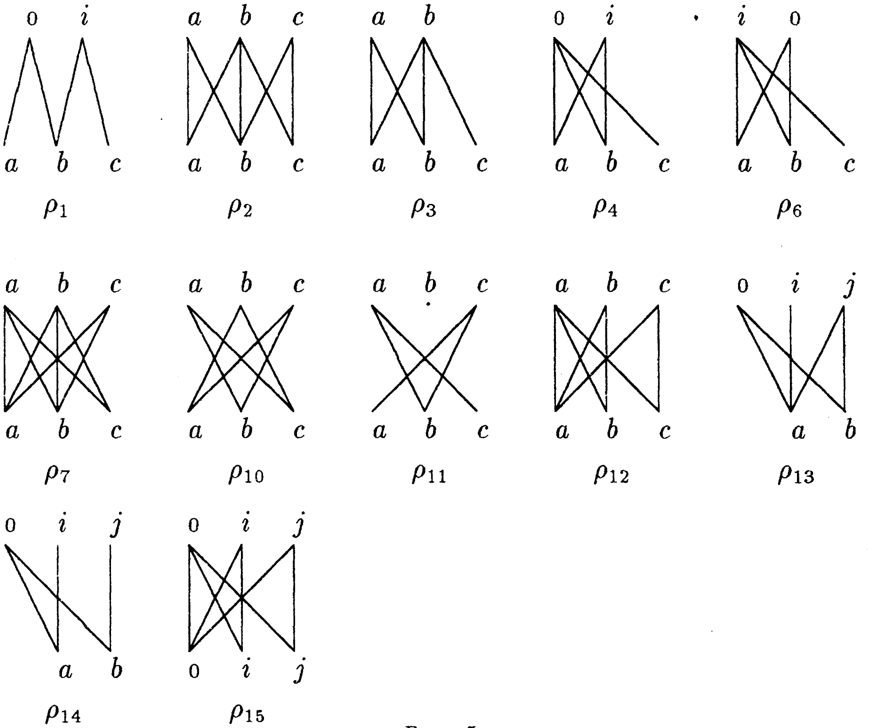

Рис. 5

Из условий леммы следует, что в $E\setminus\{0\}$ либо имеется такой элемент i, что $1 < |\pi(i)| < |F|$, либо имеются два элемента i, j такие, что $|\pi(i)| \neq |\pi(j)|$, либо два элемента i, j, для которых $|\pi(i)| = |\pi(j)| = 1$ и $\pi(i) \neq \pi(j)$. Последовательно разберем эти три возможности.

Пусть для некоторого i из $E \setminus \{0\}$ выполняются неравенства $1 < |\pi(i)| < |F|$. Выберем различные элементы a, b из $\pi(i)$, элемент c из $F \setminus \pi(i)$ и определим отношение ρ_4 по формуле (5) (см. рис. 5). Пусть далее d — такой элемент из $\{a, b\}$, что из отношения $(y \in \{d, c\})\, \&\rho_4(x, y)$ по лемме 1 можно получить отношение ν_k^2. Согласно лемме 5 из [6] множеству $[\{\nu_k^2\}]_A$ принадлежит отношение

$$\rho_5(x, y) \equiv (x = 0)\&(y = i) \vee (x = i)\&(y = 0).$$

Положим

$$\rho_6(x, y) \equiv (\exists z)(\rho_5(x, z)\&\rho_4(z, y)), \;\; \rho_7(x, y) \equiv (\exists z)(\rho_4(z, x)\&\rho_6(z, y)).$$

Как видно из рис. 5, отношение ρ_7 отличается от отношения

$$(x \in \{a, b, c\})\&(y \in \{a, b, c\})$$

только набором (c,c), который не удовлетворяет отношению ρ_7. Обозначим через ρ_8, ρ_9 отношения, двойственные к ρ_7 относительно четных подстановок (abc) и (acb). Пусть

$$\rho_{10}(x,y) \equiv \rho_7(x,y) \& \rho_8(x,y) \& \rho_9(x,y), \quad \rho_{11}(x,y) \equiv (x \in \{a,c\}) \& \rho_{10}(x,y).$$

Тогда

$$\rho_2(x,y) \equiv (\exists z)(\rho_{11}(z,x) \& \rho_{11}(z,y)).$$

Если отношение ρ_{12} двойственно к ρ_2 относительно четной подстановки (abc), то отношение

$$(x \in \{a,c\}) \& \rho_2(x,y) \& \rho_{12}(x,y)$$

удовлетворяет условиям леммы 5.

Продолжая доказательство, предположим, что в $E \setminus \{0\}$ существуют такие элементы i,j, что $|\pi(i)| \neq |\pi(j)|$. Можно также считать, что условия рассмотренного выше случая не выполняются, т. е. $|\pi(i)|, |\pi(j)| \in \{1, |F|\}$. Пусть, например, $|\pi(i)| = 1$, $\pi(j) = F$.

Если $\pi(i) = \{a\}$ и $b \in F \setminus \{a\}$, то определим

$$\rho_{13}(x,y) \equiv (x \in \{0,i,j\}) \& (y \in \{a,b\}) \& \rho(x,y). \tag{6}$$

Тогда отношение $\rho_{13}(y,x)$ можно взять в качестве отношения $\rho_4(x,y)$ и воспользоваться приведенными выше построениями.

