ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 1998. Серия 1. Том 5, № 2, 55–60

УДК 519.173.5

ОБ ОДНОМ АРИФМЕТИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ ГРАФОВ

Е. Н. Кузьмин

Подтверждается гипотеза Л. Н. Ивановского о делимости на 2^λ коэффициентов некоторого комбинаторным образом определяемого для любого конечного графа G целочисленного многочлена $f(\vec{x}, G)$ (функции Ивановского, λ — цикломатическое число графа G). Эта гипотеза была высказана им в связи с исследованиями по алгебраической топологии (теории рационально симплектических кобордизмов) [3, 4].

Пусть G — конечный неориентированный граф, который может содержать кратные ребра и петли, $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ — множество вершин, m — число ребер, κ — число связных компонент графа G. Число $\lambda = m - n + \kappa$ называют *цикломатическим числом* [2] (или *циклическим рангом* [5]) графа G. Граф Γ называется ***подграфом*** графа G, если вершины и ребра графа Γ принадлежат G. Подграф $\Gamma \subseteq G$ называется *суграфом* графа G, если $V(\Gamma) = V(G)$. Граф Γ называется *нечетным*, если степени всех его вершин нечетны. Суграф $\Gamma \subseteq G$ назовем *допустимым для* G, если он является нечетным графом. Множество всех допустимых суграфов для G обозначим через $\mathscr{M} = \mathscr{M}(G)$. Критерий существования допустимых суграфов достаточно прост и состоит в следующем.

Предложение 1. *$\mathscr{M}(G) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда каждая связная компонента G имеет четное число вершин.*

Доказательство. Пусть $G_1, \dots, G_\kappa$ — связные компоненты графа G. Если Γ — допустимый суграф для G, то Γ разлагается в несвязное объединение $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \Gamma_\kappa$, где $\Gamma_i (1 \leqslant i \leqslant \kappa)$ — допустимые суграфы для G_i. Очевидно, верно и обратное: объединение допустимых суграфов Γ_i для G_i будет допустимым суграфом для G. Таким образом, достаточно ограничиться случаем, когда G — связный граф.

Пусть G связен и Γ — его допустимый суграф. Так как удаление или добавление петли или двух кратных ребер в Γ не меняет четности степеней вершин, то можно считать, что Γ не содержит петель и кратных ребер, т. е. Γ является обыкновенным графом. Если $d_\Gamma(v_i)$ — степень вершины v_i в Γ, то из формулы $m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_\Gamma(v_i)$ следует, что число n должно быть четным. Обратно, пусть число n четно. Если связный граф G содержит цикл, то любое из ребер этого цикла можно удалить, не нарушая связности, получая связный суграф G', и любой допустимый суграф для G' будет допустимым для G. Используя индукцию по числу ребер $m = m(G)$, приходим к случаю, когда G не содержит циклов, т. е. является деревом.

Меняя нумерацию вершин в G, рассмотрим простой путь (цепь) $P = v_0v_1\dots v_s$ в G максимальной длины s. Без ограничения общности можем считать, что $s > 1$ (при $s = 1$ граф G совпадает с цепью v_0v_1 и сам является нечетным). Концы v_0, v_s этой цепи будут, очевидно, висячими вершинами. Из максимальности длины P следует, что либо вершина v_1 имеет степень 2, либо к v_1 примыкает висячая вершина v_0', отличная от v_0. Во втором случае, удаляя из G ребра (v_0, v_1), (v_0', v_1) и вершины v_0, v_0', получим связный граф G_0 с $n-2$ вершинами.

Используя индукцию по числу вершин G, найдем в G_0 допустимый суграф $\Gamma_0 \in \mathscr{M}(G_0)$. Присоединяя к вершине $v_1 \in V(\Gamma_0)$ ребра (v_1, v_0) и (v_0', v_1) с концами v_0' и v_0, получим допустимый суграф $\Gamma \in \mathscr{M}(G)$. Если же $d_G(v_1) = 2$, то, удаляя из G ребро (v_1, v_2), получим суграф G', являющийся несвязной суммой ребра (v_0, v_1) и связного графа G_0, натянутого на вершины $v_2, \dots, v_n$. Снова G_0 удовлетворяет предположению индукции по числу вершин. Предложение 1 доказано.

