ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 1998. Серия 1. Том 5, № 1, 64–81

УДК 519.144

# ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ 2-(21, 5, 2) БЛОК-СХЕМ С АВТОМОРФИЗМАМИ НЕЧЕТНОГО ПРОСТОГО ПОРЯДКА*)

*С. Т. Топалова*

Построены все неизоморфные 2-(21, 5, 2) блок-схемы с автоморфизмами нечетного простого порядка. Число таких блок-схем равно 22998, среди них имеется 4170 блок-схем, которые редуцируемы до конкатенации двух 2-(21, 5, 1) блок-схем. Для каждой блок-схемы найден порядок полной группы автоморфизмов.

## Введение

2-$(v, k, \lambda)$ *блок-схемой* называется система таких $k$-элементных подмножеств (блоков) некоторого множества из $v$ элементов (точек), что каждая пара точек содержится точно в $\lambda$ блоках. Блок-схемы не только представляют самостоятельный интерес как комбинаторные структуры, но также тесно связаны с теорией кодирования, с теорией графов и используются в статистических экспериментах.

Обычно число блоков 2-$(v, k, \lambda)$ блок-схемы, равное $\frac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)}$, обозначают через $b$, а число блоков, содержащих произвольно фиксированную точку, через $r$ (например, для 2-(21, 5, 2) блок-схемы $b = 42$, $r = 10$). *Матрицей инцидентности* называется бинарная матрица из $v$ строк и $b$ столбцов, в которой элемент $i$-й строки и $j$-го столбца равен 1, если $i$-я точка содержится в $j$-м блоке; в противном случае такой элемент равен 0.

*Автоморфизмом* блок-схемы называется перестановка точек, которая переводит каждый блок в блок. Все автоморфизмы блок-схемы образуют ее полную группу автоморфизмов.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Болгарского фонда фундаментальных исследований (код проекта I-506/1995). Результаты из раздела 2.2 изложены на Четвертом международном семинаре по алгебраической и комбинаторной теории кодирования (1994, Новгород, Россия), а из раздела 2.3 — на Весенней конференции болгарских математиков (1995, Свищов, Болгария).

Две блок-схемы называются *изоморфными*, если изоморфны их матрицы инцидентности, т. е. если существуют перестановки строк и столбцов, переводящие одну матрицу в другую.

*Циркулянтной матрицей порядка* $p$ называется матрица размера $p \times p$, в которой элемент $i$-й строки и $j$-го столбца равен элементу $(i-1)$-й строки и $(j-1)$-го столбца, а элемент $i$-й строки и первого столбца равен элементу $(i-1)$-й строки и $p$-го столбца, $i = 2, 3, \ldots, p$; $j = 2, 3, \ldots, p$.

Вопрос о существовании блок-схемы с данными параметрами является основным в теории блок-схем. Если на этот вопрос ответ положителен, то возникает вопрос о перечислении всех неизоморфных блок-схем. В [4] собраны полученные результаты и нерешенные проблемы для 2-$(v, k, \lambda)$ блок-схем при $r \leqslant 41$.

Существование 2-(21, 5, 2) блок-схем следует из существования 2-(21, 5, 1) блок-схемы (проективная плоскость порядка 4). По меньшей мере 10 неизоморфных 2-(21, 5, 2) блок-схем можно сконструировать конкатенацией двух 2-(21, 5, 1) блок-схем (см. [2, 3]). Среди десяти схем, сконструированных в [3], есть 8 схем с автоморфизмами простого нечетного порядка и две схемы с автоморфизмами порядка 2. Согласно [4] известны 35 неизоморфных 2-(21, 5, 2) блок-схем. Среди этих схем содержатся схемы, полученные в [3], и схемы с автоморфизмами порядка 7, полученные автором. В настоящей работе доказано, что только числа 2, 3, 5 и 7 являются возможными простыми делителями порядка группы автоморфизмов 2-(21, 5, 2) блок-схем. Построены и исследованы все неизоморфные 2-(21, 5, 2) блок-схемы с автоморфизмами порядка 3, 5 и 7.

## 1. Возможные автоморфизмы 2-(21, 5, 2) блок-схем

**Утверждение 1.** *Наибольший простой делитель группы автоморфизмов 2-(21, 5, 2) блок-схемы равен 7.*

Действительно, если $\alpha$ является автоморфизмом простого порядка $p$ для 2-$(v, k, \lambda)$ блок-схемы и $p > \max(k, \lambda)$, то $p < r$ или $p \mid v$ [1, гл. 1].

**Утверждение 2.** *В 2-(21, 5, 2) блок-схеме автоморфизм порядка 7 не фиксирует никаких точек и блоков.*

В самом деле, автоморфизм $\alpha$ простого порядка $p$ ($p > \max(k, \lambda)$) 2-$(v, k, \lambda)$ блок-схемы фиксирует не более $(v-1)/(k-1)$ точек [1, гл. 1].

**Утверждение 3.** *Если $\alpha$ является автоморфизмом пятого порядка 2-(21, 5, 2) блок-схемы, то $\alpha$ фиксирует одну точку и два блока.*

Доказательство. 1. Пусть $\alpha$ фиксирует более одной точки. Обозначим через $f$ число фиксированных точек ($f = 6, 11, 16$). Поскольку $k = 5$, любой фиксированный блок содержит или пять фиксированных точек, или пять нефиксированных точек. Фиксированные блоки, содержащие только фиксированные точки, образуют 2-$(f,5,2)$ блок-схему. Такая блок-схема существует только в случае, когда $f = 11$. Но в таком случае количество фиксированных блоков равно 11, а количество нефиксированных блоков равно 31 и не делится на пять. Поэтому $\alpha$ фиксирует не более одной точки.

**2.** Пусть $\alpha$ фиксирует одну точку и $h$ блоков ($h = 2,\ 7,\ 12,\ 17,\dots,$ $37$). В этом случае каждый фиксированный блок содержит пять нефиксированных точек из одной точечной орбиты.