Пусть для любого x из $E \setminus \{0\}$ множество $\pi(x)$ одноэлементно и существуют такие i,j из $E \setminus \{0\}$, что $\pi(i) \neq \pi(j)$. Если $\pi(i) = \{a\}$ и $\pi(j) = \{b\}$, то определим отношение ρ_{14} по формуле (6). Полагая

$$\rho_{15}(x,y) \equiv (\exists z)(\rho_{14}(x,z) \& \rho_{14}(y,z)),$$

видим, что к отношению ρ_{15} можно применить те же рассуждения, что и к отношению ρ_{12}. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Если отношение $\rho(x,y)$ из Π_4 имеет вид*

$$(x \in G_1) \& (y \in H_1) \vee (x \in G_2) \& (y \in H_2), \tag{7}$$

где $|G_1| = |G_2|, |H_1| = |H_2|, G_1 \cap G_2 = \varnothing, H_1 \cap H_2 = \varnothing$ и хотя бы одно из множеств $G_1 \cup G_2, H_1 \cup H_2$ совпадает с E_4, то $\{\mu_4^4, x_1 + x_2 = x_3 + x_4\} \subset [\{E_4^1(x), \rho\}]_A$. Если отношение $\rho(x,y)$ из Π_k не имеет вида (1), (3), (4) или (при $k=4$) вида (7), то $\{\lambda_k, \chi_k^3\} \subset [\{E_k^1(x), \rho\}]_A$.

Доказательство. Пусть сначала $\rho(x,y)$ — отношение из Π_4, имеющее вид (7). Предположим для определенности, что $H_1 \cup H_2 = E_4$. Тогда $|H_1| = |H_2| = 2$ и

$$\varepsilon_1(x,y) \equiv (\exists z)(\rho(z,x) \& \rho(z,y))$$

представляет собой отношение эквивалентности на E_4 с двумя классами эквивалентных элементов H_1 и H_2. Два других отношения эквивалентности $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ на E_4 с двухэлементными классами эквивалентных элементов двойственны к ε_1 относительно четных подстановок (012) и (021). Будем предполагать, например, что для отношения ε_1 классы H_1, H_2 суть $\{0,1\}$ и $\{2,3\}$. Имеем тогда

$$E_4^2(x) \equiv (\exists z)(E_4^1(z)\&\varepsilon_1(x,z)).$$

Положим (рис. 6)

$$\sigma_1(x,y) \equiv E_4^2(x)\&(\exists z)((z \in \{0,3\})\&\varepsilon_2(x,z)\&\varepsilon_1(z,y)),$$
$$\sigma_2(x,y) \equiv E_4^2(x)\&\varepsilon_2(x,y), \quad \sigma_3(x,y) \equiv E_4^2(x)\&\varepsilon(x,y).$$

Тогда

$$\lambda_4(x,y,z) \equiv (\exists v)(\sigma_1(x,v)\&\sigma_2(y,v)\&\sigma_3(z,v)).$$

Полагая далее

$$\sigma_4(x,y,z) \equiv (\exists v_1)(\exists v_2)(\exists v_3)(\lambda_4(v_1,v_2,v_3)\&\sigma_1(v_1,x)\&\sigma_1(v_2,y)\&\sigma_1(v_3,z)), \tag{8}$$

убеждаемся в том, что область истинности отношения σ_4 представима в виде

$$\{0,1\}^3 \cup \{0,1\} \times \{2,3\}^2 \cup \{2,3\} \times \{0,1\} \times \{2,3\} \cup \{2,3\}^2 \times \{0,1\}.$$

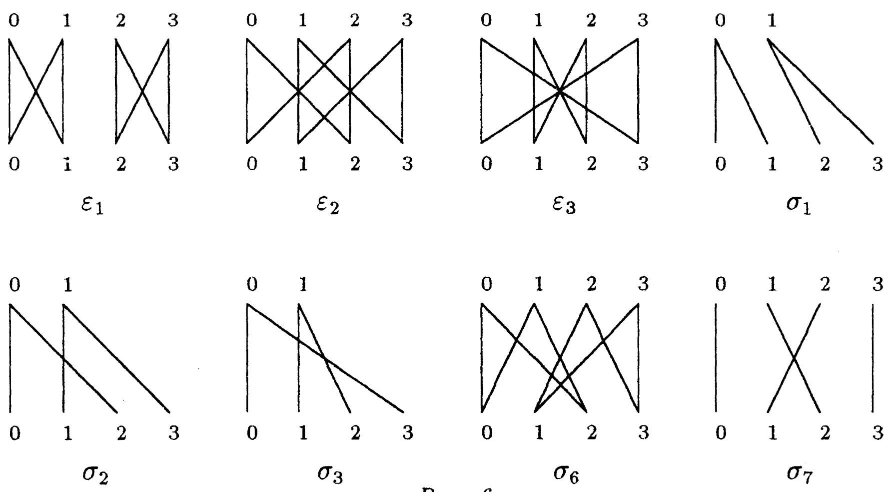

Рис. 6

Аналогично, если определить отношение $\sigma_5(x,y,z)$ по формуле (8) с заменой σ_1 на σ_2, то его область истинности можно представить в виде

$$\{0,2\}^3 \cup \{0,2\} \times \{1,3\}^2 \cup \{1,3\} \times \{0,2\} \times \{1,3\} \cup \{1,3\}^2 \times \{0,2\}.$$

Отсюда следует, что

$$(x + y + z = 0) \equiv \sigma_4(x, y, z) \& \sigma_5(x, y, z),$$

где $+$ обозначает сложение в поле $GF(4)$. Далее получаем

$$(x_1 + x_2 = x_3 + x_4) \equiv (\exists z)((x_1 + x_2 + z = 0) \& (x_3 + x_4 + z = 0)).$$

Пусть

$$\sigma_6(x, y) \equiv (\exists z)(\sigma_1(z, x) \& \sigma_2(z, y)), \ \sigma_7(x, z) \equiv \sigma_6(x, y) \& \varepsilon_3(x, y)$$

(см. рис. 6). Тогда отношение μ_4^4 двойственно к σ_7 относительно четной подстановки (012).