Пусть $\Gamma \in \mathscr{M}(G)$, $d_\Gamma(v_i) = 2k_i(\Gamma) + 1$ и $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Многочлен $f(\vec{x}, G) = \sum_{\Gamma\in\mathscr{M}(G)} \prod_{i=1}^{n} (4x_i - 1)^{k_i(\Gamma)}$ назовем *функцией Ивановского* графа G. Если $\mathscr{M}(G) = \varnothing$, то полагаем $f(\vec{x}, G) = 0$. Если $f_1(\vec{x})$, $f_2(\vec{x})$ — целочисленные многочлены, c — натуральное число, то, как принято в теории сравнений [1], пишем $f_1(\vec{x}) \equiv f_2(\vec{x}) \pmod c$, если все коэффициенты многочлена $f_1(\vec{x}) - f_2(\vec{x})$ делятся на c.

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы и была высказана в качестве гипотезы Л. Н. Ивановским (частное сообщение).

Теорема 1. *Если G — произвольный конечный граф, то $f(\vec{x}, G) \equiv 0 \pmod{2^\lambda}$, где $\lambda = m - n + \kappa$ — цикломатическое число графа G.*

Доказательство. Если G разлагается в несвязное объединение $G_1 \cup G_2$ подграфов G_1, G_2 (необязательно связных), то при подходящей нумерации вершин в G_1 и G_2 будем иметь $f(\vec{x}, G) = f(\vec{x}_1, G_1)f(\vec{x}_2, G_2)$,

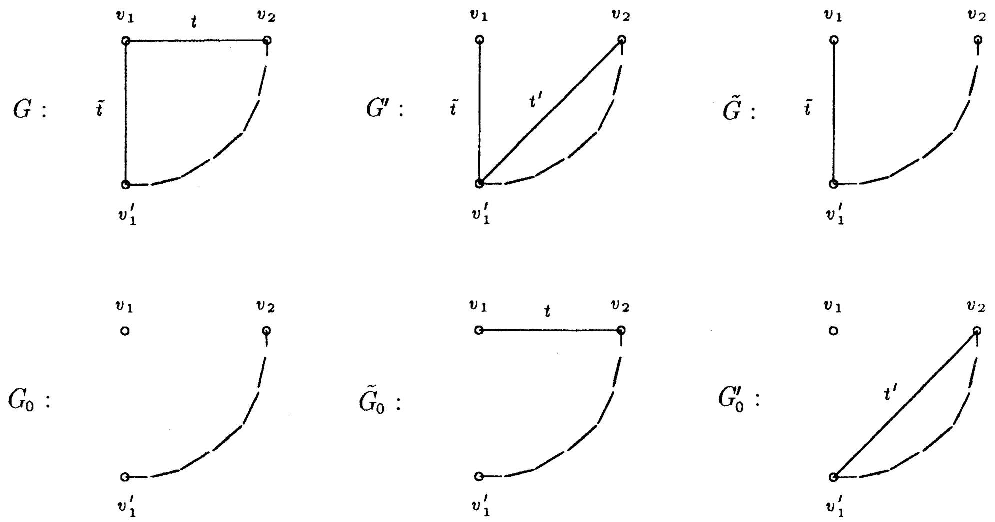

Рис. 1

где $f(\vec{x}_i, G_i)$ — функция Ивановского графа G_i, $i = 1, 2$. Так как функции m, n, κ и λ аддитивны относительно операции несвязного объединения графов, то из сравнений $f(\vec{x}_i, G_i) \equiv 0 \pmod{2^{\lambda_i}}$, $i = 1, 2$, следует сравнение $f(\vec{x}, G) \equiv 0 \pmod{2^{\lambda}}$, или, короче, $f(\vec{x}) \equiv 0 \pmod{2^{\lambda}}$. Таким образом, без ограничения общности можем предполагать, что граф G связен.