Так как не существует более двух одинаковых блоков ($\lambda = 2$), а число точечных орбит равно четырем, то число фиксированных блоков не превосходит восьми.

Таким образом, $h = 2$ или $h = 7$.

Допустим, что $h = 7$ и $\alpha$ действует следующим образом:

$(1,2,3,4,5)\dots(16,17,18,19,20)\ (21)$ на точки и

$(1,2,3,4,5)\dots(31,32,33,34,35)\ (36)\ (37)\dots(42)$ на блоки.

Рассмотрим следующую матрицу инцидентности блок-схемы:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{17} & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & u^t & u^t \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{27} & z^t & z^t & z^t & u^t & u^t & z^t & z^t \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{37} & z^t & u^t & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots & a_{47} & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\
u & u & z & \dots & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,
\end{array}$$

где $a_{ij}$ $(i = 1,\dots,4;\ j = 1,\dots,7)$ — циркулянтные матрицы порядка 5, $u = (1,1,1,1,1)$ и $z = (0,0,0,0,0)$. Пусть $m_{ij}$ — число единиц в строке матрицы $a_{ij}$. Тогда при $i = 1,2,3$ имеем

$$\sum_{j=1}^{7} m_{ij} = 8, \qquad \sum_{j=1}^{7} m_{ij}^2 = 8.$$

Эта система не имеет решений в целых числах. Возможно только $h = 2$.

**Утверждение 4.** *Если $\alpha$ является автоморфизмом порядка* 3 2-$(21,5,2)$ *блок-схемы, то возможны следующие случаи:*

- *$\alpha$ не фиксирует никаких точек и блоков,*
- *$\alpha$ фиксирует* 3 *точки и* 6 *блоков,*
- *$\alpha$ фиксирует* 6 *точек и* 12 *блоков.*

Доказательство. Пусть $\alpha$ фиксирует $f$ точек и $h$ блоков. Каждый фиксированный блок содержит две или пять фиксированных точек. Обозначим через $h_1$ число фиксированных блоков, состоящих из пяти фиксированных точек, а через $h_2$ число фиксированных блоков, содержащих две фиксированные точки. Перечисляя пары фиксированных точек и имея в виду, что любая нефиксированная точка содержится не более чем в двух фиксированных блоках, а число нефиксированных блоков, содержащих фиксированные точки, не превосходит числа всех нефиксированных блоков, получаем

$$10h_1 + h_2 = f(f-1), \quad h_2 \leqslant 2(21-f)/3, \quad h_2 \geqslant 10f - 42 - 4h_1.$$

Из этих условий следует, что для $f$, $h_1$ и $h_2$ возможны случаи:
1) $f=0$, $h=0$; 2) $f=3$, $h_1=0$, $h_2=6$; 3) $f=6$, $h_1=2$, $h_2=10$.

## 2. Построение блок-схем

### 2.1. Ключ к таблицам

Поскольку число построенных в настоящей работе блок-схем велико, в табл. 1, 2, ..., 8 даны только те блок-схемы, группа автоморфизмов которых транзитивна или имеет порядок не менее 40. Такие блок-схемы будем называть «самыми интересными». Для экономии места схемы с конструктивным автоморфизмом $p$ представлены следующим способом.

• Точки обозначены числами $1, 2, \ldots, 21$, блоки — числами $1, 2, \ldots,$ 42, а блоковые орбиты относительно $p$ обозначены 22-значными цифрами $0, 1, \ldots, 9, a, b, \ldots, k, l$.

• Из каждой нетривиальной точечной орбиты даны блоки, в которых содержится первая точка: вместо номера блока указан только его номер $(1, 2, \ldots, p)$ в соответствующей блоковой орбите. Номер этой орбиты находится в самой близкой (обозначенной через «орб») верхней строке таблицы.

• Для каждой фиксированной точки даны орбиты блоков, в которых содержится точка.

• Номер нефиксированного блока получается добавлением умноженного на $p$ номера орбиты к номеру блока в орбите. Номер фиксированного блока получается добавлением единицы и умноженного на $p-1$ числа нетривиальных блоковых орбит к номеру орбиты. В качестве примера рассмотрим табл. 2, в которой число нетривиальных блоковых орбит равно 8, а число тривиальных блоковых орбит равно 2, шестая точка $T_6$ первой блок-схемы содержится в блоках 1, 6, 11, 23, 24, 27, 30, 34, 37, 42, а 21-я точка $T_{21}$ — в блоках начиная с первого и кончая десятым.

• В графе́ «P» находится «да», если схему можно получить конкатенацией двух 2-(21, 5, 1) схем. Графа́ «Авт» содержит порядок группы автоморфизмов. Буквой «т» после порядка обозначены транзитивные группы.

Схемы, имеющие более одного из рассматриваемых конструктивных автоморфизмов, приведены только в одной таблице.

### 2.2. Блок-схемы с автоморфизмом порядка 7

Пусть $D$ является 2-(21, 5, 2) блок-схемой с автоморфизмом $\alpha$ порядка 7, действующим на точки как

$$(1,2,3,4,5,6,7)\,(8,9,10,11,12,13,14)\,(15,16,17,18,19,20,21)$$

и на блоки как

$$(1,2,3,4,5,6,7)\,(8,9,10,11,12,13,14)\ldots(36,37,38,39,40,41,42).$$

Пусть $A$ — матрица инцидентности схемы $D$. Тогда $A = (a_{ij})$ имеет размер $3\times 6$, а $a_{ij}$ $(i = 1,2,3;\ j = 1,\ldots,6)$ — циркулянтные матрицы порядка 7. Пусть $m_{ij}$ — число единиц в строке матрицы $a_{ij}$. Для матрицы $M = (m_{ij})$ размера $3 \times 6$ имеем

$$\sum_{j=1}^{6} m_{ij} = 10, \quad \sum_{j=1}^{6} m_{ij}^2 = 22, \quad \sum_{j=1}^{6} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 14,$$
$$i, i_1, i_2 = 1,2,3, \quad i_1 < i_2. \tag{1}$$

Существуют три неизоморфные матрицы, для которых выполнено (1). При замене их элементов циркулянтными матрицами получается 27 неизоморфных схем. «Самые интересные» блок-схемы приведены в табл. 1.