Перейдем ко второй части доказательства леммы, когда отношение ρ из Π_k не имеет вида (1),(3),(4) или (7). В силу леммы 6 в этом случае достаточно установить, что множеству $[\{E_k^1(x), \rho\}]_A$ принадлежит отношение $E_k^3(x)$. Если воспользоваться обозначениями E, F, π из предыдущей леммы, то для выполнения этого включения достаточно, в свою очередь, чтобы хотя бы одно из множеств $E, F, \pi(a), \pi^{-1}(a)$ (где $a \in E_k$) содержало более двух, но менее k элементов. В связи с этим можно предполагать, что каждое из множеств $E, F, \pi(a), \pi^{-1}(a)$ либо совпадает с E_k, либо содержит не более двух элементов. Так как отношение ρ не имеет вида (4), то ни одно из множеств E, F не может быть одноэлементным, а поскольку ρ не имеет также вида (1) или (3), то по крайней мере одно из множеств E, F содержит более двух элементов. Таким образом, в силу симметрии достаточно исследовать, например, две возможности: $|E| = 2, F = E_k$ и $E = F = E_k$.

Предположим, что $|E| = 2$ и $F = E_k$. Можно считать, что $E = E_2$, поскольку в противном случае вместо отношения ρ можно взять отношение, двойственное к ρ относительно четной подстановки, отображающей E_2 на E. Так как $k \geqslant 4$, то должно выполняться неравенство $|\pi(0)| + |\pi(1)| \geqslant 4$, а так как отношение ρ не имеет вида (3), то не может реализоваться случай, когда одно из множеств $\pi(0), \pi(1)$ одноэлементно, а другое совпадает с E_k.

Если $|\pi(0)| = |\pi(1)| = 2$, то в силу неравенства $k \geqslant 4$ получаем $k = 4$ и $\pi(0) \cap \pi(1) = \varnothing$, т. е. отношение ρ имеет вид (7), что невозможно по предположению.

Пусть $\pi(0) = E_k$ и $\pi(1) = \{i, j\}$, где $i \neq j$. Если $\{i, j\} = \{0, 1\}$, то возьмем отношение ρ_1, двойственное к ρ относительно четной подстановки $(01)\,(34)$, и положим

$$\rho_2(x, y) \equiv (\exists z)(\rho_1(z, x) \& \rho(z, y))$$

(рис. 7). Далее образуем отношения ρ_3, ρ_4, двойственные к ρ_2 относительно четных подстановок (012) и (021). Проектированием отношения

$$\rho_5(x, y) \equiv \rho_2(x, y) \& \rho_3(x, y) \& \rho_4(x, y)$$

по переменной y получаем отношение $E_k^3(x)$.

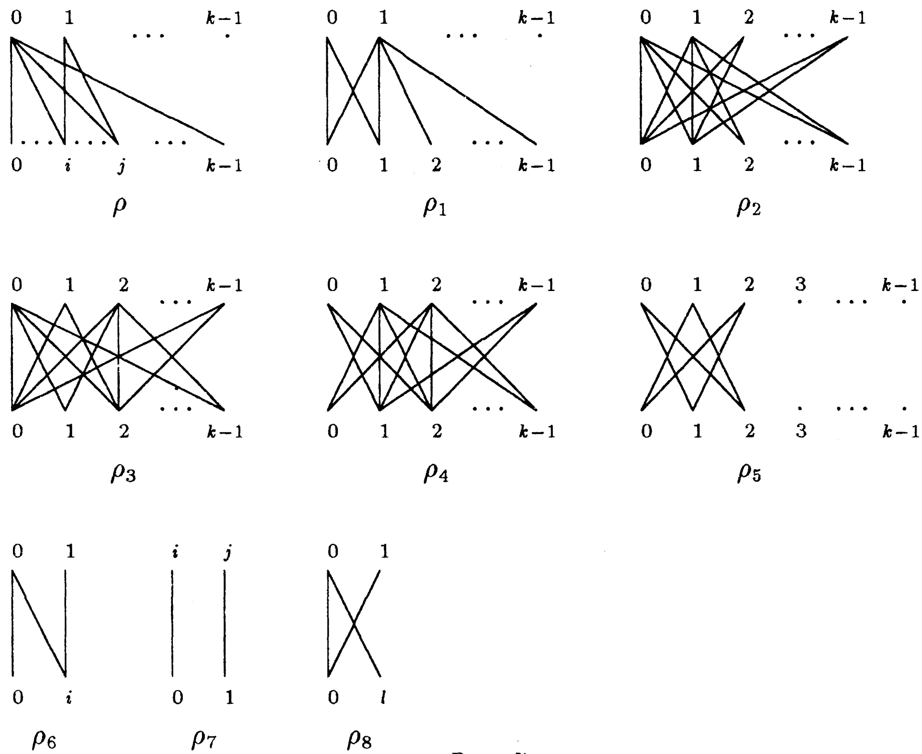

Рис. 7

Предположим, что $\{i, j\} \neq \{0, 1\}$. Если $0 \notin \{i, j\}$, то пусть, например, $i \neq 1$. Определив

$$\rho_6(x, y) \equiv (y \in \{0, i\}) \& \rho(x, y),$$

по лемме 1 заключаем, что $\nu_k^2 \in [\{\rho_6\}]_A$. Значит, согласно лемме 5 из [6] в $[\{\rho_6\}]_A$ входит отношение ρ_7 (см. рис. 7). Тогда отношение

$$(\exists z)(\rho_7(x, z) \& \rho(z, y))$$

возвращает нас к случаю $\{i, j\} = \{0, 1\}$.