Далее воспользуемся индукцией по λ. Если $\lambda = 0$, то сравнение $f(\vec{x}) \equiv 0 \pmod{2^{\lambda}}$ тривиально. Пусть теорема уже доказана для $\lambda \leqslant \lambda_0$ ($\lambda_0 \geqslant 0$) и G — связный граф такой, что $\lambda(G) = \lambda_0 + 1$. Так как $\lambda(G) > 0$, то G не является деревом; удалив из G некоторое ребро $t = (v_i, v_j)$, можно получить связный граф $\widetilde{G}$ (с тем же множеством вершин), для которого справедливо предположение индукции: $\tilde{f}(\vec{x}) \equiv 0 \pmod{2^{\lambda_0}}$. Если $i = j$, т. е. t — петля, то все допустимые суграфы графа G либо содержатся в $\widetilde{G}$, либо содержат петлю t и некоторый суграф $\Gamma \in \mathscr{M}(\widetilde{G})$; в этом случае соответствующие члены дают вклад $(4x_i - 1)\tilde{f}(\vec{x})$ в $f(\vec{x})$. Поэтому $f(\vec{x}) = 4x_i\tilde{f}(\vec{x})$ и справедливо даже более сильное, чем утверждает теорема, сравнение $f(\vec{x}, G) \equiv 0 \pmod{2^{\lambda+1}}$.

Пусть $i \neq j$ (для определенности полагаем $i = 1$ и $j = 2$), $v_1 v_1' \dots v_2$ — какой-либо кратчайший путь в $\widetilde{G}$, соединяющий v_1 и v_2, а d — длина этого пути. Если $d = 1$, то t — кратное ребро. Пусть t' — еще одно ребро, инцидентное вершинам v_1, v_2, $G_0 = G \setminus \{t, t'\}$, а $f_0, \tilde{f}$ — функции Ивановского графов G_0 и $\widetilde{G}$. По предположению индукции имеем $\tilde{f} \equiv 0 \pmod{2^{\lambda_0}}$ и если $\lambda_0 > 0$, то $f_0 \equiv 0 \pmod{2^{\lambda_0 - 1}}$. Допустимые суграфы в G либо не содержат ребер t, t' и лежат в G_0, либо содержат в точности одно из этих ребер, либо оба ребра t, t'. Соответственно $f(\vec{x})$ разлагается в сумму членов f_0, $2(\tilde{f} - f_0)$ и $(4x_1 - 1)(4x_2 - 1)f_0$. Отсюда следует, что $f(\vec{x}) = 2\tilde{f}(\vec{x}) + 4(4x_1x_2 - x_1 - x_2)f_0(\vec{x}) \equiv 0 \pmod{2^{\lambda_0+1}}$.

Далее можем предполагать, что G — обыкновенный граф и $d > 1$, т. е. вершины v_1, v_2 несмежны в $\widetilde{G}$, $v_1' \neq v_1$ и $v_1' \neq v_2$. Добавим вспомогательное ребро $t' = (v_1', v_2)$ и обозначим $(v_1, v_1') = \tilde{t}$, $G' = \widetilde{G} \cup t'$, $G_0 = \widetilde{G} \setminus \tilde{t}$, $\widetilde{G}_0 = G_0 \cup t$, $G_0' = G_0 \cup t'$. Интересующие нас фрагменты соответствующих графов изображены на рис. 1.

Любой допустимый суграф Γ графа G либо лежит в $\widetilde{G}$, либо содержит ребро t и не содержит ребро $\tilde{t}$, либо содержит оба ребра $t, \tilde{t}$. В последнем случае графу Γ поставим в соответствие граф $\Gamma' \in \mathscr{M}(G_0)$, который получается из Γ удалением ребер $t, \tilde{t}$ и добавлением ребра t'. Степени всех вершин в Γ' совпадают с их степенями в Γ за исключением вершины v_1, степень которой в Γ на 2 больше чем в Γ'. Соответственно получаем $f = \tilde{f} + (\tilde{f}_0 - f_0) + (4x_1 - 1)(f_0' - f_0)$, где $f_0, f_0', \tilde{f}$ и т. д. — функции Ивановского графов G с теми же пометками (т. е. $G_0, G_0', \widetilde{G}$ и т. д.). Аналогично $f' = \tilde{f} + (f_0' - f_0) + (4x_1' - 1)(\tilde{f}_0 - f_0)$. Следовательно, $f - f' = 2(2x_1 - 1)f_0' - 2(2x_1' - 1)\tilde{f}_0 + 4(x_1' - x_1)f_0$.

По предположению индукции $\tilde{f}_0 \equiv 0 \pmod{2^{\lambda_0}}$, и если $\lambda_0 > 0$, то $f_0 \equiv 0 \pmod{2^{\lambda_0 - 1}}$. Если граф G_0' несвязен, то, используя аддитивность функции λ и дополнительную индукцию по числу вершин, можно считать, что $f_0' \equiv 0 \pmod{2^{\lambda}}$. Если G_0' связен, то $\lambda(G_0') = \lambda_0$ и $f_0' \equiv 0 \pmod{2^{\lambda_0}}$.