Таблица 1

Схемы с автоморфизмом порядка 7

| $No$ | $T_1$ | $T_8$ | $T_{15}$ | Авт | Р |
|---|---|---|---|---|---|
| орб | 0001112345 | 0122233345 | 0123444555 | | |
| 1 | 1241241111 | 1134634622 | 1122346346 | 120960т | да |
| 2 | 1241241111 | 1234645723 | 1425346267 | 21т | да |
| 3 | 1241341111 | 1134623724 | 1225346134 | 42т | да |
| 4 | 1241341111 | 1134623724 | 1521346467 | 42т | да |
| 5 | 1241341111 | 1212435634 | 1631267245 | 336т | |
| 6 | 1241341111 | 1634615722 | 1622346157 | 252т | да |
| орб | 0011122334 | 0223334455 | 0011244555 | | |
| 7 | 1212513131 | 1451254613 | 1346145256 | 21т | |
| 8 | 1212513131 | 1452561613 | 1327645147 | 21т | |
| 9 | 1213512141 | 1255673613 | 1317624367 | 21т | |
| 10 | 1213514121 | 1453573612 | 1423245135 | 21т | |
| 11 | 1213514121 | 1562464712 | 1445256136 | 21т | |

### 2.3. Блок-схемы с автоморфизмом порядка 5

Пусть $D$ является 2-(21, 5, 2) блок-схемой с автоморфизмом $\alpha$ порядка 5, фиксирующим одну точку и два блока. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha$ действует на точки следующим образом:

$$(1,2,3,4,5)\,(6,7,8,9,10)\ldots(16,17,18,19,20)\,(21),$$

на блоки следующим образом:

$$(1,2,3,4,5)\,(6,7,8,9,10)\ldots(36,37,38,39,40)\,(41)\,(42).$$

Для матрицы инцидентности схемы $D$ имеется две возможности:

$$\begin{array}{cc}
\text{Случай 1} & \text{Случай 2} \\[6pt]
\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{18} & u^t & z^t \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{28} & z^t & u^t \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{38} & z^t & z^t \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & \ldots & a_{48} & z^t & z^t \\
u & u & z & \ldots & z & 0 & 0
\end{array}
&
\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{18} & u^t & u^t \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{28} & z^t & z^t \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{38} & z^t & z^t \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & \ldots & a_{48} & z^t & z^t \\
u & u & z & \ldots & z & 0 & 0,
\end{array}
\end{array}$$

где $a_{ij}$ $(i = 1,\ldots,4;\ j = 1,\ldots,8)$ — циркулянтные матрицы порядка 5, $u = (1,1,1,1,1)$ и $z = (0,0,0,0,0)$. Пусть $m_{ij}$ — число единиц в любой строке матрицы $a_{ij}$. Два различных случая рассмотрим отдельно.

**Случай 1.** Для матрицы $M = (m_{ij})$ размера $4 \times 8$ получаем

$$\sum_{j=1}^{8} m_{ij} = 9, \quad \sum_{j=1}^{8} m_{ij}^2 = 13, \quad i = 1,2; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{8} m_{ij} = 10, \quad \sum_{j=1}^{8} m_{ij}^2 = 18, \quad i = 3,4; \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{8} m_{i_1,j} m_{i_2,j} = 10, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 4. \tag{4}$$

Условия (2), (3) и (4) выполняются для девяти неизоморфных матриц. Заменой их элементов циркулянтными матрицами и добавлением фиксированной точки и блоков получены 262 неизоморфных 2-(21, 5, 2) блок-схемы.

«Самые интересные» блок-схемы приведены в табл. 2.

Таблица 2

Схемы с автоморфизмом порядка 5 — случай 1

| $No$ | $T_1$ | $T_6$ | $T_{11}$ | $T_{16}$ | $T_{21}$ | Авт | Р |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| орб | 0134566778 | 0124455679 | 0122335577 | 0122334466 | | | |
| 1 | 1111112131 | 1113425421 | 1125253445 | 1134342535 | 01 | 40 | да |
| 2 | 1111112131 | 1112534421 | 1125342545 | 1134253435 | 01 | 3840 | да |
| орб | 0134566778 | 0124455679 | 0123334557 | 0122234667 | | | |
| 3 | 1111112131 | 1112423551 | 1142353454 | 1123545342 | 01 | 160 | |

**Случай 2.**

$$\sum_{j=1}^{8} m_{1j} = 8, \quad \sum_{j=1}^{8} m_{1j}^2 = 8, \quad \sum_{j=1}^{8} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 10, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 4; \qquad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{8} m_{ij} = 10, \quad \sum_{j=1}^{8} m_{ij}^2 = 18, \quad i = 2, 3, 4. \qquad (6)$$

Условия (5) и (6) выполняются для семи неизоморфных матриц, из которых получены 181 неизоморфных 2-(21, 5, 2) блок-схем. «Самые интересные» блок-схемы приведены в табл. 3.