Если $0 \in \{i, j\}$, то пусть $l \notin \{1, i, j\}$. Полагая

$$\rho_8(x, y) \equiv (y \in \{0, l\}) \& \rho(x, y),$$

по лемме 1 из отношения ρ_8 получаем отношение ν_k^2 и далее по лемме 5 из [6] — отношение μ_k^2. Отношение $(\exists z)(\mu_k^2(x, z) \& \rho(z, y))$ приводит к рассмотренному случаю $\{i, j\} \neq \{0, 1\}$ и $0 \notin \{i, j\}$.

Предположим, что $E = F = E_k$. Сначала покажем, что для некоторого i одно из множеств $\pi(i), \pi^{-1}(i)$ состоит из двух элементов. Допустим, что это не так. Все множества $\pi(0), \ldots, \pi(k-1)$ не могут быть одноэлементными, поскольку в этом случае либо $F \neq E_k$, либо отношение ρ имеет вид (1). Поэтому будем считать, что, например, $\pi(0) = E_k$. Если среди множеств $\pi(1), \ldots, \pi(k-1)$ еще хотя бы два множества совпадают с E_k, то для любого j множество $\pi^{-1}(j)$ содержит не менее трех элементов и согласно сделанным выше предположениям относительно ρ должно совпадать с E_k. Следовательно, приходим к тождественно истинному отношению ρ, т. е. отношению вида (4).

Пусть только одно из множеств $\pi(1), \ldots, \pi(k-1)$, например $\pi(1)$, совпадает с E_k. Если существуют такие элементы i, j из $\{2, \ldots, k-1\}$, что $\pi(i) \neq \pi(j)$, то каждое из множеств $\pi^{-1}(\pi(i)), \pi^{-1}(\pi(j))$ содержит более двух, но менее k элементов, что противоречит предположениям относительно ρ. Если же для любого $i, i \notin \{0, 1\}$, и некоторого l выполняется равенство $\pi(i) = l$, то при $m \neq l$ множество $\pi^{-1}(m)$ состоит только из двух элементов 0 и 1.

Предположим, что $|\pi(1)| = \ldots = |\pi(k-1)| = 1$. Если существуют такие i, j из $E_k \setminus \{0\}$, что $\pi(i) \neq \pi(j)$, то $j \notin \pi^{-1}(\pi(i))$ и потому $\pi^{-1}(\pi(i)) = \{0, 1\}$. Случай $\pi(1) = \ldots = \pi(k-1)$ невозможен, поскольку отношение ρ не имеет вида (3).

Итак, для некоторого i одно из множеств $\pi(i), \pi^{-1}(i)$ состоит из двух элементов. Тогда в $[\{E_k^1(x), \rho\}]_A$ входит любое отношение вида $x \in G$, где $|G| = 2$. Если для некоторых элементов i, j отношению

$$(\exists x)((x \in \{i, j\}) \& \rho(x, y)) \tag{9}$$

удовлетворяет более двух, но менее k элементов, то лемма 7 доказана. В связи с этим далее предполагаем, что любому отношению вида (9), а также аналогичному отношению, полученному перестановкой переменных x и y, удовлетворяет либо k, либо не более двух элементов.

Допустим, что не существует такого i, что $\pi(i) = E_k$. Как отмечалось выше, все множества $\pi(0), \ldots, \pi(k-1)$ не могут быть одноэлементными. Выберем такое i, что $|\pi(i)| = 2$. Если равенство $|\pi(j)| = 1$ выполняется для некоторого j, то в силу предположения об отношениях (9) будем иметь $\pi(j) \in \pi(i)$. Так как $k \geqslant 4$, то должно существовать такое j, что $|\pi(j)| = 2$ и $\pi(j) \cap \pi(i) = \varnothing$ (случай $|\pi(j) \cap \pi(i)| = 3$ мы уже исключили). При $k \geqslant 5$ приходим к противоречию с предположением об отношениях (9). Если же $k = 4$, то для любого a из $E_k \setminus \{i, j\}$ должно выполняться одно из включений $\pi(a) \subsetneq \pi(i)$ или $\pi(a) \subsetneq \pi(j)$. При $|\pi(a)| = 1$ имеем $\pi(a) \in \pi(i)$ и поэтому вновь приходим к противоречию с предположением об отношениях (9) (вместо i следует взять a). Предположим, что $|\pi(a)| = 2$ для любого a из $E_4 \setminus \{i, j\}$. Если функция π отображает три элемента множества E_4 в одно из множеств $\pi(i), \pi(j)$, например в $\pi(i)$, то получаем противоречие, рассматривая отношение вида (9):

$$(\exists y)((y \in \pi(i))\&\rho(x,y)).$$

Случай, когда функция π отображает два элемента из E_k в множество $\pi(i)$ и два элемента — в множество $\pi(j)$, приводит к отношению ρ вида (7).