Итак, в любом случае $f \equiv f' \pmod{2^{\lambda}}$. Так как G' отличается от G тем, что ребро t заменено на ребро t' и длина пути $v_1' \dots v_2$ на 1 меньше, чем длина d пути $v_1 \dots v_2$, то остается применить индукцию по d (при $d = 2$ ребро $t' = (v_1', v_2)$ в G' оказывается кратным). Теорема доказана.

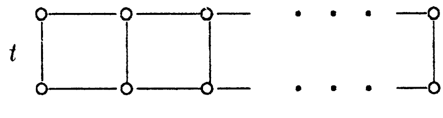

Рис. 2

Замечание. Такие же индукционные соображения показывают, что аналогичным свойством делимости обладает и родственная функция $f_+(\vec{x}) = \sum\limits_{\Gamma \in \mathscr{M}} \prod\limits_{i=1}^{n} (4x_i + 1)^{k_i(\Gamma)}$, т. е. $f_+(\vec{x}) \equiv 0 \pmod{2^{\lambda}}$.

Пример. Рассмотрим граф G, изображенный на рис. 2, с $2(\lambda + 1)$

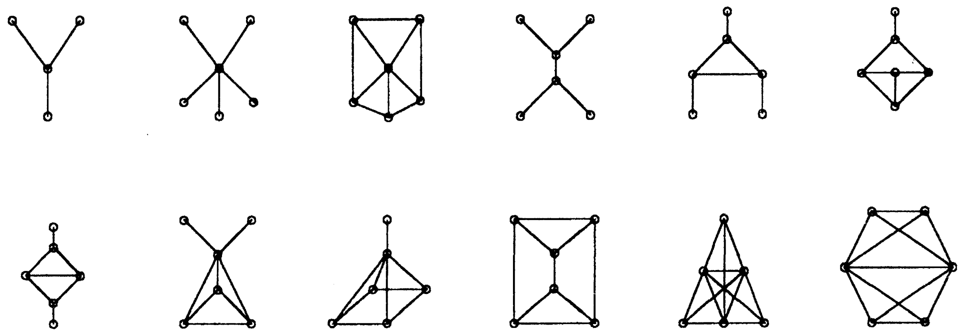

Рис. 3

вершинами. Ясно, что $\lambda(G) = \lambda$. Убедимся в том, что свободный член соответствующего многочлена $f(\vec{x})$ равен 2^λ. Действительно, при $\lambda = n \geqslant 0$ этот граф обозначим через G_n, а граф $G_{n+1} \setminus t$ — через G'_n, и пусть a_n, b_n — свободные члены соответствующих многочленов $f_n(\vec{x})$, $f'_n(\vec{x})$. Легко видеть, что a_n, b_n удовлетворяют системе рекуррентных соотношений $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$, $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$ с начальными условиями $a_0 = b_0 = 1$. Отсюда индукцией по n получаем $a_n = b_n = 2^n$.

Таким образом, показатель λ в формулировке теоремы в общем случае неулучшаем. Вместе с тем из доказательства теоремы следует, что если граф G содержит k петель, то показатель λ в ее формулировке можно заменить на $\lambda + k$.

В заключение приведем перечень связных нечетных графов порядка $n \leqslant 6$ (без кратных ребер и петель). Это полные графы K_2, K_4, K_6, полный двудольный граф $K_{3,3}$, а также графы, изображенные на рис. 3.

Автор благодарен Л. Н. Ивановскому за постановку интересного вопроса и Л. С. Мельникову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Виноградов И. М.** Основы теории чисел. М.: Наука, 1965.
2. **Зыков А. А.** Теория конечных графов. Новосибирск: Наука, 1969.
3. **Ивановский Л. Н.** Об одном семействе образующих кольца рационально симплектических кобордизмов // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 3. С. 112-120.

4. **Ивановский Л. Н.** О существовании в кольце рационально симплектических кобордизмов нестонговых элементов // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 4. С. 97-101.

5. **Tutte W. T.** Graph Theory. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publ. Co., 1984. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications; V. 21).

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
5 ноября 1996 г.,
переработанный вариант —
16 марта 1998 г.