Таблица 3

Схемы с автоморфизмом порядка 5 — случай 2

| $No$ | $T_1$ | $T_6$ | $T_{11}$ | $T_{16}$ | $T_{21}$ | Авт | Р |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| орб | 0123456789 | 1134556677 | 0122334477 | 0022345566 | | | |
| 1 | 1111111111 | 1244353512 | 1125342534 | 1313224545 | 01 | 120 | |
| орб | 0123456789 | 0144556677 | 0122336677 | 0122334455 | | | |
| 2 | 1111111111 | 1134253425 | 1134252534 | 1125342534 | 01 | 120 | да |
| 3 | 1111111111 | 1234451325 | 1213254534 | 1245342513 | 01 | 480 | да |
| орб | 0123456789 | 0144556677 | 1123334567 | 0022234567 | | | |
| 4 | 1111111111 | 1123452435 | 1241245335 | 1312325454 | 01 | 320 | |
| 5 | 1111111111 | 1223453514 | 1241354235 | 1323425415 | 01 | 80 | |

## 2.4. Блок-схемы с автоморфизмом порядка 3 без фиксированных точек и блоков

Пусть $D$ является 2-(21, 5, 2) блок-схемой с автоморфизмом $\alpha$ порядка 3, действующим на точки как

$$(1, 2, 3)\,(4, 5, 6) \ldots (19, 20, 21),$$

на блоки как

$$(1,2,3)\,(4,5,6)\ldots(40,41,42).$$

Пусть $A$ — матрица инцидентности схемы $D$. Тогда $A = (a_{ij})$ имеет размер $7 \times 14$, а $a_{ij}(i = 1,\ldots,7;\ j = 1,\ldots,14)$ — циркулянтные матрицы порядка 3. Пусть $m_{ij}$ — число единиц в строке матрицы $a_{ij}$. Матрица $M = (m_{ij})$ размера $7 \times 14$ удовлетворяет соотношениям

$$\sum_{j=1}^{14} m_{ij} = 10, \quad \sum_{j=1}^{14} m_{ij}^2 = 14, \quad \sum_{j=1}^{14} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 6, \quad i, i_1, i_2 = 1,\ldots,7, \quad i_1 < i_2. \tag{7}$$

Условия (7) выполняются для 718 неизоморфных матриц. Из них получается 9538 неизоморфных блок-схем. «Самые интересные» блок-схемы приведены в табл. 4. Так как первая точка всех блок-схем содержится в блоках с номерами 1, 2, 4, 5, 7, 10, 13, 16, 19, 22, то в этой таблице нет точки $T_1$.

Таблица 4

Схемы с автоморфизмом порядка 3 без фиксированных точек и блоков

| *No* | $T_4$ | $T_7$ | $T_{10}$ |
|---|---|---|---|
| орб | 22334589ab | 01678899ab | 44556789cd |
| 1 | 1212331111 | 1122121233 | 1212331111 |
| орб | 22334589ab | 01678899ab | 2446678acd |
| 2 | 1212331111 | 1122121233 | 1232312211 |
| 3 | 1212331111 | 1122121233 | 1232312211 |

| *No* | $T_{13}$ | $T_{16}$ | $T_{19}$ | Авт | P |
|---|---|---|---|---|---|
| орб | 236677abcd | 0145aabbcd | 012389ccdd | | |
| 1 | 1123232222 | 1122121233 | 1223131223 | 108 | да |
| орб | 03577aabcd | 145569bbcd | 012389ccdd | | |
| 2 | 1221312322 | 1213231222 | 1122331313 | 108 | да |
| 3 | 1221312322 | 1213231222 | 1223131213 | 54 | да |

## 2.5. Блок-схемы с автоморфизмом порядка 3 с тремя фиксированными точками

Пусть $D$ является 2-(21, 5, 2) блок-схемой с автоморфизмом $\alpha$ порядка 3, фиксирующим три точки и шесть блоков и действующим на точки как

$$(1,2,3)\,(4,5,6)\ldots(16,17,18)\,(19)\,(20)\,(21),$$

на блоки как

$$(1,2,3)\,(4,5,6)\ldots(34,35,36)\,(37)\,(38)\,(39)\,(40)\,(41)\,(42).$$

Матрица инцидентности схемы $D$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ E & C \end{pmatrix},$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица размера $6 \times 12$, а $a_{ij}(i = 1, \ldots, 6; j = 1, \ldots, 12)$ — циркулянтные матрицы порядка 3, $C$ — матрица инцидентности 2-(3, 2, 2) блок-схемы, а $E$ изоморфна матрице

$$\begin{pmatrix} z & z & z & z & z & z & u & u & z & z & z & z \\ z & z & z & z & z & z & z & z & u & u & z & z \\ z & z & z & z & z & z & z & z & z & z & u & u \end{pmatrix}.$$

Здесь и в следующих разделах $u = (1,1,1)$ и $z = (0,0,0)$.

Существуют следующие возможности для матрицы $B$:

| Случай 1 | Случай 2 | Случай 3 | Случай 4 |
|---|---|---|---|
| $u^t\ u^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t$ | $u^t\ u^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t$ | $u^t\ u^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t$ | $u^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t$ |
| $z^t\ z^t\ u^t\ u^t\ z^t\ z^t$ | $z^t\ z^t\ u^t\ u^t\ z^t\ z^t$ | $z^t\ z^t\ u^t\ z^t\ z^t\ z^t$ | $z^t\ u^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t$ |
| $z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ u^t\ u^t$ | $z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ u^t\ z^t$ | $z^t\ z^t\ z^t\ u^t\ z^t\ z^t$ | $z^t\ z^t\ u^t\ z^t\ z^t\ z^t$ |
| $z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t$ | $z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ u^t$ | $z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ u^t\ z^t$ | $z^t\ z^t\ z^t\ u^t\ z^t\ z^t$ |
| $z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t$ | $z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t$ | $z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ u^t$ | $z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ u^t\ z^t$ |
| $z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t$ | $z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t$ | $z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t$ | $z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ z^t\ u^t$ |

Пусть $m_{ij}$ — число единиц в любой строке матрицы $a_{ij}$. Условия для матрицы $M = (m_{ij})$ размера $6 \times 12$ различны в следующих случаях. Рассмотрим их отдельно.