Предположим, что для некоторого a выполняется равенство $\pi(a) = E_k$. Симметричным образом можно также предполагать, что для некоторого i справедливо равенство $\pi^{-1}(i) = E_k$. Допустим, что $|\pi(b)| = 2$. Тогда отношение $(x \in \{a,b\})\&\rho(x,y)$ возвращает нас к рассмотренному случаю, когда $|E| = 2, \pi(a) = E_k$ и $|\pi(b)| = 2$. Аналогично рассуждаем, если для некоторого j справедливо равенство $|\pi^{-1}(j)| = 2$. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Для любого i, $2 \leqslant i \leqslant k$, множество $[\{\lambda_k, \chi_k^i\}]_A$ содержит все отношения вида*

$$E_k^i(x_1)\&\ldots\&E_k^i(x_m)\&\sigma(x_1,\ldots,x_m), \tag{10}$$

где σ — произвольное отношение из Π_k.

Доказательство данной леммы отличается от доказательства аналогичной леммы 18 из [2] незначительными техническими деталями, обусловленными спецификой группы $\mathbf{A}_k$. Поэтому приведем лишь основные моменты доказательства.

В случае $i = 2$ замечаем, что

$$\chi_k^2(x,y) \equiv E_k^2(x)\&E_k^2(y)\&(x \leqslant y),\ (\exists z)((z=1)\&\lambda_k(x,y,z)) \equiv \mu_k^2(x,y),$$
$$(\exists z)(\mu_k^2(x,z)\&\chi_k^2(z,y)) \equiv E_k^2(x)\&E_k^2(y)\&(\bar{x} \leqslant y),$$

где $\bar{x}$ — булево отрицание переменной x. Из отношений $x = 1, \lambda_k$ нетрудно получить все отношения вида

$$E_k^2(x_1)\&\ldots\&E_k^2(x_m)\&(x_1+\ldots+x_m = a), \tag{11}$$

где $m \geqslant 1, a \in E_2$ и $+$ обозначает сложение по модулю 2.

Пусть m нечетно, $\sigma_1(x_1,\ldots,x_m)$ есть отношение (11) при $a = 0$, $(a_1,\ldots,a_m) \in E_2$. Положим

$$\rho(x_1,\ldots,x_m) \equiv (\exists z_1)\ldots(\exists z_m)(E_k^2(x_1)\&\ldots\&E_k^2(x_m)\&$$
$$(x_1^{a_1} \leqslant z_1)\&\ldots\&(x_m^{a_m} \leqslant z_m)\&\sigma_1(z_1,\ldots,z_m)),$$

где $x_j^0 = \bar{x}_j$ и $x_j^1 = x_j$. Убеждаемся, что отношение $\rho(x_1,\ldots,x_m)$ отличается от отношения $E_k^2(x_1)\&\ldots\&E_k^2(x_m)$ только набором $(a_1,\ldots,a_m)$, который не удовлетворяет отношению ρ. Следовательно, отношение (10), которому удовлетворяет s наборов из $E_2^m(s > 0)$, можно получить в виде конъюнкции s отношений типа отношения ρ.

В случае четного m следует взять $a = 1$.

Пусть $i \geqslant 3$. Так как $\chi_k^2 \in [\{\chi_k^i\}]_A$, по доказанному в множество $[\{\lambda_k, \chi_k^i\}]_A$ будут входить все отношения вида (10) при $i = 2$. Если

$$\tau(x, y) \equiv (y \in \{1, i-1\}) \& \chi_k^i(x, y),$$

то согласно лемме 1 в $[\{\tau\}]_A$ содержится отношение ν_k^2. Пусть отношение χ_0 двойственно к χ_k^i относительно четной подстановки $(0, (i-1), 1)$ (рис. 8).

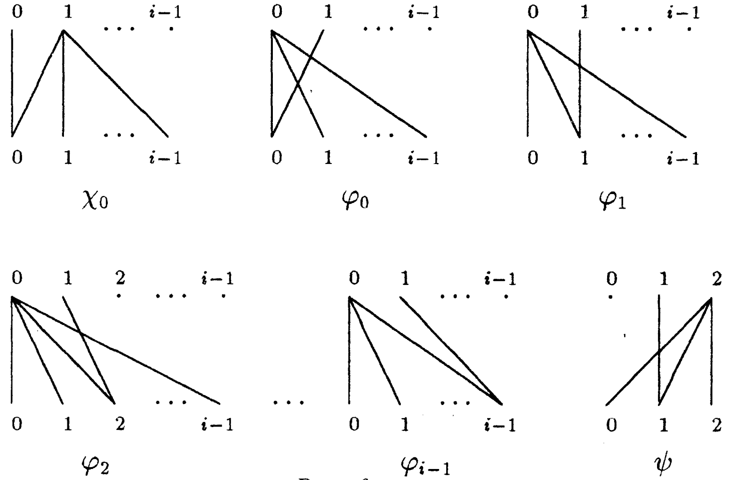

Рис. 8

Взяв отношение μ_k^2 из множества $[\{\nu_k^2\}]_A$, определим

$$\varphi_0(x, y) \equiv (\exists z)(\mu_k^2(x, z) \& \chi_0(z, y)).$$

Если $i \leqslant k-2$ и $1 \leqslant j \leqslant i-2$, то пусть отношение χ_j двойственно к χ_k^i относительно четной подстановки $(j, i-1)(k-2, k-1)$, а отношение

$$\tau_j(x, y) \equiv (x = y = 0) \vee (x = 1) \& (y = j)$$

взято из множества $[\{\nu_k^2\}]_A$. Положим (см. рис. 8)

