ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 1998. Серия 1. Том 5, № 2, 3–27

УДК 519.17

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ГРАФОВ*)

Д. Л. Белоцерковский

Пусть $\mathfrak{G}(n, d_1, d_2)$ есть совокупность n-вершинных графов диаметра не более d_1 таких, что после удаления из графа любой вершины или любого ребра получается граф диаметра не более d_2. Любой граф из $\mathfrak{G}(n, d_1, d_2)$ с минимально возможным числом ребер называется экстремальным. Цель работы состоит в нахождении всех экстремальных графов из $\mathfrak{G}(n, 3, 4)$.

Введение

Разработка алгоритмов построения сети минимальной стоимости с ограничениями на надежность важна при проектировании сетей передачи данных [2, 3]. При разработке таких алгоритмов используются нижние оценки для числа ребер в графах с заданными свойствами [1]. В данной работе находятся графы, на которых эти оценки достигаются.

В работе используются следующие обозначения и понятия.

Через $G = (V, E)$ обозначается граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Пусть $n = |V|$ и $k = |E|$.

Диаметром связного графа $d(G)$ называется максимум среди всех расстояний между парами вершин в графе G.

Простой цепью в графе называется такой маршрут между двумя вершинами, что все вершины в этом маршруте, кроме, возможно, крайних, различны.

Простым циклом называется простая цепь, концы которой совпадают.

Простой цикл, в котором содержится l вершин, называется *l-циклом.*

Граф G называется *двусвязным*, если между любыми двумя различными вершинами в G имеется не менее двух непересекающихся простых цепей.

*) Работа выполнена в рамках государственной научно-технической программы «Информатизация России» (код проекта 316.156).

Введем следующие обозначения:

• $\mathfrak{G}(n, d_1, d_2)$ — множество таких n-вершинных графов G с диаметром $d(G) \leqslant d_1$, что после удаления из G любой вершины (и всех инцидентных ей ребер) или любого ребра получается граф диаметра не более d_2. Граф из $\mathfrak{G}(n, d_1, d_2)$ с минимальным числом ребер назовем *экстремальным*. Число ребер в экстремальном графе из $\mathfrak{G}(n, d_1, d_2)$ обозначим через $m(n, d_1, d_2)$. Так как после удаления произвольной вершины из графа G получается граф с конечным диаметром, то G — двусвязный граф и $d_2 \geqslant d_1$.

• $\mathfrak{G}_1(n, d_1, d_2)$ — множество таких n-вершинных графов G с $d(G) \leqslant d_1$, что после удаления любой вершины из G получается граф с диаметром не более d_2.

• $\mathfrak{G}_2(n, d_1, d_2)$ — множество таких n-вершинных графов G с $d(G) \leqslant d_1$, что после удаления любого ребра из G получается граф с диаметром не более d_2.

Ясно, что $\mathfrak{G}(n, d_1, d_2) \subset \mathfrak{G}_1(n, d_1, d_2)$ и $\mathfrak{G}(n, d_1, d_2) \subset \mathfrak{G}_2(n, d_1, d_2)$. Пусть $m_1(n, d_1, d_2)$ и $m_2(n, d_1, d_2)$ — число ребер в экстремальных графах из $\mathfrak{G}_1(n, d_1, d_2)$ и $\mathfrak{G}_2(n, d_1, d_2)$ соответственно. Ранее в работах [4–13] были указаны значения функций $m_1(n, d_1, d_2)$ и $m_2(n, d_1, d_2)$ и перечислены экстремальные графы из $\mathfrak{G}_1(n, d_1, d_2)$ и $\mathfrak{G}_2(n, d_1, d_2)$ для некоторых значений d_1 и d_2. Ниже перечислены экстремальные графы из $\mathfrak{G}(n, 3, 4)$ и доказана следующая

Теорема. *При любом $n \geqslant 4$ каждый экстремальный граф из $\mathfrak{G}(n, 3, 4)$ содержит $(3n-4)/2$ ребер, если n четно, и $(3n-5)/2$ ребер, если n нечетно.*

Эту теорему нетрудно доказать при $n = 4$ и $n = 5$. Действительно, 4-циклы и 5-циклы принадлежат множествам $\mathfrak{G}(4, 3, 4)$ и $\mathfrak{G}(5, 3, 4)$, являются в этих множествах экстремальными и других экстремальных графов в этих множествах нет. Следовательно, $m = \lfloor (3n-4)/2 \rfloor$ при $n = 4$ и $n = 5$.

Доказательство теоремы при $n \geqslant 6$ более сложно. Вначале установим верхнюю оценку для $m(n, 3, 4)$, показав, что $m(n, 3, 4) \leqslant \lfloor (3n-4)/2 \rfloor$ при любом $n \geqslant 6$. Затем при каждом $n \geqslant 6$ найдем все графы из $\mathfrak{G}(n, 3, 4)$, содержащие не более $\lfloor (3n-4)/2 \rfloor$ ребер. В § 2–6 рассмотрим различные подмножества графов из $\mathfrak{G}(n, 3, 4)$. Решив задачу поиска n-вершинных графов не более чем с $\lfloor (3n-4)/2 \rfloor$ ребрами для всех подмножеств из $\mathfrak{G}(n, 3, 4)$, покажем, что в $\mathfrak{G}(n, 3, 4)$ нет графов, содержащих менее $\lfloor (3n-4)/2 \rfloor$ ребер, и, таким образом, докажем теорему. Перечислим также все графы из $\mathfrak{G}(n, 3, 4)$ с $\lfloor (3n-4)/2 \rfloor$ ребрами, которые являются экстремальными для $\mathfrak{G}(n, 3, 4)$.

В процессе поиска экстремальных графов будем анализировать смежность между различными вершинами графа. Каждой вершине v из $V(G)$ и всякому ребру (v,v') из $E(G)$, инцидентному вершине v, поставим в соответствие рациональное число $\alpha^v_{vv'}$, где $0 \leqslant \alpha^v_{vv'} \leqslant 2$. Вершине v' поставим в соответствие рациональное число $\alpha^{v'}_{vv'}$ такое, что $0 \leqslant \alpha^{v'}_{vv'} \leqslant 2 - \alpha^v_{vv'}$. Если $\alpha^v_{vv'} \equiv \alpha^{v'}_{vv'} \equiv 1$ для произвольных вершин v и v', то сумма всех указанных чисел, соответствующих ребрам, инцидентным вершине v, равна степени вершины v, а сумма указанных чисел, взятая по всем ребрам и вершинам графа, равна удвоенному числу ребер в графе.

Условной степенью $\deg' v$ вершины v в графе G будем называть $\sum\limits_{e\in E_v} \alpha^v_e$, где E_v — множество ребер, инцидентных вершине v. Если $\sum\limits_{v\in V(G)} \deg' v \leqslant \sum\limits_{v\in V(G)} \deg v$, то процедуру установления соответствия каждой вершине графа условной степени будем называть *перераспределением вкладов*.

§ 1. Основные утверждения и обозначения

Сначала найдем верхнюю оценку для $m(n,3,4)$, доказав лемму 1.

Лемма 1. *$m(n,3,4) \leqslant (3n-4)/2$, если n четно, и $m(n,3,4) \leqslant (3n-5)/2$, если n нечетно.*

Доказательство. Рассмотрим граф из $\mathfrak{G}(6,3,4)$, изображенный на рис. 1. Нетрудно видеть, что после дублирования двух смежных вершин степени 2 (на рис. 1 эта операция изображена штрихом) получаем граф из $\mathfrak{G}(8,3,4)$. Применяя операцию дублирования произвольное количество раз, получаем графы из $\mathfrak{G}(2n,3,4)$ с $(3n-4)/2$ ребрами, где $2n \geqslant 6$. Следовательно, $m(n,3,4) \leqslant (3n-4)/2$, если n четно. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 2. Используя дублирование двух смежных вершин степени 2, получаем графы из $\mathfrak{G}(2n-1,3,4)$ с $(3n-5)/2$ ребрами, где $2n-1 \geqslant 7$. Следовательно, $m(n,3,4) \leqslant (3n-5)/2$, если n нечетно. Лемма 1 доказана.

Обозначим через $w(G)$ минимальную степень вершины в экстремальном графе G из $\mathfrak{G}(n,3,4)$. Поскольку G — двусвязный граф, $w(G) \geqslant 2$. Покажем, что $w(G) = 2$. Действительно, сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу его ребер. Поэтому если $w(G) \geqslant 3$ и в G содержится k ребер, то $k \geqslant \lfloor 3n/2 \rfloor$. Однако согласно лемме 1 графы с таким числом ребер не являются экстремальными.

Обозначим через G_B подграф графа G, порожденный вершинами из G степени не менее 3. Пусть $G_B = (V_B, E_B)$, $n_B = |V_B|$ и $k_B = |E_B|$. Пусть $\deg_B v$ — степень вершины v в порожденном подграфе G_B. Множество вершин степени 2 графа G обозначим через T, т. е. $T = V \backslash V_B$.

Пусть $C = \sum_{v \in V_B} (\deg v - 3)$. Поэтому если граф G является экстремальным, то $2|T| + 3n_B + C \leqslant 2k \leqslant 2m \leqslant 3n - 4$. Отсюда следует, что

$$|T| \geqslant 4 + C. \tag{1}$$

В процессе поиска экстремальных графов из $\mathfrak{G}(n, 3, 4)$ при $n \geqslant 6$ будем различать следующие случаи:

1) в G каждая вершина степени 2 смежна с вершиной из G_B и имеются по крайней мере две смежные вершины степени 2;

2) в графе G имеется вершина степени 2, смежная с двумя вершинами степени 2;

3) в G нет смежных вершин степени 2.

Обозначим через $\mathfrak{G}^i(n, 3, 4)$ подмножество графов из $\mathfrak{G}(n, 3, 4)$, удовлетворяющих условию случая i, где $i = 1, 2, 3$. В § 2 и 3 найдем графы из $\mathfrak{G}^1$ и $\mathfrak{G}^2$ не более чем с $\lfloor (3n - 4)/2 \rfloor$ ребрами.

Нетрудно видеть, что для каждого экстремального графа из $\mathfrak{G}^3(n, 3, 4)$ справедливы неравенства

$$2k_B + 4|T| \leqslant 2k \leqslant 2m \leqslant 3n - 4. \tag{2}$$

Пусть в графе G есть вершина v_1 степени 2, смежная с вершинами v_2 и v_3 из V_B. Если в графе G также имеется вершина v_4 степени 2, смежная с вершинами v_2 и v_3, то вершины v_1 и v_4 будем называть *дублированными*.

При рассмотрении множества $\mathfrak{G}^3$ будем различать следующие случаи:

i) в графе нет треугольников, содержащих вершину степени 2, и нет дублированных вершин степени 2;

ii) противный случай.