**Случай 1.**

$$\sum_{j=1}^{12} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 6,\ 1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 6;\ \sum_{j=1}^{12} m_{ij} = 8,\ \sum_{j=1}^{12} m_{ij}^2 = 8,\ i = 1,2,3; \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{12} m_{ij} = 10, \quad \sum_{j=1}^{12} m_{ij}^2 = 14, \quad i = 4,5,6. \tag{9}$$

Имеется пять неизоморфных матриц, удовлетворяющих (8) и (9). Заменой их элементов циркулянтными матрицами и добавлением фиксированных точек и блоков всеми возможными способами получены 363 неизоморфных 2-(21, 5, 2) блок-схемы.

«Самые интересные» блок-схемы приведены в табл. 5. Точка $T_1$ не приведена в табл. 5–7, поскольку первая точка всех блок-схем из этих таблиц содержится в блоках с номерами 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 37, 38.

Таблица 5

Схемы с автоморфизмом порядка 3 с тремя фиксированными точками — случай 1

| *No* | $T_4$ | $T_7$ | $T_{10}$ | $T_{13}$ |
|---|---|---|---|---|
| орб | 01234589ef | 012345abgh | 01236788aa | 44556789ab |
| 1 | 1122331111 | 1133221111 | 1212332313 | 1212331122 |
| орб | 01234589ef | 012345abgh | 00116789ab | 22336789ab |
| 2 | 1122331111 | 1133221111 | 1212333333 | 1212332211 |
| 3 | 1122331111 | 1213231111 | 1212333323 | 1212332231 |
| 4 | 1122331111 | 1213231111 | 1212333323 | 1212332231 |
| 5 | 1123231111 | 1132321111 | 1212333333 | 1212331212 |

| *No* | $T_{16}$ | $T_{19}$ | $T_{20}$ | $T_{21}$ | Авт | P |
|---|---|---|---|---|---|---|
| орб | 01236799bb | | | | | |
| 1 | 1313221223 | 67efgh | 89cdgh | abcdef | 96 | |
| орб | 44556789ab | | | | | |
| 2 | 1212331122 | 67efgh | 8acdfh | 9bcdeg | 1152 | да |
| 3 | 1212331112 | 67efgh | 89cdgh | abcdef | 576 | да |
| 4 | 1212331112 | 68dfgh | 79cegh | abcdef | 1152 | да |
| 5 | 1212332121 | 67efgh | 89cdgh | abcdef | 96 | да |

**Случай 2.**

$$\sum_{j=1}^{12} m_{ij} = 8,\ \sum_{j=1}^{12} m_{ij}^2 = 8,\ i = 1,2;\ \sum_{j=1}^{12} m_{ij} = 9,\ \sum_{j=1}^{12} m_{ij}^2 = 11,\ i = 3,4; \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{12} m_{ij} = 10,\ \sum_{j=1}^{12} m_{ij}^2 = 14,\ i = 5,6;\ \sum_{j=1}^{12} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 6,\ 1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 6. \tag{11}$$

Двадцать неизоморфных матриц удовлетворяют условиям (10) и (11) и приводят к 1876 неизоморфным 2-(21, 5, 2) блок-схемам.

«Самые интересные» блок-схемы указаны в табл. 6.

Таблица 6

Схемы с автоморфизмом порядка 3
с тремя фиксированными точками — случай 2

| *No* | $T_4$ | $T_7$ | $T_{10}$ | $T_{13}$ |
|---|---|---|---|---|
| орб | 01234589ef | 0012368abg | 0114579abh | 24456788ab |
| 1 | 1123321111 | 1231322111 | 1231233221 | 1132322333 |
| орб | 01234589ef | 0012368abg | 0114579abh | 23457788ab |
| 2 | 1123231111 | 1232133111 | 1233211221 | 1233121211 |
| орб | 01234589ef | 0012368abg | 0114579abh | 22446789ab |
| 3 | 1122331111 | 1231321111 | 1233123221 | 1213323213 |
| 4 | 1123231111 | 1231322111 | 1232133221 | 1212332233 |
| 5 | 1123231111 | 1232133111 | 1233211221 | 1212332222 |
| 6 | 1123321111 | 1232133111 | 1232311221 | 1213233222 |
| 7 | 1213231111 | 1212333111 | 1133221221 | 1212332322 |
| 8 | 1213231111 | 1212333111 | 1133221221 | 1212332322 |
| 9 | 1213321111 | 1223133111 | 1122332221 | 1223132311 |

| *No* | $T_{16}$ | $T_{19}$ | $T_{20}$ | $T_{21}$ | Авт | Р |
|---|---|---|---|---|---|---|
| орб | 23356799ab | | | | | |
| 1 | 1233121222 | 67efgh | 89cdgh | abcdef | 96 | |
| орб | 23456699ab | | | | | |
| 2 | 1123232322 | 67efgh | 89cdgh | abcdef | 384 | |
| орб | 33556789ab | | | | | |
| 3 | 1213232313 | 67efgh | 89cdgh | abcdef | 48 | |
| 4 | 1212331111 | 67efgh | 89cdgh | abcdef | 48 | |
| 5 | 1212331133 | 67efgh | 89cdgh | abcdef | 96 | да |
| 6 | 1223133133 | 67efgh | 8acdfh | 9bcdeg | 192 | да |
| 7 | 1223132111 | 67efgh | 89cdgh | abcdef | 96 | да |
| 8 | 1223132111 | 67efgh | 8acdfh | 9bcdeg | 96 | да |
| 9 | 1223133133 | 67efgh | 89cdgh | abcdef | 48 | да |

**Случай 3.**

$$\sum_{j=1}^{12} m_{1j} = 8, \ \sum_{j=1}^{12} m_{1j}^2 = 8, \ \sum_{j=1}^{12} m_{ij} = 9, \ \sum_{j=1}^{12} m_{ij}^2 = 11, \ i = 2,3,4,5; \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^{12} m_{6j} = 10, \ \sum_{j=1}^{12} m_{6j}^2 = 14, \ \sum_{j=1}^{12} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 6, \ 1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 6. \quad (13)$$

Условия (12) и (13) выполняются для 29 неизоморфных матриц. Из них получены 3584 неизоморфные 2-(21, 5, 2) блок-схемы. «Самые интересные» блок-схемы приведены в табл. 7.