$$\varphi_j(x, y) \equiv (\exists z)(\tau_j(x, z) \& \chi_j(z, y)).$$

В случае $i \in \{k-1, k\}, i \geqslant 4$, при получении отношений $\varphi_j (1 \leqslant j \leqslant i-2)$ по той же схеме рассматриваем четную подстановку $(1, i-1, i-2)$ при $j = 1$ и четную подстановку $(1, j, i-1)$ при $j \neq 1$. В случае $k = 4$ и $i = 3$ для получения отношения φ_1 берем отношение ψ (см. рис. 8), двойственное к χ_4^3 относительно четной подстановки (012), и в множестве $[\{\nu_4^2\}]_A$ определяем отношение

$$\omega(x,y) \equiv (x=0)\&(y=2) \vee (x=y=1).$$

Тогда имеем

$$\varphi_1(x,y) \equiv (\exists z)(\omega(x,z)\&\psi(z,y)).$$

Таким образом, при любом k, $k \geqslant 4$, в множестве $[\{\chi_k^i\}]_A$ определены отношения $\varphi_0 - \varphi_{i-2}$, изображенные на рис. 8. Далее взяв в множестве $[\{\nu_k^2\}]_A$ отношение

$$\tau_{i-1}(x,y) \equiv (x=y=0) \vee (x=1)\&(y=i-1),$$

получаем отношение

$$\varphi_{i-1}(x,y) \equiv (\exists z)(\tau_{i-1}(x,z)\&\chi_k^i(z,y)).$$

Заметим теперь, что при подстановке в отношение

$$\varphi_0(x_1,y)\&\varphi_1(x_2,y)\&\ldots\&\varphi_{i-1}(x_i,y) \tag{12}$$

вместо переменных $x_1,\ldots,x_i$ наборов значений

$$(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1) \tag{13}$$

полученному одноместному отношению будет удовлетворять соответственно только один элемент $0,1,\ldots,i-1$. Это позволяет кодировать значения из E_i с помощью отношения (12). Именно, для произвольного отношения $\sigma(x_1,\ldots,x_m)$ из Π_k согласно первой части доказательства леммы 8 следующим образом определим отношение $\sigma_2(x_1^1,\ldots,x_i^1,\ldots,$ $x_1^m,\ldots,x_i^m)$. Если для некоторого t, $1 \leqslant t \leqslant m$, набор $(a_1^t,\ldots,a_i^t)$ из E_k^i отличен от наборов (13), то отношение

$$\sigma_2(x_1^1,\ldots,x_i^1,\ldots,a_1^t,\ldots,a_i^t,\ldots,x_1^m,\ldots,x_i^m)$$

ложно. Пусть $(a_1^1,\ldots,a_i^1),\ldots,(a_1^m,\ldots,a_i^m)$ — наборы вида (13). Тогда положим $\sigma_2(a_1^1,\ldots,a_i^1,\ldots,a_1^m,\ldots,a_i^m)$ истинным в том и только том случае, когда истинно значение $\sigma(b_1,\ldots,b_m)$, где величины $b_1,\ldots,b_m$ определяются из соответствия

$$(1,0,\ldots,0)-0,(0,1,\ldots,0)-1,\ldots,(0,\ldots,0,1,)-(i-1).$$

Теперь нетрудно видеть, что отношение (10) совпадает с отношением

$$\begin{aligned}(\exists z_1^1)\ldots(\exists z_i^m)(\varphi_0(z_1^1,x_1)\&\ldots\&\varphi_{i-1}(z_i^1,x_1)\&\ldots\\ \&\varphi_0(z_1^m,x_m)\&\ldots\&\varphi_{i-1}(z_i^m,x_m)\&\sigma_2(z_1^1,\ldots,z_i^1,\ldots,z_1^m,\ldots,z_i^m)).\end{aligned}$$

Лемма 8 доказана.

3. Основной результат

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть ρ — произвольное двуместное отношение из Π_k. Тогда множество $\{E_k^1(x), \rho\}$ А-эквивалентно некоторому набору основных отношений.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $k = 4$ и ρ имеет вид (7). По лемме 7 имеем $\{\mu_4^4, x_1 + x_2 = x_3 + x_4\} \subset [\{E_4^1(x), \rho\}]_A$. Покажем, что $\{E_4^1(x), \rho\} \subset [\{\mu_4^4, x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}]_A$. Множеству $[\{\mu_4^4\}]_A$ принадлежит отношение $E_4^1(x)$, поскольку $\mu_4^4(x, x) \equiv (x \in \{2, 3\}]$. Так как

$$\sigma_1(x, y) \equiv (\exists z_1)(\exists z_2)((z_1 = 0) \& \mu_4^4(x, z_2) \& (x + y = z_1 + z_2))$$

совпадает с отношением

$$E_4^2(x) \& (y = 1) \vee (x \in \{2, 3\}) \& (y = 0)),$$

то (см. рис. 6)

$$(\exists z)(\sigma_1(x, z) \& \sigma_1(y, z)) \equiv \varepsilon_1(x, y).$$

Если в представлении (7) для отношения ρ имеем $|G_1| = |G_2| = |H_1| = |H_2| = 2$, то в множестве $[\{\mu_4^4\}]_A$ в соответствии с леммой 2 из [6] выбираем такие отношения

$$\sigma_2(x, y) \equiv (\pi_1(x) = y), \ \sigma_3(x, y) \equiv (\pi_2(x) = y),$$

что π_1, π_2 — подстановки на $E_4, \pi_1(G_1) = E_2, \pi_2(E_2) = H_1$. В результате получаем

$$\rho(x, y) \equiv (\exists z_1)(\exists z_2)(\sigma_2(x, z_1) \& \varepsilon_1(z_1, z_2) \& \sigma_3(z_2, y)).$$

Случай, когда какая-либо пара (G_1, G_2) или (H_1, H_2) состоит из одноэлементных множеств, сводится к предыдущему, поскольку множество $[\{\mu_4^4\}]_A$ содержит все отношения вида $x \in E$, где $|E| = 2$.