Обозначим через $\mathfrak{G}^3_1$ подмножество графов из $\mathfrak{G}^3$, в которых нет треугольников, содержащих вершину степени 2, и нет дублированных вершин степени 2. В § 3–5 найдем графы из $\mathfrak{G}^3_1$ не более чем с $\lfloor (3n - 4)/2 \rfloor$ ребрами.

Так как задача поиска экстремальных графов из $\mathfrak{G}^3_1$ весьма трудна, то процесс поиска графов из $\mathfrak{G}^3_1$ не более чем с $\lfloor (3n - 4)/2 \rfloor$ ребрами разобьем на несколько случаев.

Пусть w_B — минимальная степень вершины в порожденном подграфе G_B экстремального графа G из $\mathfrak{G}^3$. Покажем, что $w_B \leqslant 2$. Допустим, что $w_B \geqslant 3$. Тогда из (2) и условия $2k_B \geqslant w_B n_B \geqslant 3n_B$ следует, что $2k \geqslant 3n_B + 4|T| = 3n + |T| > 3n$ и в n-вершинном графе G содержится не менее $\lceil 3n/2 \rceil$ ребер. Однако согласно лемме 1 графы с таким числом ребер не являются экстремальными.

Обозначим через $\mathfrak{G}^3_{i+2}$ подмножество графов из $\mathfrak{G}^3_1$ таких, что $w_B = i$ $(i = 0, 1, 2)$. В § 3–5 будем искать графы не более чем с $\lfloor (3n-4)/2 \rfloor$ ребрами в каждом подмножестве $\mathfrak{G}^3_{i+2}$ отдельно.

Обозначим через $\mathfrak{G}^3_5$ подмножество графов из $\mathfrak{G}^3$, в каждом из которых есть либо треугольник и вершина степени 2, либо дублированные вершины степени 2. В § 6 найдем графы из $\mathfrak{G}^3_5$ не более чем с $\lfloor (3n-4)/2 \rfloor$ ребрами.

§ 2. Образующие экстремальные графы из $\mathfrak{G}(n, 3, 4)$

Рассмотрим графы из $\mathfrak{G}^1$. Пусть $G = (V, E)$ — граф из $\mathfrak{G}(n, 3, 4)$, в котором имеются две смежные вершины v' и v'' степени 2. Удалим вершины v' и v''. Получим граф $G' = G - \{v', v''\}$ с подграфом $G'_B = (V'_B, E'_B)$. Граф G назовем *образующим* графом для $\mathfrak{G}(n, 3, 4)$, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) $G' \notin \mathfrak{G}(n-2, 3, 4)$;

2) G_B не изоморфен G'_B.

Поэтому из образующего графа $G(n, 3, 4)$ с k ребрами с помощью операции дублирования двух смежных вершин степени 2 (см., например, графы на рис. 1 и 2) при $l = 1, 2, \ldots$ можно получить граф $G'(n+2l, 3, 4)$ из $\mathfrak{G}(n+2l, 3, 4)$ с $k + 3l$ ребрами.

Будем искать образующие графы из $\mathfrak{G}(n, 3, 4)$ не более чем с $\lfloor (3n-4)/2 \rfloor$ ребрами при $n \geqslant 6$. Докажем некоторые свойства искомого графа G и подграфа G_B этого графа. Пусть вершина v_3 из T смежна с вершиной v_1 из G_B, вершина v_4 из T смежна с v_2 из G_B и v_3 смежна с v_4. Введем следующие обозначения:

- V' — множество вершин графа G (кроме вершин v_1 и v_2), находящихся на расстоянии 2 от вершины v_3 или v_4;
- V'_1 — множество вершин (кроме вершины v_3), смежных с вершиной v_1 и не смежных с вершиной v_2;
- V'_2 — множество вершин (кроме вершины v_4), смежных с вершиной v_2 и не смежных с вершиной v_1;
- V'_3 — множество вершин, смежных с v_1 и v_2;
- V'' — множество вершин графа G, находящихся на расстоянии 3 от вершин v_3 и v_4;
- V''_1 — подмножество вершин из V'', каждая из которых смежна не менее чем с двумя вершинами из V';
- V''_2 — подмножество таких вершин из V'', каждая из которых принадлежит подграфу G_B и смежна с одной вершиной из V';

• V_3'' — подмножество таких вершин из V'', которые принадлежат множеству T и каждая из которых смежна с одной вершиной из V'.

Очевидно, что $V' = V_1' \cup V_2' \cup V_3'$ и $V'' = V_1'' \cup V_2'' \cup V_3''$, а $V' \cup V'' = V - \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Удалим вершину v_1. Для выполнения неравенства $d(v', v_3) \leqslant 4$ для любой вершины $v' \in V_1'$ необходимо, чтобы произвольная вершина из V_1' была смежна с вершиной из V_2' или с вершиной из V_3'. Возвратимся к исходному графу G и удалим вершину v_2. Аналогично для выполнения неравенства $d(v', v_4) \leqslant 4$ необходимо, чтобы любая вершина из V_2' была смежна с вершиной из V_1' или с вершиной из V_3'.

Выполним процедуру перераспределения вкладов. Положим, что любое ребро (v_1, v') или (v_2, v'), где $v' \in V'$, дает вклад 2 в условную степень вершины v' и не дает вклада в условную степень вершин v_1 и v_2. Любое ребро (v', v''), где $v' \in V'$ и $v'' \in V''$, дает вклад 2 в условную степень вершины v'' и не дает вклада в условную степень вершины v'. Пусть любое другое ребро из G дает единичный вклад каждой инцидентной ей вершине. Отсюда следует, что $\deg' v_1 + \deg' v_2 + \deg' v_3 + \deg' v_4 = 6$, если не существует ребра (v_1, v_2), и $\deg' v_1 + \deg' v_2 + \deg' v_3 + \deg' v_4 = 8$, если ребро (v_1, v_2) существует.

Составим неравенство, в правой части которого находится удвоенное значение максимального количества ребер в графе G, а в левой — сумма условных степеней вершин графа G. Пусть C' — переменная величина, принимающая значение 0 в случае отсутствия ребра (v_1, v_2) и значение 2 в случае наличия этого ребра. Пусть C'' — переменная величина, принимающая значение 1 в случае, если в графе G есть такая вершина v, что $\deg' v \geqslant 5$, или такая вершина v из V', что $\deg' v \geqslant 4$, и значение 0 в случае, если такой вершины в графе нет. В результате имеем

$$C'' + C' + 6 + 3|V_3''| + 4|V_2''| + 4|V_1''| + 3|V_1'| + 3|V_2'| + 4|V_3'| \leqslant 3n - 4.$$

Решая это неравенство, получаем

$$C'' + C' + |V_2''| + |V_1''| + |V_3'| \leqslant 2. \tag{3}$$

i) Допустим, в графе есть ребро (v_1, v_2). Тогда из (3) следует, что $C' = 2$, $C'' = |V_2''| = |V_1''| = |V_3'| = 0$ и $\deg'(v \in V') = 3$. Поэтому любая вершина из V' имеет степень 2 и смежна с некоторой вершиной из V'. Допустим, что имеется вершина $v_5 \in V_3''$. Для выполнения неравенства $d(v_5, v_i) \leqslant 3$, $i = 3, 4$, необходимо, чтобы вершина v_5 была смежна с вершиной из V_3', что противоречит условию $|V_3'| = 0$. Поэтому имеем $|V_3''| = |V''| = 0$, и единственным образующим графом в случае наличия ребра (v_1, v_2) является граф, изображенный на рис. 1, в котором $|V'| = 2$ и $|V_B| = 2$.

Действительно, пусть $|V'| > 2$ и имеются смежные вершины v_5 и v_6 степени 2. После удаления этих вершин получаем граф из $\mathfrak{G}(n-2,3,4)$, в котором порожденный подграф G'_B изоморфен порожденному подграфу G_B образующего графа, изображенного на рис. 1. Поэтому граф, в котором $|V'| > 2$, не является образующим.

ii) Пусть в графе нет ребра (v_1, v_2). Для выполнения неравенства $d(v_3, v_4) \leqslant 4$ после удаления ребра (v_3, v_4) необходимо, чтобы была вершина $v_5 \in V'_3$. Из (3) следует, что $|V'_3| \geqslant 1$ и $|V''_2| + |V''_1| \leqslant 1$. Пусть граф G имеет $(3n-5)/2$ ребер. В этом случае из (3) следует, что $|V'_3| = 1$ и $C'' + |V''_2| + |V''_1| = 0$. Допустим, что имеется вершина $v_6 \in V''_3$. Для выполнения неравенства $d(v_6, v_i) \leqslant 3$ при $i = 3$ и $i = 4$ необходимо, чтобы вершина v_6 была смежна с вершиной v_5. Так как $|V''_2| + |V''_1| = 0$, то v_6 смежна с вершиной $v_7 \in V''_3$. Следовательно, v_7 также смежна с v_5. Но после удаления вершины v_5 получаем несвязный граф $G' = G - \{v_5\}$, что противоречит неравенству $d_2 \leqslant 4$. Поэтому имеем $|V''| = 0$. Так как $\deg'(v \in V') = 3$, то любая вершина из V' имеет степень 2 и смежна с вершиной из V'. Поэтому единственным образующим графом из $\mathfrak{G}(n,3,4)$ с $(3n-5)/2$ ребрами является граф (см. рис. 2) такой, что $|V'| = 2$ и $|V_B| = 2$.

Перечислим все образующие графы из $\mathfrak{G}(n,3,4)$ с $(3n-4)/2$ ребрами, в которых нет ребра (v_1, v_2).

Пусть $|V'_3| \geqslant 2$. Тогда из (3) следует, что $C'' = |V''_2| = |V''_1| = 0$ и $|V'_3| = 2$. Поэтому в образующем графе имеем $|V'_1| + |V'_2| = 0$ и $\deg v_1 = \deg v_2 = 3$. Если $|V''_3| = 0$, то $|V''| = 0$, а так как $\deg'(v \in V'_3) = 4$, то $\deg(v \in V'_3) = 2$. Удовлетворяющий этим условиям образующий граф изображен на рис. 3. Если $|V''_3| > 0$, то $|V''_3| = 2$, и такой образующий граф изображен на рис. 4.

Пусть $|V'_3| = 1$ и $v_5 \in V'_3$. Тогда из (3) следует, что $|V''_2| + |V''_1| \leqslant 1$. Предположим, что $|V''| > 0$, и пусть $|V''_3| > 0$. Рассмотрим вершину $v' \in V''_3$. Для выполнения неравенства $d(v', v_i) \leqslant 3$ и $d(v', v_i) \leqslant 4$ при $i = 3, 4$ после удаления v_5 необходимо, чтобы v' была смежна с вершинами v_5 и v'' из V''_1. В этом случае $\deg' v'' = 5$ и $C'' = 1$. Следовательно, $|V'_3| + C'' + |V''_1| \geqslant 3$, что противоречит (3). Поэтому, полагая $|V''_3| = 0$, получаем, что если $|V''_2| + |V''_1| = |V''| \leqslant 1$, то $|V''| = |V''_1| = 1$. Следовательно, в V''_1 имеется вершина v_6 такая, что $\deg v_6 = 2$. Если v_6 смежна с v_5, то получаем граф, изображенный на рис. 5; если v_6 не смежна с v_5, то получаем графы, изображенные на рис. 6 и 7.

