ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 1998. Серия 1. Том 5, № 2, 61–77

УДК 519.14

О СТРУКТУРЕ СВЯЗНЫХ ЛОКАЛЬНО $GQ(3,9)$-ГРАФОВ*)

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Если $\mathscr{F}$ — некоторый класс графов, то граф Γ называется локально $\mathscr{F}$-графом, если окрестность каждой вершины графа Γ принадлежит $\mathscr{F}$. Пусть $GQ(s,t)$ — точечный граф обобщенного четырехугольника порядка (s,t). Доказано, что любой связный локально $GQ(3,9)$-граф изоморфен графу Маклафлина.

Введение

Геометрия G ранга 2 — это множество точек $\mathscr{P}$ и некоторая совокупность $\mathscr{B}$ подмножеств (блоков) из $\mathscr{P}$. Точки, принадлежащие одному блоку, называются (*попарно*) *коллинеарными*. *Вычетом* G_a геометрии G в точке a называется геометрия с множеством точек $\mathscr{P}_a$, коллинеарных с a, и множеством блоков $\mathscr{B}_a = \{B - \{a\} \mid a \in B \in \mathscr{B}\}$.

Точечный граф $\Gamma = \Gamma(G)$ — это граф с множеством вершин $\mathscr{P}$, в котором две различные вершины смежны тогда и только тогда, когда они коллинеарны. Диаметр геометрии, связность, расстояние между двумя точками и т. п. в G соответствуют этим понятиям в графе $\Gamma(G)$. Геометрия G называется *треугольной*, если любые три попарно коллинеарные точки лежат в некотором блоке. Легко понять, что геометрия G треугольна тогда и только тогда, когда каждый подграф $\Gamma(G_a)$ индуцирован точечным графом $\Gamma = \Gamma(G)$. В этом случае говорят, что Γ является локально $\{\Gamma(G_a)\}$-графом.

Если $a \in \mathscr{P}$, $B \in \mathscr{B}$ и $a \notin B$, то пара (a,B) называется *антифлагом.* Число точек из B, коллинеарных с a, обозначается через $f(a,B)$. Геометрия G называется *φ-однородной*, если $f(a,B) = 0$ или $f(a,B) = \varphi$ для любого антифлага (a,B); G называется *сильно φ-однородной*, если $f(a,B) = \varphi$ для любого антифлага (a,B). Ниже мы будем рассматривать только такие геометрии, в которых любые два блока пересекаются не более чем по одной точке; при этом блоки будем называть *прямыми.*

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–00488).

В этом случае геометрия называется *частичным линейным пространством.* Подграф Λ частичного линейного пространства называется *гиперовалом,* если любая прямая пересекает Λ по 0 или 2 точкам.

Геометрия называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой и геометрия является сильно α-однородной (обозначение $pG_\alpha(s,t)$).

Геометрия $pG_1(s,t)$ называется *обобщенным четырехугольником* порядка (s,t) и обозначается $GQ(s,t)$. Далее, геометрия $pG_{s+1}(s,t)$ называется *2-схемой Штейнера,* а $pG_t(s,t)$ — *сетью.* Гиперовал в $GQ(s,t)$ — это регулярный подграф степени $t+1$ с четным числом вершин, в котором нет треугольников. Геометрия $G^{\mathrm{T}} = (\mathscr{B},\mathscr{P})$ называется *дуальной* к геометрии G.

Геометрия EpG_α называется *расширением* α-частичных геометрий, если EpG_α связна и существуют s,t такие, что каждый вычет EpG_α есть геометрия $pG_\alpha(s,t)$. Если мы хотим указать параметры s,t, то геометрию будем обозначать $EpG_\alpha(s,t)$. Если $\alpha=1$, то геометрию EpG_1 будем обозначать через EGQ.

Легко понять,что если $f(a,B)\neq 0$ для антифлага (a,B) в EpG_α, то $f(a,B)\geqslant \alpha+1$, и геометрия EpG_α треугольна только тогда, когда она $(\alpha+1)$-однородна.

Коклика из $1+st/\alpha$ точек в $pG_\alpha(s,t)$ называется *овоидом* (обобщение овала). Заметим, что дуальная геометрия к $pG_\alpha(s,t)$ является α-частичной геометрией порядка (t,s). Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=(s-1)+t(\alpha-1)$ и $\mu=\alpha(t+1)$, причем геометрия однозначно восстанавливается по своему точечному графу, если $\alpha=1$. Точечный граф обобщенного четырехугольника порядка (s,t) будем обозначать также через $GQ(s,t)$. Таким образом, изучение треугольных расширений обобщенных четырехугольников $GQ(s,t)$ эквивалентно изучению локально $GQ(s,t)$-графов.