Предположим, что отношение ρ отлично от (7). Если оно имеет вид (1) и отлично от диагонали, то применяем теорему 1, а если вид (3), то лемму 3. Пусть отношение ρ имеет вид (4). Тогда в качестве искомого основного отношения можно взять отношение $E_k^m(x)$, где $m = \max(|E|, |F|)$, если $\max(|E|, |F|) < k$, и $m = \min(|E|, |F|)$ в противном случае.

Допустим, что отношение ρ не имеет вида (1), (3), (4) или (7). Тогда по леммам 7 и 8 множеству $[\{E_k^1(x), \rho\}]_A$ принадлежат все отношения вида (10), где $i = 3$, и, в частности, отношения λ_k, χ_k^3. Определим множества E, F:

$$(x \in E) \equiv (\exists y)\rho(x,y), \quad (x \in F) \equiv (\exists y)\rho(y,x).$$

Пусть для определенности $|E| \leqslant |F|$. Если $j = |F| \leqslant 3$, то в силу леммы 8 имеем $[\{E_k^1(x), \rho\}]_A = [\{\lambda_k, \chi_k^3\}]_A$. Предположим, что $j > 3$. Тогда A-эквивалентность множеств $\{E_k^1(x), \rho\}$, $\{\lambda_k, \chi_k^j\}$ будет следовать из леммы 8, если показать, что $\chi_k^j \in [\{E_k^1(x), \rho\}]_A$. Так как $\chi_k^3 \in [\{E_k^1(x), \rho\}]_A$, то, рассуждая по индукции, предположим, что множеству $[\{E_k^1(x), \rho\}]_A$ принадлежит отношение χ_k^l, где $3 \leqslant l < j$.

Так как $|E| \leqslant |F|$ и отношение ρ не имеет вида (1), то по крайней мере для одного a из E отношению $\rho(a,y)$ удовлетворяет не менее двух элементов. Выберем поэтому в множестве E различные элементы $a_1, \ldots, a_s$ $(3 \leqslant s \leqslant l)$ таким образом, что отношению $\rho(a_1, y)$ удовлетворяет максимально возможное число элементов, отношению

$$\rho(a_1,y) \vee \rho(a_2,y) \vee \ldots \vee \rho(a_s,y) \text{ — } \tag{14}$$

m элементов, где $m > l$, и отношение $\rho(a_s, y)$ отлично от отношения $\rho(a_1, y)$. Это можно сделать, поскольку отношение ρ не имеет вида (4). Если $k > 4$ или $s > 3$, то пусть отношение σ_4 двойственно к χ_k^s относительно четной подстановки φ, переводящей a_1 в 0, a_s в $s-1$ и множество $\{a_2, \ldots, a_{s-1}\}$ в множество $\{1, \ldots, s-2\}$. Если $k = 4$ и $s = 3$, то указанная подстановка φ может оказаться нечетной. Чтобы сделать ее четной, поменяем местами элементы a_1, a_2, если отношениям $\rho(a_1,y), \rho(a_2,y)$ удовлетворяет одинаковое число элементов, либо элементы a_2, a_3 — в противном случае. Положим

$$\rho_1(x,y) \equiv (\exists z)(\sigma_4(x,z) \& \rho(z,y)).$$

Тогда отношение $\rho_1(a_1,y)$ совпадает с отношением (14), а отношение $\rho_1(a_s,y)$ — с отношением $\rho(a_s,y)$. Если отношению $\rho(a_s,y)$ удовлетворяет только один элемент, то по лемме 3 в множество $[\{\rho_1\}]_A$ входит отношение χ_k^m, а значит, и отношение χ_k^l. Поэтому далее предполагаем, что отношению $\rho(a_s,y)$ удовлетворяет более одного элемента.

Пусть отношению $\rho_1(a_1,y)$ удовлетворяют элементы $b_1, \ldots, b_m$. Так как $\nu_k^2 \in [\{E_k^1(x), \rho\}]_A$, то можно считать, что $\{a_1, a_s\} \subset \{b_1, \ldots, b_m\}$ и, например, $a_1 = b_1, a_s = b_m$, $\rho_1(b_m, b_m)$ истинно, а $\rho_1(b_m, b_1)$ ложно. Если отношение $\rho_1(b_1,y)$ отличается от отношения $\rho_1(b_m,y)$ более чем одним элементом и $m \geqslant 5$, то пусть $\pi_1, \ldots, \pi_t$ — все четные подстановки на E_k, которые сохраняют каждый из элементов b_1, b_m, а также отношение $\rho_1(b_1,y)$. Тогда отношение

$$\rho_1^{\pi_1}(x,y) \& \ldots \& \rho_1^{\pi_t}(x,y)$$

возвращает нас к рассмотренному случаю, когда отношению $\rho(a_1, y)$ удовлетворяет один элемент.