Пусть $|V''| = 0$. Допустим, что $v_5 \in V'_3$ и $v_5 \in V_B$. Тогда $\deg' v_5 = 5$ и $C'' = 1$. Удовлетворяющий этим условиям образующий граф изображен на рис. 8. Допустим, что $v_5 \in V'_3$ и $v_5 \in T$. Тогда в графе G имеется одна вершина из V_1 или V_2 с условной степенью 4. Такой образующий граф изображен на рис. 9.

Итак, мы показали, что при $n \geqslant 6$ в образующих графах из $\mathfrak{G}(n,3,4)$ имеется не менее $\lfloor(3n-4)/2\rfloor$ ребер. Перечислены также все образующие графы из указанного множества не более чем с $\lfloor(3n-4)/2\rfloor$ ребрами.

§ 3. Экстремальные графы из $\mathfrak{G}^2(n,3,4)$ и $\mathfrak{G}_2^3(n,3,4)$

В этом параграфе перечисляются все графы из $\mathfrak{G}^2(n,3,4)$ и $\mathfrak{G}_2^3(n,3,4)$ не более чем с $\lfloor(3n-4)/2\rfloor$ ребрами при $n \geqslant 6$. Показывается, что в таких графах имеется не менее $(3n-4)/2$ ребер (все графы с $(3n-4)/2$ ребрами изображены на рис. 10–12).

3.1. Поиск экстремальных графов из $\mathfrak{G}^2(n,3,4)$. Пусть в $\mathfrak{G}(n,3,4)$ имеется граф G не более чем с $\lfloor(3n-4)/2\rfloor$ ребрами, в котором имеется вершина v_1 степени 2, смежная с вершинами v_2 и v_3 степени 2. Пусть вершина v_4 смежна с вершиной v_2, а вершина v_5 смежна с v_3. Так как G — двусвязный граф, то $v_4 \neq v_5$. Удалим ребро (v_2,v_4). Для выполнения неравенства $d(v_2,v) \leqslant 4$ для любой вершины v из G необходимо, чтобы вершина v_5 была смежна с $n-3$ вершинами графа G. Возвратимся к исходному графу G и удалим ребро (v_3,v_5). В полученном графе вершина v_4 смежна с $n-3$ вершинами графа G. Так как не менее $2n-5$ ребер инцидентно вершинам v_2, v_3, v_4 и v_5, то $4n-10 \leqslant 2k \leqslant 3n-4$. Отсюда при $n \geqslant 6$ следует, что $n=6$. Единственный граф из $\mathfrak{G}^2(6,3,4)$ с 7 ребрами изображен на рис. 10.

3.2. Поиск экстремальных графов из $\mathfrak{G}_2^3$. Рассмотрим граф G из $\mathfrak{G}_2^3$, содержащий не более $\lfloor(3n-4)/2\rfloor$ ребер. Пусть в этом графе имеется вершина v_1 такая, что $\deg_B v_1 = 0$. Введем следующие обозначения:

- V_1 — множество вершин, смежных с v_1;
- V_2 — множество вершин, находящихся на расстоянии 2 от вершины v_1;
- V_3 — множество вершин, находящихся на расстоянии 3 от вершины v_1.

Так как $w_B = 0$, то любая вершина из V_1 принадлежит множеству T и любая вершина из V_2 принадлежит множеству V_B. Покажем, что каждая вершина из V_2 смежна с некоторой вершиной из V_2. Пусть вершина v_2 из V_2 смежна с вершиной v_3 из V_1. Удалим ребро (v_2,v_3). Так как в графе G нет дублированных вершин степени 2, то для выполнения неравенства $d(v_2,v_3) \leqslant 4$ необходимо, чтобы вершина v_2 была смежна с некоторой вершиной v_4 из V_2. Поэтому $\deg_B(v \in V_2) \geqslant 1$ для любой вершины v из V_2. Восстановим ребро (v_2, v_3) и покажем, что произвольная вершина из V_3 смежна с двумя вершинами из V_2. Пусть вершина v_4 из V_3 смежна с вершиной v_2 из V_2, а вершина v_3 из V_1 смежна с вершиной v_2. Удалим вершину v_2. Для выполнения неравенства $d(v_4, v_3) \leqslant 4$ необходимо, чтобы вершина v_4 была смежна с некоторой вершиной v_5 из V_2.

Вернемся к исходному графу G и выполним процедуру перераспределения вкладов.

Положим, что любое ребро (v_1, v'), где $v' \in V_1$, дает вклад 2 в условную степень вершины v' и не дает вклада в условную степень вершины v_1. Ребро (v', v''), где $v' \in V_2$, $v'' \in V_3$ и $v'' \in T$, в условную степень вершины v' дает вклад $1/2$ и в условную степень вершины v'' дает вклад $3/2$. Пусть любое другое ребро из G дает единичный вклад каждой инцидентной вершине. Таким образом, $\deg'(v \in V_1) = 3$ для любой $v \in V_1$ и $\deg'(v \in V_3) \geqslant 3$ для любой $v \in V_3$. Если $\deg(v \in V_2) \geqslant 4$ или $\deg(v \in V_2) = 3$ и $\deg_B(v \in V_2) = 2$, то $\deg'(v \in V_2) \geqslant 3$. Если $\deg'(v \in V_2) \geqslant 3$ для любой вершины в V_2, то

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v \geqslant \sum_{v \in V(G)} \deg' v \geqslant 3n - 3,$$

что противоречит условию $2k \leqslant 3n - 4$. Следовательно, в множестве V_2 имеется вершина v_2 такая, что $\deg' v_2 = 5/2$. Поэтому $\deg v_2 = 3$ и $\deg_B v_2 = 1$. Пусть вершина v_2 из V_3 смежна с вершинами v_3 из V_1, v_4 из V_2 и v_5 из T, которая принадлежит множеству V_3. Пусть v_5 смежна с v_6 из V_2, а вершина v_6 — с v_7 из V_1. Удалим вершину v_1. Для выполнения неравенства $d(v_3, v) \leqslant 4$ для любой вершины $v \in V_1$ необходимо, чтобы v_4 была смежна со всеми вершинами из V_2, кроме, возможно, вершины v_6.

Вернемся к исходному графу G. Для выполнения неравенства $d(v_5, v) \leqslant 3$ для любой $v \in V_1$ необходимо, чтобы вершина v_6 была смежна со всеми вершинами из V_2, кроме, возможно, вершин v_2 и v_4.

Так как вершина v_1 принадлежит множеству V_B, то она смежна не менее чем с 3 вершинами из V_1. Поэтому $|V_1| \geqslant 3$. Допустим, что $|V_1| = 3$. Так как $\deg_B(v \in V_2) \geqslant 1$ для любой v из V_2, то вершина v_6 смежна с v_4, и, таким образом, получаем граф из $\mathfrak{G}_2^3$ с 8 вершинами, изображенный на рис. 11. Допустим, что $|V_1| \geqslant 4$. Каждая вершина из $V' = V_2 - \{v_2, v_4, v_6\}$ смежна с вершинами v_4 и v_6. Поэтому $\deg'(v \in V') \geqslant 3$ для любой v из V'. Если $|V_1| \geqslant 5$, то $\deg' v_6 \geqslant 3$ и $\deg' v_4 \geqslant 3$. Следовательно, $\sum\limits_{v \in V(G)} \deg' v > 3n - 4$ и поэтому $|V_1| \leqslant 4$. Пусть $|V_1| = 4$ и вершина $v_8 \in V'$. Тогда $\deg' v_4 \geqslant 3$ и $\deg' v_8 \geqslant 3$. Для выполнения неравенства $\sum\limits_{v \in V(G)} \deg' v \leqslant 3n - 4$ необходимо, чтобы $\deg' v_4 = \deg' v_8 = 3$

и $\deg' v_6 = 5/2$. Следовательно, $|V_3| = 1$ и получаем граф из $\mathfrak{G}_2^3$ с 10 вершинами, изображенный на рис. 12.

§ 4. Экстремальные графы из $\mathfrak{G}_3^3(n, 3, 4)$

Допустим, что имеется граф G из $\mathfrak{G}_3^3$, содержащий не более $\lfloor (3n-4)/2 \rfloor$ ребер. Пусть v_2 — вершина из T, смежная с такими вершинами v_1 и v_3, что величина $\deg_B v_1 + \deg_B v_3$ является минимальной для любых двух вершин из V_B, имеющих общую смежную вершину из T. Допустим, что $\deg_B v_1 \leqslant \deg_B v_3$. Обозначим через G' подграф, порожденный вершинами v_1, v_2, v_3 и вершинами из V_3, смежными с v_i, $i = 1, 3$. Пусть G' содержит n' вершин и k' ребер.

Положим, что произвольное ребро (v_j, v'), где $v_j \in V(G')$ и $v' \notin V(G')$ дает вклад 2 в условную степень вершины v' и не дает вклада в условную степень вершины v_j. Пусть любое другое ребро из G дает единичный вклад каждой инцидентной вершине. Для выполнения неравенства $d(v_2, v \in V(G)) \leqslant 3$ необходимо, чтобы

1) любая вершина из $T - \{v_2\}$ была смежна с вершиной из G';

2) для любой вершины v из G_B, не смежной с вершиной из G', имелась вершина v' из T, смежная с вершинами v и v_3 (или v_1). Для выполнения неравенства $d(v_2, v') \leqslant 4$ после удаления вершины v_3 (или v_1) необходимо, чтобы в графе G имелась вершина v'' из T, $v' \neq v''$, смежная с v и v_1 (или v_3).

Таким образом, для произвольной вершины $v \notin V(G')$ выполнено следующее перераспределение вкладов:

$\deg' v = 3$, если $v \in T$ и v смежна с одной вершиной подграфа G' или если $v \in V_B$, $\deg_B v = 1$, $\deg v = 3$ и v не смежна с вершинами подграфа G' (пусть $v \in V_B^0$, где V_B^0 — множество таких вершин из V_B и $n_B^0 = |V_B^0|$);

$\deg' v = 4$, если $v \in T$ и v смежна с двумя вершинами подграфа G' (множество вершин из $T - \{v_2\}$, смежных с двумя вершинами подграфа G', обозначим через T');

$\deg' v \geqslant 4$, если $v \in V_B$ и v смежна с одной вершиной подграфа G' или v не смежна с вершинами подграфа G' и $\deg v \geqslant 4$;

$\deg' v \geqslant 5$, если $v \in V_B$ и v смежна более чем с одной вершиной подграфа G'.