Будем использовать следующие обозначения. Пусть $\Gamma=\Gamma(G)$ — точечный граф геометрии G, $\Gamma_i(a)$ — подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Если из контекста ясно, о каком графе Γ идет речь, то вместо $\Gamma_1(a)$ будем писать $[a]$, а через $a^\perp$ обозначим $\{a\}\cup[a]$. *Антиокрестность* вершины a — это подграф, индуцированный на $\Gamma-a^\perp$. Если Λ — подграф из Γ, то через $\Lambda(a)$ обозначим пересечение Λ с окрестностью вершины a из Γ, а через $K_i(\Lambda)$ — множество всех вершин из $\Gamma-\Lambda$, смежных с i вершинами из Λ. Для вершины x из Γ через $K_i^x(\Lambda)$ обозначим $K_i(\Lambda)\cap[x]$. Полный двудольный граф с долями порядка m и n назовем (m,n)-подграфом.

В [5] проведена редукция однородных расширенных частичных геометрий с короткими прямыми к локально $GQ(3,t)$-графам и получено описание локально $GQ(3,5)$-графов. Локально $GQ(3,3)$-графы изучены первым автором в [2] (и независимо Д. Пасечником с помощью ЭВМ [6]). Локально $GQ(3,9)$-графы описаны Д. Пасечником с применением компьютерной системы GAP [7]. В данной работе получена чисто комбинаторная классификация расширенных частичных геометрий $EGQ(3,9)$.

Теорема. *Если Γ — связный локально $GQ(3,9)$-граф, то Γ является графом Маклафлина, т. е. единственным сильно регулярным графом с параметрами* $(275,112,30,56)$.

Следствие. *Пусть геометрия G является расширением обобщенного четырехугольника $GQ(3,9)$. Тогда G является геометрией вершин и 5-клик графа Маклафлина.*

Так как для графа Маклафлина и графа $GQ(3,9)$ достигается равенство в условии Крейна [1], то окрестности и антиокрестности вершин в этих графах сильно регулярны. Опишем схему доказательства теоремы. В § 1 получены некоторые вспомогательные результаты. В § 2 найдены гиперовалы в $GQ(3,9)$. В § 3 рассмотрены локально $GQ(3,9)$-графы и доказано следствие.

Пусть Γ — локально $GQ(3,9)$-граф. Тогда каждая клика максимального порядка в Γ состоит из 5 точек, и такие клики мы будем называть *блоками*. Таким образом, если X — блок и $x \in X$, то $X - \{x\}$ — прямая из обобщенного четырехугольника $[x]$.

§ 1. Предварительные результаты

Приведем несколько вспомогательных результатов, используемых в дальнейшем.

Лемма 1.1. *Пусть Γ — локально $GQ(s,t)$-граф. Тогда каждая максимальная клика в Γ состоит из $s+2$ точек (такие клики будем называть блоками), каждая точка лежит в $(t+1)(st+1)$ блоках, любые две смежные точки лежат в $t+1$ общих блоках и любые два блока пересекаются не более чем по двум точкам.*

Все утверждения леммы 1.1 следуют из определения расширения и свойств обобщенного четырехугольника [8].

Лемма 1.2. *Пусть Λ — гиперовал в обобщенном четырехугольнике $GQ(s,t)$ и $\mu = |\Lambda|$. Тогда μ четно и $\mu_* \leqslant \mu \leqslant \mu^*$, где $\mu_* = \max\{2(t+1), (s+1)(t+2-s)\}$ и $\mu^* = 2(st+1)$. Далее, если $\mu = \mu_*$ ($\mu = \mu^*$), то для любой точки $a \notin \Lambda$ имеется точно $(t+2-s)/2$ прямых из $a^\perp$ (любая прямая), пересекающих Λ по двум точкам.*

Доказательство. Оценки для μ и четность μ следуют из лемм 3.9 и 3.11 [3]. Если $\mu = \mu_*$, то из доказательства леммы 3.11 [3] следует, что если $a \notin \Lambda$, то число прямых из $a^\perp$, не пересекающих Λ, равно $(s+t)/2$.