Пусть $m = 4$ и отношению $\rho_1(b_4, y)$ удовлетворяют два элемента: b_4 и, например, b_3. В множестве $[\{\nu_k^2\}]_A$ возьмем отношение

$$\sigma_5(x, y) \equiv (x = y = b_1) \vee (x = b_3)\&(y = b_4)$$

и положим (рис. 9)

$$\rho_2(x, y) \equiv (\exists z)(\sigma_5(x, z)\&\rho_1(z, y)).$$

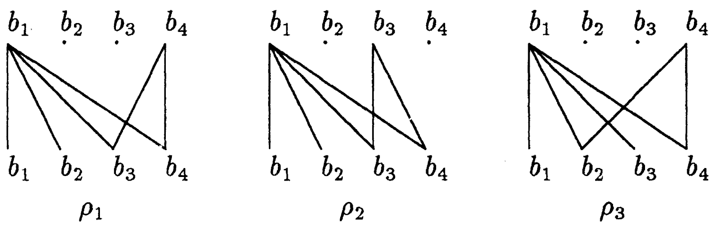

Рис. 9

Далее определим отношение $\rho_3(x, y)$, которое является двойственным к ρ_2 относительно четной подстановки $(b_2 b_4 b_3)$. Тогда отношение $\rho_1(x, y)\&\rho_3(x, y)$ вновь приводит к случаю с одноэлементным отношением $\rho(a_s, y)$.

Предположим, что отношение $\rho_1(b_1, y)$ отличается от отношения $\rho_1(b_m, y)$ только одним элементом b_1.

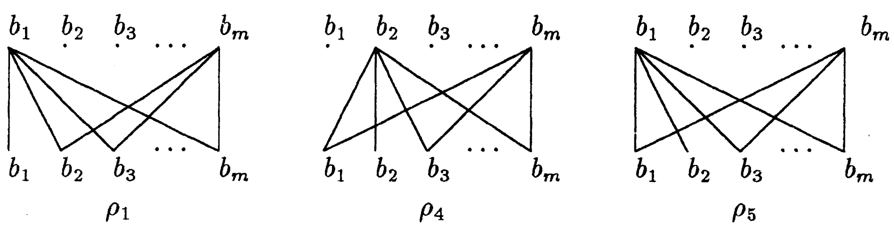

Рис. 10

Пусть отношение $\rho_4(x, y)$ (рис. 10) двойственно к ρ_1 относительно четной подстановки $(b_1 b_3 b_2)$. Полагая

$$\rho_5(x, y) \equiv (\exists z)(\sigma_6(x, z)\&\rho_4(z, y)),$$

где

$$\sigma_6(x, y) \equiv (x = b_1)\&(y = b_2) \vee (x = y = b_m) \text{ —}$$

отношение из $[\{\nu_k^2\}]_A$, видим, что отношение $\rho_1(x, y)\&\rho_5(x, y)$ приводит к случаю, когда отношение $\rho_1(b_1, y)$ отличается от отношения $\rho_1(b_m, y)$ более чем одним элементом. Теорема 2 доказана.

Следствие. *Пусть R — множество одно- и двуместных отношений из Π_k и $\mathrm{Pol}R \subseteq I_k$. Тогда множество R A-эквивалентно некоторому набору основных отношений.*

Доказательство. Так как $\mathrm{Pol}R \subseteq I_k$, то можно считать, что $E_k^1(x) \in R$. Далее применяем теорему 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.** Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. № 3. С. 1–10; № 5. С. 1–9.
2. **Марченков С. С.** Основные отношения S-классификации функций многозначной логики // Дискрет. математика. 1996. Т. 8, вып. 1. С. 95–128.
3. **Марченков С. С.** S-Классификация идемпотентных алгебр с конечным носителем // Докл. РАН. 1996. Т. 348, № 5. С. 587–589.
4. **Марченков С. С.** G-Предполные классы многозначной логики // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 3. С. 47–70.
5. **Марченков С. С.** S-Классификация функций многозначной логики // Дискрет. математика. 1997. Т. 9, вып. 3. С. 125–152.
6. **Марченков С. С.** A-Классификация конечных инъективных функций // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1997. Т. 4, № 2. С. 15–42.
7. **Нгуен Ван Хоа.** О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики P_3 // Дискрет. математика. 1992. Т. 4, вып. 4. С. 82–95.
8. **Нгуен Ван Хоа.** О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискрет. математика. 1993. Т. 5, вып. 4. С. 87–108.
9. **Нгуен Ван Хоа.** Описание замкнутых классов, сохраняемых всеми внутренними автоморфизмами k-значной логики // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 3. С. 16–19.
10. **Нгуен Ван Хоа.** О структуре замкнутых классов k-значной логики, самодвойственных относительно транзитивных групп // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 6. С. 17–20.
11. **Нгуен Ван Хоа.** О замкнутых классах k-значной логики, самодвойственных относительно транзитивных групп // Дискрет. математика. 1996. Т. 8, вып. 1. С. 129–156.
12. **Оре О.** Теория графов. М.: Наука, 1968.

13. **Риге Ж.** Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа // Кибернетический сб. М.: Мир, 1963. Вып. 7. С. 129–185.

14. **Яблонский С. В.** Введение в теорию функций k-значной логики // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974. С. 9–66.

Адрес автора:

Институт прикладной
математики
им. М. В. Келдыша РАН,
Миусская площадь, 4,
125047 Москва, Россия.
E-mail:
marchen@applmat.msk.ru

Статья поступила
17 ноября 1997 г.