Обозначим через V_B^1 множество вершин из V_B, не принадлежащих множеству $V(G')$ и условная степень которых равна 4. Пусть $n_B^1 = |V_B^1|$. Обозначим через V_B^2 множество вершин из V_B, не принадлежащих множеству $V(G')$ и условная степень которых превосходит 4. Пусть

$n_B^2 = |V_B^2|$. Таким образом, используя $n = n' - 1 + n_B^2 + n_B^1 + |T| + n_B^0$, получаем

$$3n-4 \geqslant \sum_{v\in V(G)} \deg' v \geqslant 5n_B^2+4n_B^1+3(|T|-1-|T'|)+4|T'|+2k'+3n_B^0. \quad (4)$$

В процессе рассмотрения графов из $\mathfrak{G}_3^3$, содержащих не более $\lfloor(3n-4)/2\rfloor$ ребер, будем различать следующие случаи:

1) $\deg_B v_1 + \deg_B v_3 \geqslant 4$. Это неравенство означает, что в графе G любая вершина из T, смежная с вершиной степени 1 в G_B, смежна также с вершиной степени не менее 3 в G_B. Множество таких графов обозначим через $\bar{\mathfrak{G}}_3^3$;

2) $\deg_B v_1 + \deg_B v_3 = 3$. Это означает, что $\deg_B v_1 = 1$, $\deg_B v_3 = 2$ и в графе G любая вершина из T, смежная с вершиной степени 1 в G_B, смежна также с вершиной степени не менее 2 в G_B. Пусть n'_B — количество вершин из V_B, которые в подграфе G_B имеют степень 1. Тогда получаем

$$|T| \geqslant 2n'_B. \quad (5)$$

Множество таких графов обозначим через $\bar{\bar{\mathfrak{G}}}_3^3$;

3) $\deg_B v_1 = \deg_B v_3 = 1$. Множество таких графов обозначим через $\tilde{\mathfrak{G}}_3^3$.

Для графов из $\bar{\mathfrak{G}}_3^3$ и $\bar{\bar{\mathfrak{G}}}_3^3$, содержащих не более $\lfloor(3n-4)/2\rfloor$ ребер, имеем $n_B^0 = 0$.

4.1. Поиск экстремальных графов из $\bar{\mathfrak{G}}_3^3$. Так как произвольная вершина v из G_B степени 1 в G_B смежна не менее чем с двумя вершинами из T, то в графе G существует не менее двух вершин, имеющих в G_B степень, не меньшую 3. Если v из T смежна с такими вершинами v' и v'', что $\deg_B v' = \deg_B v'' = 2$, то ребра (v, v') и (v, v'') дают вклад по 1/2 в условную степень вершин v' и v'' и по 3/2 в условную степень вершины v. Если $v \in V_B$, $\deg_B v \geqslant 3$ и $v' \in T$, то ребро (v, v') дает вклад 2 в условную степень вершины v' и дает нулевой вклад в условную степень вершины v. Пусть любое другое ребро из G дает единичный вклад каждой инцидентной вершине.

Покажем, что в графе G число вершин $n_B \geqslant 11$. Пусть n''_B — количество таких вершин из V_B, что они имеют степень 2 в подграфе G_B и степень 3 в графе G. Для таких вершин условная степень не менее 5/2. Следовательно, $3(n_B - n''_B) + (5/2)n''_B + 3|T| \leqslant 3n - 4$, т. е. $n''_B \geqslant 8$. Так как в графе G есть не менее двух вершин степени 3 в G_B и вершина степени 1 в G_B, то $n_B \geqslant 11$.

Если в графе G нет вершины v_2 из T, смежной с такой вершиной v_1, что $\deg v_1 = 3$ и $\deg_B v_1 = 2$, и с вершиной v_3 степени 2 в подграфе G_B, то

$$\sum_{v\in V(G)} \deg v \geqslant \sum_{v\in V(G)} \deg' v \geqslant 3n_B + 3|T| \geqslant 3n,$$

что противоречит неравенству $2k \leqslant 3n - 4$. Следовательно, в графе G имеется вершина v_2 из T, смежная с такой вершиной v_1, что $\deg v_1 = 3$ и $\deg_B v_1 = 2$, и с такой вершиной v_3, что $\deg_B v_3 = 2$. Обозначим через v_4 и v_5 вершины из V_B, смежные с v_1, и через v_6 и v_7 вершины из V_B, смежные с v_3. Вершины v_i, $1 \leqslant i \leqslant 7$, образуют подграф G' с n' вершинами и k' ребрами.

Для выполнения условия $d(v_1, v_2) \leqslant 4$ после удаления ребра (v_1, v_2) из G возможны следующие случаи:

a) $v_5 = v_6$; следовательно, $n' \leqslant 6$;

b) имеется вершина v_8 из T, смежная с v_3 и v_5; следовательно, $|T'| \geqslant 1$;

c) v_5 смежна с v_6; следовательно, $k' \geqslant 7$.

Поэтому из (4) получаем, что $4n' - 2k' - n_B - n_B^2 - |T'| \geqslant 5$. Так как $k' \geqslant 6$ и $n_B \geqslant 11$, то $n' = 7$. Если $n' = 7$, то $k' = 6$ и $|T'| = n_B^2 = 0$. Но тогда после удаления ребра (v_1, v_2) не выполняется условие $d(v_1, v_2) \leqslant 4$.

4.2. Поиск экстремальных графов из $\overset{=3}{\mathfrak{G}}_3$. Пусть в графе G любая вершина из T, смежная с вершиной степени 1 в G_B, смежна с вершиной степени не меньшей 2 в G_B. Множество вершин подграфа G' состоит из следующих вершин v_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$: $\deg_B v_1 = 1$ и $\deg_B v_3 = 2$, вершина v_2 из T смежна с v_1 и v_3, вершина v_4 из V_B смежна с v_1 и вершины v_5 и v_6 из V_B смежны с v_3. В подграфе G' содержится n' вершин и k' ребер, где $n' = 5$ или $n' = 6$, а $k' \geqslant 5$. После удаления ребра (v_1, v_2) из G неравенство $d(v_1, v_2) \leqslant 4$ может выполняться в следующих случаях:

a) $v_5 = v_4$; следовательно, $n' \leqslant 5$;

b)имеется вершина из T', смежная с v_1 или v_3; следовательно, $|T'| \geqslant 1$;

c) v_5 смежна с v_4; следовательно, $k' \geqslant 6$.

Допустим, что в графе G имеется вершина v_7 из G_B, не смежная с вершинами из G' . Тогда в графе G есть вершины v_8 и v_9 из T, смежные с v_1 и v_3 соответственно и с вершиной v_7. Но так как $\deg_B v_1 = 1$ и имеется вершина v_8 из T, смежная с v_7 и v_1, то $\deg_B v_7 \geqslant 2$, $\deg v_7 \geqslant 4$ и $n_B \geqslant n' + 2$. Поэтому из (4) следует, что $3n' - 2k' - |T'| \geqslant 7$. Если $n' \leqslant 5$, то $k' \leqslant 4$, что противоречит неравенству $k' \geqslant 5$. Если $k' \geqslant 6$, то $n' \geqslant 7$, что противоречит условию $6 \geqslant n' \geqslant 5$. Допустим, что $n' = 6$, $k' = 5$ и $|T'| = 1$. Подставив эти значения в неравенство (4), решим его. В результате получим $n_B \leqslant 8$. Так как $n' = 6$, то в подграфе G' имеется 5 вершин из V_B. Следовательно, вне подграфа G' находится не более

3 вершин из V_B. Поэтому $\deg_B v_7 = 2$ и $n_B = 8$. Пусть v_{10} и v_{11} — вершины из V_B, смежные с v_7. Допустим, что $\deg_B v_{10} \leqslant \deg_B v_{11}$. Покажем, что $\deg_B v_{10} \geqslant 2$. Действительно, если v_{10} смежна с некоторой вершиной из G', то $\deg_B v_{10} \geqslant 2$. Если вершина v_{10} не смежна с вершинами из G', то, как было показано, например, для вершины v_7, имеем $\deg_B v_{10} \geqslant 2$. Следовательно, $\deg_B v_{11} \geqslant 2$ и вершинам v_7, v_{10}, v_{11} в подграфе G_B инцидентно не менее 3 ребер.

Допустим, что вершинам v_7, v_{10}, v_{11} в подграфе G_B инцидентно не менее 4 ребер. Тогда $k_B \geqslant 7$. Используя (2), получаем $3n - 4 \geqslant 14 + 4(n-8)$, т. е. $n \leqslant 14$ и $|T| \leqslant 6$. Но так как v_1 смежна с v_2 и v_8, вершина v_3 — с v_2 и v_9, вершина v_7 — с v_8 и v_9 и по крайней мере одна из вершин v_1, v_3 смежна с вершиной из T', то $\deg v_1 + \deg v_3 + \deg v_7 \geqslant 12$. Поэтому $C = \sum\limits_{v \in V_B} (\deg v - 3) \geqslant 3$ и из (1) следует, что $|T| \geqslant 7$, что противоречит условию $|T| \leqslant 6$.

Предположим, что в подграфе G_B вершинам v_7, v_{10} и v_{11} инцидентны 3 ребра. Это означает, что эти вершины принадлежат треугольнику и не смежны с вершинами подграфа G'. Следовательно, в этом случае $\deg v_1 + \deg v_3 + \deg v_7 + \deg v_{10} + \deg v_{11} > 20$. Поэтому $C = \sum\limits_{v \in V_B} (\deg v - 3) > 5$ и из (1) следует, что $|T| > 9$. Так как $k_B = 6$, то из (2) получаем $3n - 4 \geqslant 12 + 4(n-8)$, т. е. $n \leqslant 16$ и $|T| \leqslant 8$, что противоречит условию $|T| > 9$.

Таким образом, мы показали, что в графе G нет вершины, не принадлежащей $V(G')$ и не смежной с какой-либо вершиной подграфа G'.

Допустим, что $v_5 = v_4$ и, следовательно, $n' \leqslant 5$. Подставляя это выражение в (4) и используя то, что $k' \geqslant 5$, получаем $n_B \leqslant 5$. Так как в подграфе G_B содержится не менее $n_B - 1$ ребра, то из (2) следует, что $3n - 4 \geqslant 2n_B - 2 + 4|T|$. Поэтому $n_B \geqslant |T| + 2$. Так как $n_B \leqslant 5$, то $|T| \leqslant 3$, что противоречит (1). Таким образом, в графе G нет вершины из T, смежной с такими вершинами v' и v'' подграфа G_B, что $\deg_B v' = 1$, $\deg_B v'' = 2$, и $d(v', v'') \leqslant 2$ в подграфе G_B.