Если $\mu = \mu^*$, то по утверждению (b) леммы 3.9 [3] каждая прямая пересекает Λ (по двум точкам). Лемма доказана.

В леммах 1.3 и 1.4 предполагается, что Σ — точечный граф для $GQ(3,9)$.

Лемма 1.3. *Пусть a, b — не смежные точки из Σ. Тогда*

(1) *каждая точка x, не принадлежащая $a^\perp \cup b^\perp$, смежна точно с четырьмя точками из $[a] \cap [b]$;*

(2) *если Δ является $(4,4)$-подграфом из Σ, то каждая точка из $\Sigma - \Delta$ смежна с двумя точками из Δ.*

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что граф $\Sigma - x^\perp$ сильно регулярен с параметрами (81, 20, 1, 6).

Пусть выполнены условия утверждения (2) леммы, $K_i = K_i(\Delta)$ и $x_i = |K_i|$. Тогда $\sum\limits_{i=0}^{8} x_i = 104$, $\sum\limits_{i=1}^{8} ix_i = 208$ и $\sum\limits_{i=1}^{8} \binom{i}{2} x_i = 104$. Вычтем из суммы первого и третьего уравнений второе. Тогда получим $x_0 + \sum\limits_{i=2}^{8} \binom{i-1}{2} x_i = 0$. Следовательно, $x_1 + x_2 = 104$, $x_1 + 2x_2 = 208$. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Если Δ — коклика из Σ, то $|\Delta| \leqslant 21$.*

Доказательство. Из оценки Цветковича [1] следует $|\Delta| \leqslant s^2(st+1)/(s+t)$. Для $GQ(3,9)$ мы получаем утверждение леммы.

Лемма 1.5. *Пусть геометрия G является расширенным обобщенным четырехугольником, (a, B) — такой антифлаг из G, что $a^\perp$ пересекает B, и $\mathscr{B}(a, B)$ — множество блоков из $a^\perp$, пересекающих B не менее чем по двум точкам. Тогда*

(1) *$|X \cap B| = 2$ и пересечение $X \cap Y \cap B$ пусто для любых различных $X, Y \in \mathscr{B}(a, B)$;*

(2) *если $G = EGQ(3,9)$, a, b — коллинеарные точки из G и $S = a^\perp - \bigcup\limits_{\{a,b\} \subset B \in \mathscr{B}(a,B)} B$, то $b^\perp \cap S$ — гиперовал частичного линейного пространства Λ, индуцированного G на S.*

Доказательство. Пусть $c \in B \cap a^\perp$. Тогда вычет G_c является обобщенным четырехугольником. Поэтому в $c^\perp$ найдется блок X, пересекающий B не менее чем по двум точкам. Так как $|X \cap B| = 2$, то первая часть утверждения (1) доказана. Если $c \in X \cap Y$ для различных $X, Y \in \mathscr{B}(a, B)$, то G_c содержит две точки, лежащие на разных прямых X, Y и попавшие на прямую B. Противоречие.

Пусть выполнены условия утверждения (2). Тогда S совпадает с множеством точек из G_a, находящихся на расстоянии 2 от b. Так как точка b смежна с двумя точками в любом блоке из $a^\perp$, не содержащем b, то Λ — частичное линейное пространство с тремя точками на каждой прямой. Пусть $L \in \mathscr{B}(\Lambda)$ и b коллинеарна с точкой x из L. По утверждению (1) имеем $|b^\perp \cap L| = 2$. Лемма доказана.

§ 2. Гиперовалы в $GQ(3,\ 9)$

Пусть Σ — точечный граф $GQ(3,\ 9)$, Λ — регулярный подграф без треугольников степени 10 с четным числом вершин μ. Положим $K_i = K_i(\Lambda)$, $x_i = |K_i|$. Если вершина a принадлежит $\Sigma - \Lambda$, то по строению обобщенного четырехугольника следует, что подграф $[a] \cap \Lambda$ является объединением (быть может, пустого) множества изолированных ребер (паросочетанием в графе Λ). Поэтому $x_i = 0$ для нечетных i и для четных $i > 20$.

Предложение 2.1. *Справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) $\mu = 32$ *и* $\Sigma - \Lambda = K_8$;

(2) $\mu = 40,\ x_{20} = 2, x_4 = 10, x_{12} = 60,\ K_4 = [a] \cap [b]$ *для точек* a, b *из* K_{20} *и* $\Lambda = ([a] - [b]) \cup ([b] - [a])$;

(3) $\mu = 56$ *и* $\Sigma - \Lambda = K_{20}$.