Таблица 7

Схемы с автоморфизмом порядка 3
с тремя фиксированными точками — случай 3

| *No* | $T_4$ | $T_7$ | $T_{10}$ | $T_{13}$ |
|---|---|---|---|---|
| орб | 00123689ae | 12344689bf | 0114578abg | 0224579abh |
| 1 | 1212331111 | 1321321211 | 1122333211 | 1133221221 |
| 2 | 1212331111 | 1321321211 | 1122333211 | 1133221221 |
| 3 | 1212331111 | 1321321211 | 1122333211 | 1133221221 |
| 4 | 1212331111 | 1321321211 | 1122333211 | 1133221221 |
| 5 | 1212331111 | 1321321211 | 1122333211 | 1133221221 |
| 6 | 1212331111 | 1321322111 | 1122332331 | 1133222131 |
| 7 | 1212331111 | 1321322111 | 1122332331 | 1133222131 |
| 8 | 1212331111 | 1321322111 | 1122332331 | 1133222131 |
| 9 | 1212331111 | 1321322111 | 1122332331 | 1133222131 |
| 10 | 1212331111 | 1321322111 | 1122332331 | 1133222131 |
| 11 | 1213231111 | 1232313111 | 1233212111 | 1132322311 |
| 12 | 1213231111 | 1232313111 | 1233212111 | 1132322311 |
| 13 | 1213321111 | 1212333111 | 1233122111 | 1132232311 |

| *No* | $T_{16}$ | $T_{19}$ | $T_{20}$ | $T_{21}$ | Авт | Р |
|---|---|---|---|---|---|---|
| орб | 33556789ab | | | | | |
| 1 | 1212331323 | 67efgh | 89cdgh | abcdef | 48 | |
| 2 | 1212331323 | 67efgh | 8acdfh | 9bcdeg | 48 | |
| 3 | 1212331323 | 67efgh | 9acdfg | 8bcdeh | 48 | |
| 4 | 1212333212 | 67efgh | 89cdgh | abcdef | 96 | |
| 5 | 1212333212 | 67efgh | 8acdfh | 9bcdeg | 48 | |
| 6 | 1212331231 | 67efgh | 89cdgh | abcdef | 48 | |
| 7 | 1212331231 | 67efgh | 8acdfh | 9bcdeg | 48 | |
| 8 | 1212331231 | 67efgh | 9acdfg | 8bcdeh | 48 | |
| 9 | 1212332312 | 67efgh | 89cdgh | abcdef | 384 | |
| 10 | 1212332312 | 67efgh | 8acdfh | 9bcdeg | 192 | да |
| 11 | 1223131321 | 67efgh | 89cdgh | abcdef | 192 | |
| 12 | 1223131321 | 67efgh | 8acdfh | 9bcdeg | 96 | да |
| 13 | 1213233213 | 67efgh | 89cdgh | abcdef | 48 | |

**Случай 4.**

$$\sum_{j=1}^{12} m_{ij} = 9,\ \sum_{j=1}^{12} m_{ij}^2 = 11,\ \sum_{j=1}^{12} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 6,\ i, i_1, i_2 = 1, \dots, 6,\ i_1 < i_2. \tag{14}$$

Двенадцать неизоморфных матриц удовлетворяют условиям (14) и позволяют получить 1263 неизоморфных 2-(21, 5, 2) блок-схем. Все «самые интересные» из них имеют автоморфизм порядка 3 и приведены в табл. 4.

### 2.6. Блок-схемы с автоморфизмом порядка 3 с шестью фиксированными точками

Пусть $D$ есть 2-(21, 5, 2) блок-схема с автоморфизмом $\alpha$ порядка 3, фиксирующим шесть точек и двенадцать блоков и действующим на точки следующим образом:

$$(1,2,3)\,(4,5,6)\dots(13,14,15)\,(16)\,(17)\,(18)\,(19)\,(20)\,(21),$$

на блоки как

$$(1,2,3)\,(4,5,6)\dots(28,29,30)\,(31)\,(32)\dots(42).$$

Матрица инцидентности схемы $D$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ E & C \end{pmatrix},$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица размера $5 \times 10$, $a_{ij} (i = 1, \dots, 5;\ j = 1, \dots, 10)$ — циркулянтные матрицы порядка 3, матрица $C$ изоморфна одной из матриц $C_1$ и $C_2$, а матрица $E$ — одной из матриц $E_1$ и $E_2$.

$$B$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
z^t & z^t & u^t & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\
z^t & z^t & z^t & z^t & u^t & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\
z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & u^t & u^t & z^t & z^t & z^t & z^t \\
z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & u^t & u^t & z^t & z^t \\
z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & z^t & u^t & u^t
\end{array}$$

$$E_1$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
u & z & z & z & z & z & z & z & z & z \\
z & u & z & z & z & z & z & z & z & z \\
z & z & u & u & z & z & z & z & z & z \\
z & z & z & z & u & u & z & z & z & z \\
z & z & z & z & z & z & u & u & z & z \\
z & z & z & z & z & z & z & z & u & u
\end{array}$$

$$E_2$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
z & z & z & z & z & z & z & z & z & z \\
u & u & z & z & z & z & z & z & z & z \\
z & z & u & u & z & z & z & z & z & z \\
z & z & z & z & u & u & z & z & z & z \\
z & z & z & z & z & z & u & u & z & z \\
z & z & z & z & z & z & z & z & u & u
\end{array}$$

$$C_1$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1 \\
1&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1 \\
1&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0 \\
1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0 \\
1&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0 \\
1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0
\end{array}$$

$$C_2$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1 \\
1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0 \\
1&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0 \\
1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0 \\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}$$