Пусть $n' = 6$, $k' \geqslant 5$ и $n_B \geqslant 5$. Подставляя эти выражения в (4), получаем $n_B + |T'| + 2k' \leqslant 19$. Если $k' = 5$, то $|T'| > 0$ и $n_B \leqslant 8$. Если $k' \geqslant 6$, то $n_B \leqslant 7$. Поэтому дальнейшее рассмотрение задачи сводится к изучению следующих случаев:

i) $n_B = 8$, $k' = 5$, $|T'| = 1$; ii) $n_B = 7$; iii) $n_B = 6$; iiii) $n_B = 5$.

Допустим, что $n_B = 8$, $k' = 5$ и $|T'| = 1$. Тогда в графе G' имеется вершина v_7 из T, смежная с v_1 или v_3, а также еще с одной вершиной подграфа G'. Из (4) следует, что если $v \in V_B$ и $v \notin G'$, то $\deg' v = 4$, а если $v \in \{T - \{v_2, v_7\}\}$, то $\deg' v = 3$. Это означает, что произвольная вершина из V_B, не принадлежащая подграфу G', смежна с одной вершиной подграфа G' и имеет степень 3 в графе G, а некоторая вершина из $T - \{v_2, v_7\}$ смежна с одной вершиной подграфа G'.

Предположим, что вершина v_7 смежна с v_1 и v_5. Тогда для выполнения неравенства $d(v_6, v_2) \leqslant 4$ после удаления вершины v_3 и выполнения неравенства $d(v_4, v_2) \leqslant 4$ после удаления вершины v_1 необходимо, чтобы имелись

1) вершина v_8 из T, смежная с v_1 и такой вершиной v_9 из V_B, смежной с v_6, что $\deg_B v_9 = 2$;

2) вершина v_{10} из T, смежная с v_3 и вершиной v_{11} из V_B, смежной с v_4.

Для выполнения неравенства $d(v_8, v_{10}) \leqslant 3$ необходимо, чтобы вершины v_9 и v_{11} были смежны. Поэтому получаем $\deg_B v_9 = \deg_B v_{11} = 2$. Так как $\deg v_9 = \deg v_{11} = 3$, то после удаления вершины v_1 получаем $d(v_7, v_{10}) > 4$, что противоречит условию $d_2 \leqslant 4$.

Предположим, что вершина v_7 смежна с v_3 и v_4. Тогда для выполнения неравенств $d(v_5, v_2) \leqslant 4$ и $d(v_6, v_2) \leqslant 4$ после удаления вершины v_3 необходимо, чтобы имелись

1) вершина v_8 из T, смежная с v_1 и такой вершиной v_9, смежной с v_5, что $\deg_B v_9 = 2$;

2) вершина v_{10} из T, смежная с v_1 и такой вершиной v_{11}, смежной с v_6, что $\deg_B v_{11} = 2$.

Пусть v_{12} — такая вершина из V_B, что $v_{12} \notin V(G')$, $v_{12} \neq v_{11}$ и $v_{12} \neq v_9$. Так как v_{12}, v_{11} и v_9 смежны с вершинами из G', а $\deg_B v_9 = 2$ и $\deg_B v_{11} = 2$, то в подграфе G_B вершинам v_{12}, v_{11} и v_9 инцидентно не менее 4 ребер. Таким образом, из (2) следует, что $3n - 4 \geqslant 14 + 4|T|$. Поскольку $n_B = 8$, имеем $|T| \leqslant 6$. Так как $\deg v_1 + \deg v_3 \geqslant 8$, то $C \geqslant 2$. Отсюда и из (1) и (2) следует, что $|T| = 6$, $C = 2$, $\deg v_1 = \deg v_3 = 4$, $k_B = 7$ и в подграфе G_B вершинам v_{12}, v_{11}, v_9 инцидентно 4 ребра. Так как в G нет вершины, не смежной с вершинами из G', то v_{12} смежна с вершиной из G'. Следовательно, $\deg_B v_{12} = 1$, вершины v_9 и v_{11} смежны и в T есть вершины v_{13} и v_{14}, смежные с v_{12}. Так как $\deg v_1 = \deg v_3 = 4$, то вершины v_{13} и v_{14} не смежны с v_1 и v_3. Следовательно, v_{13} и v_{14} должны быть смежны с двумя вершинами из $\{v_4, v_5, v_6\}$. Допустим, что v_{13} смежна с v_5. Тогда $d(v_{10}, v_{13}) > 3$, что противоречит условию $d_1 \leqslant 3$. Если v_{13} смежна с v_6, то $d(v_8, v_{13}) > 3$.

Допустим, что $n_B = 7$. Тогда $k_B \geqslant 5$. Используя (1) и (2), получаем $5 \leqslant k_B \leqslant 6$. Предположим, что $k_B = 5$. Это означает, что $n'_B \geqslant 4$. Отсюда и из (5) следует, что $|T| \geqslant 8$, и, пользуясь (2), имеем $k_B \leqslant 4$.

Допустим, что $n_B = 7$ и $k_B = 6$. Тогда $n'_B \geqslant 2$. Из (2) и (5) следует, что $|T| \leqslant 5$ и $n'_B = 2$. Так как $|T| \leqslant 5$, то из (1) получаем, что $C \leqslant 1$. Рассмотрим следующие возможности для подграфа G_B:

1) подграф G_B — простая цепь;

2) подграф G_B — объединение простой цепи длины l и $(6-l)$-цикла, $1 \leqslant l \leqslant 3$.

Предположим, что подграф G_B — простая цепь. Пусть v_1 и v_2 — такие вершины, что $\deg_B v_1 = \deg_B v_2 = 1$. Так как $C \leqslant 1$, то допустим, что $\deg v_1 = 3$. Пусть v_3 и v_4 — вершины из T, смежные с v_1, вершина v_5 из V_B смежна с v_1, а вершина v_6 из V_B смежна с v_2. Для выполнения неравенств $d(v_1, v_2) \leqslant 3$ и $d(v_4, v_2) \leqslant 3$ допустим, что v_3 и v_6 смежны, вершина v_4 смежна с v_7 из V_B, которая смежна с v_6. Удалим ребро (v_3, v_6). Для выполнения неравенства $d(v_3, v_2) \leqslant 4$ необходимо, чтобы имелась вершина v_8 из T, смежная с v_5 и v_2. Вернемся к исходному графу. Удалим ребро (v_1, v_5). Для выполнения условия $d(v_1, v_5) \leqslant 4$ необходимо, чтобы была вершина из T, смежная с v_6 или v_7, а также с v_5. Но тогда имеем $\deg v_5 \geqslant 4$ и $\deg v_6 \geqslant 4$, что противоречит условию $C \leqslant 1$.

Предположим, что подграф G_B является объединением простой цепи длины l и $(6-l)$-цикла. Пусть эта цепь является компонентой K_1 в подграфе G_B, а $(6-l)$-цикл — компонентой K_2. Пусть v_1 и v_2 — такие вершины из компоненты K_1, что $\deg_B v_1 = \deg_B v_2 = 1$. Так как в графе G нет вершины из T, смежной с такими вершинами v' и v'' из G_B, что $\deg_B v' = 1$, $\deg_B v'' = 2$ и $d(v', v'') \leqslant 2$ в подграфе G_B, то в графе G нет вершины из T, смежной с v_1 или v_2 и еще с одной вершиной компоненты K_1. Удалим ребро, инцидентное вершине v_1 и вершине из K_1. Для выполнения условия $d(v_1, v) \leqslant 4$ для любой $v \in K_1$ требуется, чтобы существовала вершина $v_3 \in K_2$, смежная с вершинами v_4 и v_5 из T, где v_4 смежна с v_1, а вершина v_5 — с вершиной $v \in K_1$. Но так как $\deg_B v_3 = 2$, то $\deg v_3 \geqslant 4$. Поскольку $C \leqslant 1$, $\deg v_3 = 4$ и любая другая вершина из G_B имеет степень 3. Следовательно, для выполнения неравенства $d(v_1, v) \leqslant 4$ для любой $v \in K_1$ после удаления ребра, инцидентного v_1 и вершине из K_1, необходимо, чтобы K_1 состояла из вершин v_1 и v_2. Так как $C = 1$, то из (1) следует, что $|T| = 5$. Но так как $\deg v_1 = \deg v_2 = 3$, то из (5) следует, что в T имеется 4 вершины, смежные с v_1 и v_2. Следовательно, в T существует вершина v_6, смежная с двумя вершинами из K_2 степени 3. Но в этом случае получаем $d(v_1, v_6) > 3$, что противоречит условию $d_1 \leqslant 3$.

Допустим, что $n_B = 6$. Тогда имеем $k_B \geqslant 4$. Используя (1) и (2), получаем $4 \leqslant k_B \leqslant 5$. Предположим, что $k_B = 4$. Это означает, что $n'_B \geqslant 4$, и из (5) следует, что $|T| \geqslant 8$. Отсюда и из (2) получаем $k_B \leqslant 3$.

Допустим, что $n_B = 6$ и $k_B = 5$. Тогда $n'_B \geqslant 2$. Из (1), (2) и (5) следует, что $|T| = 4$, $C = 0$ и $n'_B = 2$. Это означает, что в графе G все вершины подграфа G_B имеют степень 3 и произвольная вершина из T

смежна с такой вершиной v, что $\deg_B v = 1$. Рассмотрим следующие возможности для подграфа G_B:

1) подграф G_B является простой цепью;

2) подграф G_B является объединением простой цепи длины l и $(5-l)$-цикла, $1 \leqslant l \leqslant 2$.

Предположим, что подграф G_B является простой цепью. Так как в графе G нет вершины из T, смежной с такими вершинами v' и v'' подграфа G_B, что $\deg_B v' = 1$, $\deg_B v'' = 2$ и $d(v', v'') \leqslant 2$ в подграфе G_B, то получаем граф из $\overset{\equiv}{\mathfrak{G}}{}_3^3$ с 10 вершинами, изображенный на рис. 13.

Предположим, что подграф G_B является объединением простой цепи длины l и $(5-l)$-цикла. Пусть эта цепь является компонентой K_1 подграфа G_B, а $(5-l)$-цикл — компонентой K_2. Пусть v_1 и v_2 — такие вершины из компоненты K_1, что $\deg_B v_1 = \deg_B v_2 = 1$. Так как в графе G нет вершины из T, смежной с такими вершинами v' и v'' из G_B, что $\deg_B v' = 1$, $\deg_B v'' = 2$ и $d(v', v'') \leqslant 2$ в подграфе G_B, то в графе G нет вершины из T, смежной с v_1 или v_2 и еще с одной вершиной компоненты K_1. Удалим ребро, инцидентное v_1 и вершине из K_1. Для выполнения условия $d(v_1, v) \leqslant 4$ для любой $v \in K_1$ требуется, чтобы существовала вершина $v_3 \in K_2$, смежная с вершинами v_4 и v_5 из T, где v_4 смежна с v_1, а вершина v_5 — с вершиной $v \in K_1$. Но так как $\deg_B v_3 = 2$, то $\deg v_3 \geqslant 4$, что противоречит условию $C = 0$.