Доказательство. По лемме 1.2 имеем $(s+1)(t+2-s) \leqslant \mu \leqslant 2(st+1)$. В рассматриваемом случае $32 \leqslant \mu \leqslant 56$. Подсчитав число ребер между точками из Λ и точками из $\Sigma - \Lambda$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{10} x_{2i} = 112 - \mu, \\ \sum\limits_{i=1}^{10} 2i x_{2i} = 20\mu. \end{cases} \tag{1}$$

Прямую, пересекающую Λ, назовем *секущей,* а в противном случае — *внешней прямой.* Будем говорить, что внешняя прямая имеет тип (i, j, l, m), если она содержит по одной точке из K_i, K_j, K_l и K_m.

Лемма 2.2. *Если прямая L из Σ пересекает Λ и две точки из $L - \Lambda$ лежат в K_i и K_j, то*

(1) $i + j = \mu - 16$ *и* $ix_i = jx_j$;

(2) *если* $6 \leqslant i < j$, *то* $x_i > j/2$ *и* $x_j > i/2$;

(3) *если* $10 \leqslant i = j$, *то* $x_i > i$;

(4) *если* K_0 — *коклика (это так при* $\mu > 36$), *то* $x_0 \leqslant 28 - \mu/2$.

Доказательство. Каждая точка из $\Lambda - L$ смежна с единственной точкой из L. Поэтому $(i-2)+(j-2)+2\cdot 9 = \mu-2$ и $i+j = \mu-16$. Подсчитав число секущих, содержащих точки из K_i и K_j, получим второе равенство из утверждения (1) леммы.

Докажем утверждение (2). Так как каждая вершина из K_j смежна по крайней мере с $j/2$ вершинами из K_i, то $x_i \geqslant j/2$. В этих нестрогих неравенствах равенства достигаются одновременно, и в случае $x_i = j/2$ мы получим полный двудольный граф $K_i \cup K_j$. Противоречие с леммой 1.3.

Пусть $i = j \geqslant 10$. Вершины в подграфе K_i назовем смежными, если они лежат на общей секущей. Тогда K_i — регулярный граф без треугольников степени $i/2$. Отсюда следует, что $x_i \geqslant i$. В случае $x_i = i$ подграф K_i является полным двудольным графом, в каждой доле которого содержится $i/2$ вершин. Противоречие с леммой 1.3. Утверждение (3) леммы доказано.

Пусть K_0 — коклика, $\mathscr{L}$ — множество прямых, пересекающих K_0, $l = |\mathscr{L}|$. Так как каждая вершина из K_0 лежит на $t+1$ прямой из $\mathscr{L}$, а на каждой прямой из $\mathscr{L}$ найдется единственная точка из K_0, то $x_0 = l/(t+1)$. Заменяя l на число внешних прямых, получим верхнюю оценку для x_0. Число всех прямых в Σ равно $(t+1)(st+1)$, а число секущих совпадает с числом ребер гиперовала, равным $\mu(t+1)/2$. Поэтому число внешних прямых равно $(t+1)(st+1-\mu/2)$ и $x_0 \leqslant st+1-\mu/2$. В рассматриваемом случае $x_0 \leqslant 28-\mu/2$. Наконец, если $\mu \geqslant 36$, то K_0 — коклика. Лемма 2.2 доказана.

Заметим, что с помощью утверждения (1) леммы 2.2 можно упростить систему уравнений (1). В первом уравнении можно осуществить подстановку по формуле $x_j = ix_i/j$, получая $x_i + x_j = (i+j)x_i/j = (\mu-16)x_i/j$. Во втором уравнении достаточно заменить jx_j на ix_i. При этом $x_i = 0$ при $0 < i < \mu - 36$.

Лемма 2.3. *Если $\mu \neq 36$ или 40, то выполняется одно из утверждений (1) или (3) из заключения предложения 2.1.*

Доказательство. Рассмотрим по порядку возможные значения μ. Если $\mu = 32$, то по лемме 1.2 каждая точка, не принадлежащая Λ, лежит в K_8 и выполняется утверждение (1) из заключения предложения.