Таблица 8

Схемы с автоморфизмом порядка 3
с шестью фиксированными точками

| *No* | $T_7$ | $T_{10}$ | $T_{13}$ | $T_{16}$ |
|---|---|---|---|---|
| орб | 01236789gh | 01456789ij | 23456789kl | |
| 1 | 1133223311 | 1122332211 | 1133222211 | 0bdfhjkl |
| 2 | 1133223311 | 1122332211 | 1133222211 | cdefghijkl |
| 3 | 1133223311 | 1122332211 | 1133222211 | cdefghijkl |
| 4 | 1132232311 | 1132323211 | 1123233211 | 0bdfhjkl |
| 5 | 1132232311 | 1132323211 | 1123233211 | 0bdfhjkl |
| 6 | 1132232311 | 1132323211 | 1123233211 | 0bdfhjkl |
| 7 | 1132232311 | 1132323211 | 1123322311 | 0bdfhjkl |
| 8 | 1132232311 | 1132323211 | 1123233211 | cdefghijkl |
| 9 | 1132232311 | 1132323211 | 1123233211 | cdefghijkl |
| 10 | 1132232311 | 1132323211 | 1123233211 | cdefghijkl |

| *No* | $T_{17}$ | $T_{18}$ | $T_{19}$ | $\mathrm{T}_{20}$ | $\mathrm{T}_{21}$ | Авт | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1acegikl | 24abhi | 35abgj | 68abde | 79abcf | 48 | да |
| 2 | 02abjl | 13abik | 46abfh | 57abeg | 89abcd | 1536 | да |
| 3 | 02abjl | 14abhk | 36abfi | 57abeg | 89abcd | 384 | да |
| 4 | 1acegikl | 23abij | 45abgh | 67abef | 89abcd | 384 | да |
| 5 | 1acegikl | 46abfg | 57abeh | 28abdi | 39abcj | 48 | |
| 6 | 1acegikl | 46abfg | 57abeh | 39abdi | 28abcj | 48 | да |
| 7 | 1acegikl | 23abij | 45abgh | 67abef | 89abcd | 48 | |
| 8 | 01abkl | 23abij | 45abgh | 67abef | 89abcd | 192 | да |
| 9 | 01abkl | 46abfh | 57abeg | 28abdj | 39abci | 192 | да |
| 10 | 01abkl | 47abfh | 56abeg | 29abdj | 38abci | 48 | |

Рассмотрим матрицу $M = (m_{ij})$ размера $5 \times 10$ ($m_{ij}$ — число единиц в строке матрицы $a_{ij}$):

$$\sum_{j=1}^{10} m_{ij} = 8, \quad \sum_{j=1}^{10} m_{ij}^2 = 8, \quad \sum_{j=1}^{10} m_{i_1 j} m_{i_2 j} = 6, \quad i, i_1, i_2 = 1, \dots, 5, \quad i_1 < i_2. \tag{15}$$

Только одна матрица удовлетворяет (15). Заменой ее элементов циркулянтными матрицами и добавлением фиксированной части всеми возможными способами сконструировано 6013 неизоморфных 2-(21, 5, 2) блок-схем. «Самые интересные» из них приведены в табл. 8. Первая точка всех блок-схем содержится в блоках с номерами 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 33, 34. Четвертая точка схем с номерами 1, 2 и 3 содержится в блоках с номерами 1, 4, 8, 11, 15, 18, 25, 28, 35, 36, а четвертая точка остальных схем — в блоках с номерами 1, 4, 8, 12, 14, 18, 25, 28, 35, 36.

## 3. Исследование полученных блок-схем

Для каждой схемы вычислен порядок группы автоморфизмов. Число блок-схем с данным порядком группы автоморфизмов приведено в табл. 9. Строки этой таблицы соответствуют порядкам полной группы автоморфизмов (Авт), а столбцы — конструктивным автоморфизмам (К. Авт). Сокращение $p_{fh}^{N}$ в первой строке обозначает $N$-й случай конструктивного автоморфизма порядка $p$, фиксирующего $f$ точек и $h$ блоков. Минусы стоят перед числом блок-схем, полученных более чем одним конструктивным автоморфизмом и уже перечисленных в какой-нибудь левой графе таблицы.

Для числа неизоморфных блок-схем с автоморфизмами нечетного простого порядка получаем:

27 схем с автоморфизмами порядка 7
+443 схемы с автоморфизмами порядка 5
+22545 схем с автоморфизмами порядка 3
−1 схема с автоморфизмами порядка 5 и порядка 7
−6 схем с автоморфизмами порядка 3 и порядка 5
−11 схем с автоморфизмами порядка 3 и порядка 7
+1 схема с автоморфизмами порядка 3, порядка 5 и порядка 7

---

22998 схем с автоморфизмами простого нечетного порядка

Для всех 22998 блок-схем вычислены инварианты, которые являются разновидностью инвариантов, использованных В. Тончевым в [1, гл. 1].

• Для каждой точки $P$ найден набор чисел $(m_0,\ m_1,\ m_2)$, где $m_j (j = 0,1,2)$ — число пар точек $(Q, R)$, отличных от $P$ и таких, что $P$, $Q$ и $R$ содержатся одновременно точно в $j$ общих блоках.

• Для каждого блока $B$ найден набор чисел $(n_0^{(a)}, n_1^{(a)}, \dots, n_{39}^{(a)})$, где $n_i^{(a)} (i = 0, \dots, 39; a = 1,2)$ — число пар $(E, F)$ блоков, отличных от $B$ и таких, что существует точно $i$ других блоков, имеющих не менее $a$ общих точек с каждым из блоков $B$, $E$, $F$.