Допустим, что $n_B = 5$. Тогда если $k_B \geqslant 4$, то, используя (2), получаем $|T| \leqslant 3$, что противоречит (1). Если $k_B = 3$, то $n'_B \geqslant 4$ и согласно (5) имеем $|T| \geqslant 8$. Отсюда и из (2) следует, что $k_B < 2$, что противоречит условию $k_B \geqslant 3$.

4.3. Поиск экстремальных графов из $\widetilde{\mathfrak{G}}_3^3$. Пусть в графе G имеется вершина v_2 из T, смежная с такими вершинами v_1 и v_3, что $\deg_B v_1 = \deg_B v_3 = 1$. Обозначим через v_4 и v_5 вершины из V_B, смежные с v_1 и v_3 соответственно. Подграф G' порожден вершинами $v_1, \ldots, v_5$. В подграфе G' содержится n' вершин и k' ребер, где $4 \leqslant n' \leqslant 5$ и $k' \geqslant 4$. Для выполнения условия $d(v_1, v_2) \leqslant 4$ после удаления ребра (v_1, v_2) возможны следующие случаи:

a) $v_4 = v_5$ и тогда имеем $n' = 4$;

b) v_5 смежна с v_4, откуда следует, что $k' \geqslant 5$;

c) v_5 не смежна с v_4 и имеется вершина из T, смежная либо с v_5 и v_1, либо с v_3 и v_4. Следовательно, $|T'| \geqslant 1$.

Используя (4), получаем

$$2n_B^2 + n_B^1 + |T'| + 2k' - 3n' \leqslant -4. \qquad (6)$$

Покажем, что $2n_B^2 + n_B^1 \leqslant 2$. Действительно, если $k' \geqslant 5$, то, подставляя это выражение в (6), получаем $2n_B^2 + n_B^1 \leqslant 1$. Если $n' = 4$, то из (6) и выражения $k' \geqslant 4$ следует, что $n_B^1 = n_B^2 = 0$ и $|T'| = 0$. Если $n' = 5$ и $k' = 4$, то $|T'| \geqslant 1$ и из (6) следует, что $2n_B^2 + n_B^1 \leqslant 2$.

Предположим, что $n' = 4$. Тогда $n_B^1 = n_B^2 = 0$ и $|T'| = 0$. Допустим, что $n_B^0 = 0$. Тогда $n_B = 3$ и $k_B = 2$. Подставляя эти значения в (2), получаем $|T| \leqslant 1$, что противоречит (1). Допустим, что $n_B^0 > 0$. Так как $n_B^1 = 0$, то $\deg_B v_4 = 2$. Следовательно, должна существовать вершина из T, смежная с v_4 и некоторой вершиной $v_6 \in V_B^0$. Но для выполнения неравенства $d(v_6, v_2) \leqslant 3$ должна существовать вершина v_7 из T, смежная с v_6 и v_1. Для выполнения условия $d(v_7, v_2) \leqslant 4$ после удаления v_1 необходимо, чтобы имелась вершина из T, смежная с v_6 и v_3. Так как $\deg_B v_6 > 0$, то в этом случае получаем $\deg v_6 \geqslant 4$, что противоречит условию $v_6 \in V_B^0$. Итак, мы показали, что $n' > 4$. Таким образом, в графе G нет вершины из T, смежной с такими вершинами v' и v'' из G_B, что $\deg_B v' = \deg_B v'' = 1$ и $d(v', v'') \leqslant 2$ в подграфе G_B.

Допустим, что $n' = 5$ и v_5 смежна с v_4. Тогда из (6) следует, что $k' = 5$, $n_B^2 = 0$ и $n_B^1 \leqslant 1$. Предположим, что $n_B^1 + n_B^2 = 0$. В этом случае из (6) следует, что $|T'| \leqslant 1$. Пусть вершина v_5 не смежна ни с одной вершиной из T'. Тогда имеется вершина из T, смежная с v_5 и некоторой вершиной $v_6 \in V_B^0$. Вершина v_6 смежна также с двумя вершинами из T, которые смежны с v_1 и v_3 соответственно. Поскольку $\deg_B v_6 > 0$, то $\deg v_6 \geqslant 4$, что противоречит условию $v_6 \in V_B^0$. Предположим, что $n_B^1 = 1$ и существует $v \in V_B^1$. Тогда из (6) получаем $|T'| = 0$ и возможны два случая:

1) имеется вершина $v_6 \in V_B^1$, смежная с v_4;

2) имеется вершина из V_B^1, не смежная с вершинами из G' и, следовательно, в V_B нет вершин, смежных с вершинами из G'.

Пусть имеется вершина $v_6 \in V_B^1$, смежная с v_4. Так как $|T'| = 0$, то имеется вершина v_7 из T, смежная с v_5 и некоторой вершиной из V_B, не принадлежащей множеству $V(G')$. Если v_7 смежна с некоторой вершиной $v \in V_B^0$, то как и в случае $n_B^1 = 0$ получаем, что v смежна также с двумя вершинами из T, смежными с v_1 и v_3. Поэтому $\deg v \geqslant 4$, что противоречит условию $v \in V_B^0$. Допустим, что v_7 смежна с v_6. Так как $\deg' v_6 = 4$, то $\deg v_6 = 3$ и v_6 смежна не более чем с двумя вершинами из T. Если $n_B^0 = 0$, то получаем $|T| < 4$, что противоречит (1). Следовательно, $n_B^0 > 0$. Пусть $v_8 \in V_B^0$ и смежные с ней вершины v_9 и v_{10} из T смежны с v_1 и v_3 соответственно. Для выполнения неравенства $d(v_9, v_1) \leqslant 4$ после удаления ребра (v_1, v_9) и неравенства $d(v_{10}, v_3) \leqslant 4$ после удаления ребра (v_3, v_{10}) необходимо, чтобы

1) v_8 была смежна с v_6;

2) имелась вершина из T, смежная с v_8 и v_5.

Но тогда $\deg v_8 \geqslant 4$, что противоречит условию $v_8 \in V_B^0$.

Пусть в V_B нет вершин, смежных с вершинами из G', и имеется вершина из V_B^1, не смежная с вершинами подграфа G'. Так как $|T'| = 0$ и $\deg_B v_4 = \deg_B v_5 = 2$, то имеется вершина v_6 из T, смежная с v_4, и вершина v_7 из T, смежная с v_5. Вершины v_6 и v_7 должны быть смежны соответственно с такими вершинами v_8 и v_9 из V_B, что $v_8 \notin V(G')$ и $v_9 \notin V(G')$. Если $v_8 \neq v_9$, то из $n_B^1 = 1$ следует, что $v_9 \in V_B^0$. Но так как $\deg_B v_9 > 0$ и v_9 смежна с v_7 и двумя вершинами из T, которые смежны с v_1 и v_3, то $\deg v_9 \geqslant 4$, что противоречит условию $v_9 \in V_B^0$. Если $v_8 = v_9$, то $\deg v_8 \geqslant 5$, что противоречит условию $n_B^2 = 0$.

Итак, мы показали, что $n' = 5$ и v_5 не может быть смежна с v_4. Таким образом, в графе G нет вершины из T, смежной с такими вершинами v' и v'' из G_B, что $\deg_B v' = \deg_B v'' = 1$ и $d(v', v'') \leqslant 3$ в подграфе G_B.

Пусть v_5 не смежна с v_4 и имеется вершина v_6 из T', смежная с вершинами v_5 и v_1. В этом случае имеем $|T'| \geqslant 1$, а из (6) получаем, что $2n_B^2 + n_B^1 \leqslant 2$. Покажем, что нет вершины v' из V_B^0. Допустим, что вершина v' смежна с v'' из V_B, которая смежна, например, с вершиной v_4 из G'. Тогда имеются две вершины из T, смежные соответственно с вершинами v', v_1 и v', v_3. Но так как $d(v_1, v') = 3$ в подграфе G_B и $\deg_B v' = \deg_B v_1 = 1$, то нет вершины из T, смежной с вершинами v' и v_1. Допустим, что расстояние между v' и ближайшей к ней вершиной из $G' \cap G_B$ больше 3. Так как имеются две вершины из T, смежные соответственно с вершинами v', v_1 и v', v_3, то пусть v'' из T смежна с v' и v_1. Удалим ребро (v'', v_1). Для выполнения неравенства $d(v'', v_1) \leqslant 4$ необходимо, чтобы была вершина из T, смежная с вершинами v' и v_4. Так как $\deg_B v' > 0$, то $\deg v' \geqslant 4$, что противоречит условию $v' \in V_B^0$. Таким образом, в графе G для любой такой вершины v из V_B, что $v \notin V(G')$, имеем $v \in (V_B^1 \cup V_B^2)$. Но так как $2n_B^2 + n_B^1 \leqslant 2$ и $n' = 5$, то $4 \leqslant n_B \leqslant 6$. Рассмотрим следующие случаи:

1) $n_B = 6$; 2) $n_B = 5$; 3) $n_B = 4$.

Допустим, что $n_B = 6$. Так как $n' = 5$, то $n_B^2 + n_B^1 = 2$. Пользуясь этим равенством, из (6) получаем, что $n_B^2 = 0$. Следовательно, $n_B^1 = 2$ и $|T'| = 1$. Используя (1) и (2), имеем $k_B \leqslant 5$. Допустим, что $k_B = 5$. Тогда из (1) и (2) следует, что $|T| = 4$ и любая вершина из V_B имеет степень 3. Поэтому $\deg v_1 = 3$. Так как $|T'| = 1$ и $n_B^2 = 0$, то после удаления ребра (v_1, v_4) получаем $d(v_1, v_4) > 4$, что противоречит условию $d_2 \leqslant 4$. Предположим, что $k_B \leqslant 4$ и в подграфе G_B вершинам v_7 и v_8 из V_B^1 инцидентно не более двух ребер. Для выполнения неравенства $d(v_2, v_4) \leqslant 4$ после удаления v_1 необходимо, чтобы имелась вершина v_9

из T, смежная с вершинами v_3 и v_7, и вершина v_7 была смежна с v_4. Следовательно, $k_B = 4$ и вершинам v_7 и v_8 инцидентно два ребра. Удалим ребро (v_1, v_4). Для выполнения неравенства $d(v_1, v_4) \leqslant 4$ необходимо, чтобы имелась вершина v_{10} из T, смежная с вершинами v_1 и v_8 (тогда в подграфе G_B имеем $d(v_1, v_8) > 3$), и вершина v_{11} из T, смежная с вершинами v_4 и v_8. Следовательно, v_8 смежна с v_5 и получаем $d(v_9, v_{10}) > 3$, что противоречит неравенству $d_1 \leqslant 3$.