Если $\mu = 34$, то система (1) принимает вид

$$\begin{cases} x_0 + \frac{9}{8}x_2 + \frac{9}{7}x_4 + \frac{9}{6}x_6 + \frac{9}{5}x_8 = 78, \\ x_2 + 2x_4 + 3x_6 + 4x_8 = 170. \end{cases} \tag{2}$$

Умножим первое уравнение на 2, вычтем из полученного уравнения второе. В результате получим $x_0 + \frac{5}{8}x_2 + \frac{2}{7}x_4 - \frac{1}{5}x_8 = -7$. Найдя отсюда

$\frac{1}{5}x_8$ и подставив в первое уравнение (2), получим $10x_0+\frac{27}{4}x_2+\frac{27}{7}x_4+\frac{3}{2}x_6 = 15$. Значит, $x_0 = x_2 = x_4 = 0$. Поэтому $x_6 = 10$ и $x_8 = 35$. Теперь по лемме 2.2 имеем $x_{10} = 28$, $x_{12} = 5$.

Пусть $x \in K_{12}$. Тогда каждая секущая из $x^\perp$ содержит точку из K_6. Если L — внешняя прямая из $x^\perp$, то L также содержит точку из K_6. Поэтому $K_6 \subset [x]$. Отсюда следует, что $K_6 \cup K_{12}$ является полным двудольным (5,10)-подграфом, что противоречит лемме 1.3.

Пусть $\mu = 38$. Тогда система (1) принимает вид

$$\begin{cases} x_0 + \dfrac{11}{10}x_2 + \dfrac{11}{9}x_4 + \dfrac{11}{8}x_6 + \dfrac{11}{7}x_8 + \dfrac{11}{6}x_{10} = 74, \\ x_2 + 2x_4 + 3x_6 + 4x_8 + 5x_{10} = 190. \end{cases} \tag{3}$$

Так как в первом уравнении все слагаемые целые, а по утверждению (4) леммы 2.2 $x_0 \leqslant 9$, то сумма $\frac{11}{10}x_2 + \frac{11}{9}x_4 + \frac{11}{8}x_6 + \frac{11}{7}x_8 + \frac{11}{6}x_{10}$ более 65 и кратна 11, т. е. эта сумма равна 66. Поэтому $x_0 = 8$. Теперь первое уравнение преобразуется к виду $\frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{9}x_4 + \frac{1}{8}x_6 + \frac{1}{7}x_8 + \frac{1}{6}x_{10} = 6$.

С помощью второго уравнения из (1) и нового уравнения получаем $-2x_2 - \frac{4}{3}x_4 - \frac{3}{4}x_6 - \frac{2}{7}x_8 = 10$. Противоречие.

При $\mu = 42$ система (1) принимает вид

$$\begin{cases} x_0 + \dfrac{13}{10}x_6 + \dfrac{13}{9}x_8 + \dfrac{13}{8}x_{10} + \dfrac{13}{7}x_{12} = 70, \\ 3x_6 + 4x_8 + 5x_{10} + 6x_{12} = 210. \end{cases}$$

По утверждению (4) леммы 2.2 $x_0 \leqslant 7$. Так как в первом уравнении все слагаемые целые, а по утверждению (4) леммы 2.2 $x_0 \leqslant 7$, то сумма $x_0 + \frac{13}{10}x_6 + \frac{13}{9}x_8 + \frac{13}{8}x_{10} + \frac{13}{7}x_{12}$ более 60 и кратна 13, т. е. эта сумма равна 65. Поэтому $x_0 = 5$. Теперь первое уравнение приводится к виду $\frac{1}{10}x_6 + \frac{1}{9}x_8 + \frac{1}{8}x_{10} + \frac{1}{7}x_{12} = 5$. Как и в предыдущем случае, получаем $-\frac{6}{5}x_6 - \frac{2}{3}x_8 - \frac{1}{4}x_{10} = 0$. Отсюда следует, что $x_6 = x_8 = x_{10} = 0$. Следовательно, $x_{12} = 35$ и $x_{14} = 30$. Далее, для каждой внешней прямой L имеем включение $L \subset K_0 \cup K_{12} \cup K_{14}$. Но если L — внешняя прямая, пересекающая K_{12}, то на ней имеется не более 40 точек. Противоречие.

Пусть $\mu = 44$. Тогда система (1) принимает вид

$$\begin{cases} x_0 + \dfrac{14}{10}x_8 + \dfrac{14}{9}x_{10} + \dfrac{14}{8}x_{12} + x_{14} = 68, \\ 8x_8 + 10x_{10} + 12x_{12} + 7x_{14} = 440. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на 7 и вычитая из полученного уравнения второе, получаем $7x_0 + \frac{9}{5}x_8 + \frac{8}{9}x_{10} + \frac{1}{4}x_{12} = 36$.