Таблица 9

Порядок полной группы автоморфизмов

| Авт/ К. Авт | $7_{00}$ | $5^1_{12}$ | $5^2_{12}$ | $3_{00}$ | $3^1_{36}$ | $3^2_{36}$ | $3^3_{36}$ | $3^4_{36}$ | $3_{6,12}$ | Все |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | | | 8315 | 48 | 1291 | 3103 | 782 | 4307 | 17846 |
| 5 | | 224 | 146 | | | | | | | 370 |
| 6 | | | | 1140 | 165 | 492 | 403 | 369 | 1417 | 3986 |
| 7 | 7 | | | | | | | | | 7 |
| 9 | | | | 16 | 3-2 | | | 14-14 | 1-1 | 17 |
| 10 | | 35 | 28 | | | | | | | 63 |
| 12 | | | | 14 | 94 | 68 | 61 | 71 | 196 | 504 |
| 14 | 7 | | | | | | | | | 7 |
| 18 | | | | 29 | 22-9 | | | 20-20 | 13-13 | 42 |
| 21 | 6 | | | 6-6 | | | | | | 6 |
| 24 | | | | | 4 | 15 | 4 | | 48 | 71 |
| 28 | 2 | | | | | | | | | 2 |
| 30 | | | 1 | | | | | | 1-1 | 1 |
| 36 | | | | 10 | 17-4 | | | 6-6 | 11-11 | 23 |
| 40 | | 1 | | | | | | | | 1 |
| 42 | 2 | | | 2-2 | | | | | | 2 |
| 48 | | | | | | 3 | 8 | | 5 | 16 |
| 54 | | | | 1 | 1-1 | | | | 1-1 | 1 |
| 80 | | | 1 | | | | | | | 1 |
| 96 | | | | | 2 | 4 | 2 | | | 8 |
| 108 | | | | 2 | 2-2 | | | | 2-2 | 2 |
| 120 | | | 2 | | 1-1 | | | | 1-1 | 2 |
| 160 | | 1 | | | | | | | | 1 |
| 192 | | | | | | 1 | 2 | | 2 | 5 |
| 252 | 1 | | | 1-1 | | | | 1-1 | | 1 |
| 320 | | | 1 | | | | | | | 1 |
| 336 | 1 | | | 1-1 | | | | | | 1 |
| 384 | | | | | | 1 | 1 | | 2 | 4 |
| 480 | | | 1 | | | | | | 1-1 | 1 |
| 576 | | | | | 1 | | | | 1-1 | 1 |
| 1152 | | | | | 2 | | | | 2-2 | 2 |
| 1536 | | | | | | | | | 1 | 1 |
| 3840 | | 1 | | | | 1-1 | | | | 1 |
| 120960 | 1 | | 1-1 | 1-1 | 1-1 | | | | 1-1 | 1 |
| Общее число | 27 | 262 | 181-1 | 9538-11 | 363-20 | 1876-1 | 3584 | 1263-41 | 6013-35 | 22998 |

Из определения этих наборов чисел следует, что они являются инвариантами, т. е. две блок-схемы с различными наборами неизоморфны друг другу. Следовательно, для каждой блок-схемы имеем систему инвариантов, состоящую из лексикографически упорядоченных инвариантов $(m_0,\ m_1,\ m_2)$ точек и лексикографически упорядоченных инвариантов $(n_0^{(a)}, n_1^{(a)}, \ldots, n_{39}^{(a)})$ блоков.

Инварианты разбивают множество, составленное из всех 22998 неизоморфных блок-схем, на 22857 подмножеств с одинаковыми инвариантами. Только 95 таких подмножеств состоят более чем из одной блок-схемы. Неизоморфизм блок-схем, принадлежащих таким подмножествам, установлен посредством проверки на эквивалентность их матриц инцидентности. В частности, все схемы с автоморфизмами порядка 5 или 7 различаются только инвариантами блоков.

Поскольку 2-(21, 5, 2) блок-схему можно получить конкатенацией двух 2-(21, 5, 1) блок-схем, среди сконструированных в настоящей работе блок-схем интересно определить число схем, которые можно построить и этим методом, т. е. те, которые редуцируемы до конкатенации двух 2-(21, 5, 1) блок-схем.

Получены следующие результаты:

| К. Авт | $7_{00}$ | $5_{12}^1$ | $5_{12}^2$ | $3_{00}$ | $3_{36}^1$ | $3_{36}^2$ | $3_{36}^3$ | $3_{36}^4$ | $3_{6,12}$ | Все |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Редуцируемые | 10 | 40 | 22-1 | 2338-5 | 124-13 | 480-1 | 414 | 70-10 | 727-25 | 4170 |

Оказалось, что число редуцируемых схем намного больше теоретически полученной в [2] границы ($\geqslant$ 10), а число нередуцируемых 2-(21, 5, 2) блок-схем с автоморфизмами простого нечетного порядка больше числа редуцируемых схем. У 4752 построенных схем есть также автоморфизм порядка 2. Перечисление схем с автоморфизмами порядка 2 и схем только с тривиальным автоморфизмом является более сложной задачей.

Вычисления сделаны на персональном компьютере 66 MHz. Все использованные программы написаны автором на языке $C{+}{+}$. Программа для замены элементов матриц циркулянтными матрицами работает не более нескольких минут. Программы проверки на изоморфизм двух схем работают также очень быстро. Но при построении схем с автоморфизмами порядка 3, после добавления фиксированных точек и блоков всеми возможными способами, получилось большое число схем и программа, отделяющая неизоморфные схемы, работала несколько часов в каждом случае.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Тончев В. Д.** Комбинаторни структури и кодове. София: Университетско издателство «Климент Охридски», 1988.
2. **Jungnickel D.** Quasimultiples of projective and affine planes // J. Geom. 1986. V. 26, N 2. P. 172–181.
3. **Mathon R., Rosa A.** Some results on the existence and enumeration of BIBDs // Math. Report. 1985. Dept. of Math.&Statist., McMaster Univ.
4. **Mathon R., Rosa A.** $2-(v, k, \lambda)$ designs of small order // The CRC Handbook of Combinatorial Designs, Boca Raton, FL.: CRC Press, 1996. P. 3–41.

Адрес автора:

Институт математики
и информатики БАН,
п/я 323, 5000 В. Тырново,
Болгария

Статья поступила
12 мая 1997 г.