Допустим, что $n_B = 5$. В этом случае $k_B \geqslant 3$. Используя (1) и (2), получаем $k_B = 3$. Так как $\deg_B(v \in V_B) > 0$, то подграф G_B является объединением двух простых цепей из 2 и 3 вершин. Так как в графе G нет вершины из T, смежной с такими вершинами v' и v'' из G_B, что $\deg_B v' = \deg_B v'' = 1$ и $d(v', v'') \leqslant 3$ в G_B, то любая вершина из T смежна с вершинами из разных компонент подграфа G_B. Поэтому $|T| \geqslant 5$. Используя (2), получаем $|T| = 5$; соответствующий граф из $\widetilde{\mathfrak{G}}_3^3$ с 10 вершинами изображен на рис. 14.

Допустим, что $n_B = 4$. Используя (1) и (2), имеем $k_B = 2$, $|T| = 4$ и получаем граф из $\widetilde{\mathfrak{G}}_3^3$ с 8 вершинами, изображенный на рис. 15.

Итак, рассмотрев графы из $\widetilde{\mathfrak{G}}_3^3$, мы обнаружили все графы из $\mathfrak{G}_3^3$ не более чем с $(3n-4)/2$ ребрами при $n \geqslant 6$ и показали, что в графах из $\mathfrak{G}_3^3$ имеется не менее $(3n-4)/2$ ребер (графы с $(3n-4)/2$ ребрами из $\mathfrak{G}_3^3$ изображены на рис. 11–15).

§ 5. Экстремальные графы из $\mathfrak{G}_4^3(n, 3, 4)$

Рассмотрим граф G из $\mathfrak{G}_4^3$, содержащий не более $\lfloor (3n-4)/2 \rfloor$ ребер. Так как $w_B = 2$, из (2) имеем $2n_B + 4|T| \leqslant 3n - 4$. Поэтому

$$n_B \geqslant |T| + 4. \tag{7}$$

Далее из (1) и (7) получаем

$$n_B \geqslant 8 + C. \tag{8}$$

Выполним процедуру перераспределения вкладов в графе G. Если v_2 из T смежна с такими вершинами v_1 и v_3, что $\deg_B v_1 = \deg_B v_3 = 2$, то в условную степень вершин v_1 и v_3 ребро (v_1, v_2) и ребро (v_2, v_3) дают вклад по $1/2$. В условную степень вершины v_2 суммарный вклад ребер (v_1, v_2) и (v_2, v_3) равен 3. Если $v_1 \in V_B$, $\deg_B v_1 \geqslant 3$ и $v_2 \in T$, то в условную степень вершины v_2 ребро (v_1, v_2) дает вклад 2 и дает нулевой вклад в условную степень вершины v_1. Пусть любое другое ребро из G каждой инцидентной вершине дает единичный вклад.

Если в графе G отсутствует вершина v_2 из T, смежная с такой вершиной v_1, что $\deg v_1 = 3$, $\deg_B v_1 = 2$, и с такой вершиной v_3, что

$\deg v_3 = 2$, то

$$\sum_{v\in V(G)} \deg v \geqslant \sum_{v\in V(G)} \deg' v \geqslant 3n_B + 3|T| \geqslant 3n,$$

что противоречит условию $2k \leqslant 3n-4$. Следовательно, если в $\mathfrak{G}_4^3$ имеется граф не более чем с $\lfloor (3n-4)/2 \rfloor$ ребрами, $n \geqslant 6$, то в нем имеется вершина v_2 из T, смежная с такой вершиной v_1, что $\deg v_1 = 3$ и $\deg_B v_1 = 2$, и с вершиной v_3 степени 2 в G. Обозначим через v_4 и v_5 вершины из V_B, смежные с v_1, и через v_6 и v_7 вершины из V_B, смежные с v_3. Далее пусть G' обозначает образующий подграф на вершинах v_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$. Пусть G' содержит n' вершин и k' ребер. Положим, что произвольное ребро (v_i, v'), где $v_i \in V(G')$, $v' \notin V(G')$, $i = 1, 2, \ldots, 7$, дает вклад 2 в условную степень вершины v' и дает нулевой вклад в условную степень вершины v_i. Пусть остальные ребра из G дают одинаковые вклады каждой инцидентной вершине. В этом случае получаем $2k \geqslant 2k' + \sum\limits_{v\notin V(G')} \deg' v$. Для выполнения неравенства $d(v_2, v \in T) \leqslant 3$ необходимо, чтобы любая вершина из $T - \{v_2\}$ была смежна с вершиной из G'.

Покажем, что в графе G нет вершины, не смежной с вершиной подграфа G'. Допустим, что имеется такая вершина v. Для выполнения неравенства $d(v_2, v) \leqslant 3$ необходимо, чтобы имелась вершина v' из T, смежная с вершинами v и v_3. Но после удаления v_3 для выполнения неравенства $d(v', v_2) \leqslant 4$ необходимо, чтобы имелась вершина v'' из T, смежная с v_1 и v. Но тогда $\deg v_1 \geqslant 4$, что противоречит условию $\deg v_1 = 3$.

Итак, для произвольной вершины $v \notin V(G')$ получаем $\deg' v = 3$, если $v \in T$ и v смежна с одной вершиной из G'; $\deg' v = 4$, если $v \in T$ и v смежна с двумя вершинами из G'; $\deg' v \geqslant 4$, если $v \in V_B$ и v смежна не более чем с одной вершиной из G'; $\deg' v \geqslant 5$, если $v \in V_B$ и v смежна не менее чем с двумя вершинами из G'.

Для выполнения неравенства $d(v_1, v_2) \leqslant 4$ после удаления ребра (v_1, v_2) возможны следующие случаи:

a) $v_5 = v_6$; b) v_5 не смежна с v_6 и имеется вершина v_8 из T, смежная с v_3 и v_5; c) v_5 смежна с v_6.

Случай a). Имеем $n' \leqslant 6$ и $k' = 6$. Поэтому

$$3n - 4 \geqslant \sum_{v\in V(G)} \deg' v \geqslant 4(n_B - n' + 1) + 3(|T| - 1) + 2k'.$$

Отсюда следует, что $n_B \leqslant 4n' - 17 \leqslant 7$. Но это неравенство противоречит (8). Следовательно, в графе G нет вершины из T, смежной с такими вершинами v' и v'' из G_B, что $\deg_B v' = \deg_B v'' = 2$, $\deg v' = 3$ и $d(v', v'') \leqslant 2$ в подграфе G_B.

Случай b). Имеем $n' = 7$, $k' = 6$ и $\deg v_3 \geqslant 4$. Отсюда и из (8) следует, что $n_B \geqslant 9$.

Введем следующие обозначения:

• T' — множество вершин из $T - \{v_2\}$, смежных с двумя вершинами подграфа G';

• n'_B — число вершин из V_B, не принадлежащих подграфу G' и смежных с двумя вершинами подграфа G';

• n''_B — число вершин из V_B, не принадлежащих подграфу G' и смежных более чем с двумя вершинами подграфа G'.

Так как имеется вершина v_8 из T', то $|T'| \geqslant 1$. Для выполнения неравенств $d(v_6, v_2) \leqslant 4$ и $d(v_7, v_2) \leqslant 4$ после удаления вершины v_3 необходимо либо наличие двух таких вершин v_9 и v_{10}, что v_9 смежна с v_6 и также с v_4 или v_5, а v_{10} смежна с v_7 и также с v_4 или v_5, либо наличие одной вершины, смежной с v_4 или v_5, а также с v_7 и v_6. Поэтому либо $n''_B \geqslant 1$, либо $n'_B \geqslant 2$, либо $|T'| \geqslant 3$. Отсюда следует, что

$$3n - 4 \geqslant \sum_{v \in V(G)} \deg' v \geqslant 4(n_B - n' - n'_B - n''_B + 1) + 3(|T| - |T'| - 1) + 4|T'| + 5n'_B + 6n''_B + 2k'.$$

Поэтому $n_B + |T'| + n'_B + 2n''_B \leqslant 11$. Так как $n_B \geqslant 9$ и $|T'| \geqslant 1$, то $n''_B = 0$ и $n'_B \leqslant 1$. Поэтому $|T'| \geqslant 3$, что противоречит полученному неравенству.

Случай c). Имеем $n' = 7$ и $k' \geqslant 7$. Для выполнения неравенства $d(v_7, v_2) \leqslant 4$ после удаления вершины v_3 необходимо либо наличие ребра (v_4, v_7) или ребра (v_6, v_7), либо существование некоторой вершины, смежной с v_4 (или с v_5) и v_7. Таким образом, $4(n_B - n' + 1) + 3(|T| - 1) + 2k' + 1 \leqslant 3n - 4$, т. е. $n_B \leqslant 8$. Из (1), (7) и (8) следует, что $n_B = 8$, $|T| = 4$, $C = 0$ и все вершины из G_B имеют степень 2 в G_B и степень 3 в G. Таким образом, $k' = 7$ и произвольная вершина из G_B, не принадлежащая подграфу G', имеет условную степень 4 и смежна с некоторой вершиной из G_B. Поэтому вершина, смежная с вершинами v_4 и v_7, принадлежит множеству T, а вершины v_8 и v_9 из G_B смежны с вершинами v_4 и v_7. Отсюда следует, что подграф G_B является 8-циклом. Так как в графе G нет вершины из T, смежной с такими вершинами v' и v'' из G_B, что $d(v', v'') \leqslant 2$ в подграфе G_B, то получаем граф из $\mathfrak{G}^3_4$ с 12 вершинами, изображенный на рис. 16.

§ 6. Экстремальные графы из $\mathfrak{G}^3_5(n, 3, 4)$

Рассмотрим графы из $\mathfrak{G}^3_5$ не более чем с $(3n - 4)/2$ ребрами при $n \geqslant 6$. Покажем, что в графах из $\mathfrak{G}^3_5$ содержится не менее $(3n - 4)/2$

ребер. Допустим, что имеется граф G из $\mathfrak{G}_5^3$, содержащий не более $(3n-5)/2$ ребер, и в этом графе есть дублированные вершины степени 2. Пусть в G имеются вершины v_1 и v_2 из T, смежные с вершинами v_3 и v_4 из V_B, а также вершина v_5, смежная с v_3. Удалим вершину v_3. Для выполнения неравенства $d(v_1, v_5) \leqslant 4$ необходимо, чтобы в графе $G - \{v_3\}$ имелась простая цепь с концами в вершинах v_5 и v_4 длины не более 3. Следовательно, в графе $G - \{v_1, v_2\}$ есть простая цепь с концами в вершинах v_3 и v_4 длины не более 4. К графу $G - \{v_1, v_2\}$ добавим ребро (v_3, v_4), если такого ребра в графе G нет и в графе $G - \{v_1, v_2\} + \{v_3v_4\}$ из $\mathfrak{G}(n-2, 3, 4)$ содержится не более $(3(n-2)-5)/2$ ребер. Если граф $G - \{v_1, v_2\} + \{v_3v_4\} \in \mathfrak{G}_5^3$, то будем продолжать выполнять описанную процедуру замены дублированных вершин степени 2 на ребра. Если в графе G имеется s дублированных вершин степени 2, то после удаления этих вершин и добавления s' ребер, где $s \geqslant 2s'$, получаем граф G_1 из $\mathfrak{G}(n-s, 3, 4)$, где $s > 0$, в котором имеется не более $(3n-5-4s+2s')/2 = (3(n-s)-(s-2s')-5)/2 \leqslant (3(n-s)-5)/2$ ребер, $s' > 0$.

Допустим, что в графе G имеются не только дублированные вершины, но и вершина v_6 из T, смежная с вершинами v_7 и v_8 из V_B, где v_7 и v_8 смежны и вершина v_9 смежна с v_7. Треугольник с вершинами v_6, v_7 и v_8 имеется также и в графе G_1. Удалим вершину v_7. Для выполнения неравенства $d(v_6, v_9) \leqslant 4$ необходимо, чтобы в графе $G_1 - \{v_7\}$ имелась простая цепь с концами в v_9 и v_8 длины не более 3. Следовательно, в графе $G_1 - \{v_6\} - \{v_7v_8\}$ имеется простая цепь с концами в v_7 и v_8 длины не более 4. Поэтому граф $G_1 - \{v_6\}$ из $\mathfrak{G}(n-s-1, 3, 4)$ содержит не более $(3(n-s-1)-6)/2$ ребер. Следовательно, если в графе G_1 имеется s'' треугольников, в каждом из которых содержится вершина степени 2, то после удаления s'' вершин степени 2, принадлежащих треугольникам, из графа G_1 получаем такой граф G_2 из $\mathfrak{G}(n-s''-s, 3, 4)$, что $G_2 \notin \mathfrak{G}_5^3$. Таким образом, в графе G_2 содержится не более $(3(n-s''-s)-6)/2$ ребер, если $s'' > 0$. Но ранее мы показали, что при $n \geqslant 5$ в графах из $\mathfrak{G}\backslash\mathfrak{G}_5^3$ содержится не менее $(3n-5)/2$ ребер. Следовательно, $s'' = 0$ и в графе G_1 нет треугольника, содержащего вершину степени 2. Поэтому $G_1 \in \mathfrak{G}\backslash\mathfrak{G}_5^3$ и в графе G_1 содержится не более $(3(n-s)-5)/2$ ребер.

Множество n-вершинных графов из $\mathfrak{G}\backslash\mathfrak{G}_5^3$ с $(3n-5)/2$ ребрами при $n \geqslant 5$ состоит из образующего графа, изображенного на рис. 2, и 5-цикла. Но при замене произвольного ребра в графе на рис. 2 или 5-цикле на две дублированные вершины степени 2 мы не получим граф из $\mathfrak{G}_5^3$, и это противоречит условию, что $G \in \mathfrak{G}_5^3$. Поэтому в $\mathfrak{G}_5^3$ нет графов, содержащих не более $(3n-5)/2$ ребер.

В графах из $\mathfrak{G}_5^3$ с $(3n-4)/2$ ребрами также нет треугольников, содержащих вершину степени 2. Действительно, если в графе G из $\mathfrak{G}_5^3$ с $(3n-4)/2$ ребрами имеется треугольник, содержащий вершину

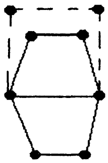
рис.1

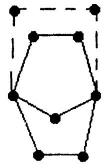
рис.2

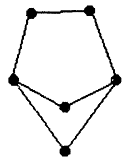
рис.3

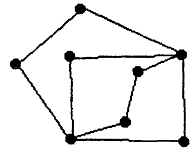
рис.4

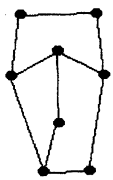
рис.5

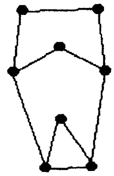
рис.6

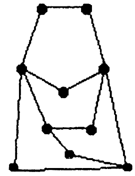
рис.7

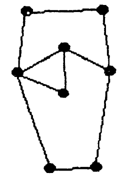
рис.8

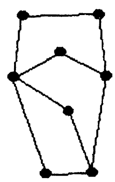
рис.9

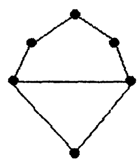
рис.10

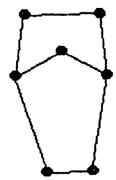
рис.11

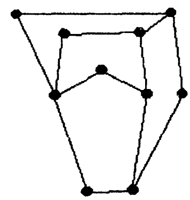
рис.12

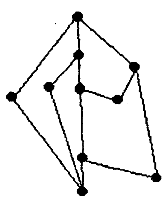
рис.13

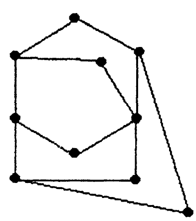
рис.14

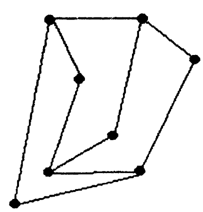
рис.15

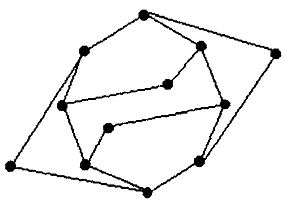
рис.16

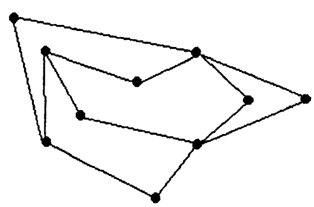
рис.17

степени 2, то, удаляя эту вершину, получим граф G' из $\mathfrak{G}(n-1,3,4)$ с $(3(n-1)-5)/2$ ребрами. Так как $G' \notin \mathfrak{G}_5^3$, то граф G' является либо 5-циклом, либо графом, изображенным на рис. 2. Добавляя к этим графам вершину степени 2 так, чтобы в полученном графе содержался треугольник, мы не получим графа из $\mathfrak{G}_5^3$, и это противоречит условию, что $G \in \mathfrak{G}_5^3$.

Так как в любом графе из $\mathfrak{G}_5^3$ содержится не менее $(3n-4)/2$ ребер, то графы, изображенные на рис. 1–16, являются экстремальными по числу входящих в них ребер для графов из $\mathfrak{G}(n,3,4)$. Таким образом, теорема доказана. Мы также показали, что в экстремальных графах из $\mathfrak{G}^3(n,3,4)$ содержится по $(3n-4)/2$ ребер при $n \geqslant 6$.

Для завершения рассмотрения задачи поиска всех экстремальных графов из $\mathfrak{G}^3(n,3,4)$ найдем экстремальные графы из $\mathfrak{G}_5^3$. Если существует граф G из $\mathfrak{G}_5^3$ с $(3n-4)/2$ ребрами, то после применения описанной процедуры замены дублированных вершин степени 2 на ребра получаем граф G' из $\mathfrak{G}(n',3,4)$ с $(3n'-4)/2$ ребрами и $G' \notin \mathfrak{G}_5^3$. Поэтому если имеется экстремальный граф G из $\mathfrak{G}_5^3$, то G может быть получен из некоторого экстремального графа из $\mathfrak{G} \backslash \mathfrak{G}_5^3$ с помощью процедуры замены некоторого ребра (v_1, v_2) на две вершины степени 2, смежные с вершинами v_1 и v_2. Если G' — простой цикл, то $G \notin \mathfrak{G}_5^3$. Если G' — образующий граф из $\mathfrak{G}(n',3,4)$ или граф, полученный из образующего графа с помощью операции дублирования пары смежных вершин степени 2, то $G \notin \mathfrak{G}_5^3$. Если G' — граф из $\mathfrak{G}_1^3$, то только из графа на рис. 15 можно получить экстремальный граф G из $\mathfrak{G}_5^3$, изображенный на рис. 17.

Замечание

Особый интерес автора к теме данной статьи был вызван следующим обстоятельством. В [7] решалась задача нахождения нижней оценки для количества ребер и перечисления экстремальных графов из $\mathfrak{G}_1(n,3,4)$ и $\mathfrak{G}_2(n,3,4)$. Однако в процессе поиска экстремальных графов из $\mathfrak{G}_2(n,3,4)$ в [7] не были представлены графы, изображенные в данной статье на рис. 4, 5, 7, 10, 12; эти графы являются экстремальными в множестве $\mathfrak{G}_2(n,3,4)$. Более того, графы H_2^{10}, H_1^{12}, H_2^{12}, изображенные в [7] на рис. 6 (стр. 78), называются экстремальными в множестве $\mathfrak{G}_2(n,3,4)$, хотя в действительности не принадлежат этому множеству.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Белоцерковский Д. Л.** Характеризация некоторых экстремальных графов с диаметром, не превосходящим 3 // Дискрет. математика. 1997. Т. 9, № 1. С. 134–146.

2. **Белоцерковский Д. Л., Вишневский В. М.** Новый алгоритм генерации остовных двусвязных подграфов для оптимизации топологии сетей передачи данных // Автоматика и телемеханика. 1997. № 1. С. 108–120.

3. **Жожикашвили В. А., Вишневский В. М.** Сети массового обслуживания: Теория и применение к сетям ЭВМ. М.: Радио и связь, 1988.

4. **Bollobás B.** A problem of the theory of communication networks // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1968. V. 19, N 1. P. 75–80.
5. **Bollobás B.** Extremal graph theory. London: Acad. Press, 1978.
6. **Caccetta L.** Extremal graphs of diameter 4 // J. Combinational Theory. Ser. B. 1976. V. 21, N 2. P. 104–115.
7. **Caccetta L.** Extremal graphs of diameter 3 // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1979. V. 28, N 1. P. 67–81.
8. **Caccetta L.** Characterization of extremal graphs of diameter 4. II // Ars Combin. 1979. V. 7. P. 301–317.
9. **Caccetta L.** On extremal graphs with given diameter and connectivity // Topics in graph theory. New York: New York Acad. Sci., 1979. P. 76–94. (Ann. New York Acad. Sci.; V. 328).
10. **Murty U. S. R.** On some extremal graphs // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1968. V. 19, N 1. P. 69–74.
11. **Usami Y.** Extremal graphs of diameter at most 6 after deleting any vertex // J. Graph Theory. 1985. V. 9, N 2. P. 221–234.
12. **Usami Y.** Extremal graphs of diameter at most 8 after deleting any vertex // Utilitas Math. 1986. V. 30. P. 153–180.
13. **Vijayan K., Murty U. S. R.** On accessibility in graphs // Sankhya. Ser. A. 1964. V. 26. P. 299–302.

Адрес автора:

Институт проблем передачи
информации РАН,
Большой Каретный пер., 19,
101447 Москва, ГСП-4,
Россия

Статья поступила
10 мая 1996 г.,
переработанный вариант —
16 марта 1998 г.