Сначала предположим, что $x_8 \neq 0$. Тогда по утверждению (2) леммы 2.2 имеем $x_8 > 10$. Поэтому $x_8 = 15$ или $x_8 = 20$. В последнем случае $x_0 = x_{10} = x_{12} = 0$, $x_{14} = 40$ и $x_{20} = 8$. Поэтому каждая внешняя прямая имеет тип (8, 8, 14, 14). Но в этом случае $\Lambda' = K_{14}$ — гиперовал на 40 точках, причем $K_{20} \subset K_0(\Lambda')$. Положим $x'_i = x_i(\Lambda')$. Тогда по утверждению (2) леммы 2.2 имеем $x'_0 \geqslant x_{20} = (8/20)x_8 = 8$. Умножая первое уравнение из (1) на 3 и вычитая из полученного уравнения второе, получаем

$$3x'_0 + \frac{8}{5}x'_4 + x'_6 + \frac{1}{4}x'_8 + \frac{1}{7}x'_{10} = 16.$$

Поэтому $3x'_0 \leqslant 16$. Противоречие.

Значит, $x_8 = 15$ и $7x_0 + \frac{8}{9}x_{10} + \frac{1}{4}x_{12} = 9$. По утверждению (2) леммы 2.2 имеем $\frac{1}{4}x_{12} \geqslant 3$. Поэтому $x_0 = x_{10} = 0$ и $x_{12} = 36$. Подставив эти значения во второе уравнение (1), получим, что $x_{14} < 0$. Итак, $x_8 = 0$.

Положим, что $x_{10} \neq 0$. Тогда $x_{18} \neq 0$. Если $a \in K_{18}$, то внешняя прямая из $a^\perp$ имеет тип либо (0, 10, 16, 18), либо (0, 12, 14, 18). В любом случае $x_{12} \neq 0$ и $x_{16} \neq 0$. Так как любая внешняя прямая, содержащая точку из K_{16}, пересекает K_0, то $x_0 \geqslant 2$. По утверждению (2) леммы 2.2 имеем $x_{10} \geqslant 10$. Поэтому $x_0 = 2$, $x_{10} = 18$ и $x_{12} = 24$. Подставив эти значения во второе уравнение (1), получим, что $x_{14} < 0$. Итак, $x_{10} = 0$.

Таким образом, $x_{12} \neq 0$. Тогда $x_0 \leqslant 4$. Но любая внешняя прямая, содержащая точку из K_{12}, пересекает K_0. Поэтому $x_0 = 4$ и $x_{12} = 32$. Противоречие с тем, что $\mu = 10$.

Пусть $\mu = 46$. Тогда система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{cases} x_0 + \dfrac{15}{10}x_{10} + \dfrac{15}{9}x_{12} + \dfrac{15}{8}x_{14} = 66, \\ 5x_{10} + 6x_{12} + 7x_{14} = 230. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $x_{14} \leqslant 32$, причем в случае равенства $x_{14} = 32$ получим $5x_{10} + 6x_{12} = 6$. Противоречие с утверждением (2) леммы 2.2.

Из утверждений (1) и (2) леммы 2.2 следует, что $x_{14} = 0$, 16 или 24. Если $x_{14} > 0$, то $5x_{10}+6x_{12} \leqslant 118$. Если $i = 10,\ 12$, то из утверждения (2) леммы 2.2 следует, что либо $x_i = 0$, либо $x_i \geqslant 12$. Таким образом, из полученного неравенства $5x_{10} + 6x_{12} \leqslant 118$ получаем, что либо $x_{10} = 0$, либо $x_{12} = 0$, т. е. либо $230 - 7x_{14}$ кратно 5, либо $230 - 7x_{14}$ кратно 6. Но первый случай невозможен, так как по предположению $x_{14} = 16$ или $x_{14} = 24$. Аналогично исключается и второй случай, так как при $x_{14} = 16$ или $x_{14} = 24$ число $7x_{14}$ не сравнимо с 230 по модулю 6.

Значит, $x_{14} = 0$ и x_{12} кратно 5. По утверждению (2) леммы 2.2 в этом случае x_{12} кратно 15. Предположим, что $x_{12} \neq 0$. Из первого уравнения в (1) следует, что $x_{12} = 15$ или $x_{12} = 30$. Если $x_{12} = 30$, то $(3/2)x_{10} \leqslant 16$, что противоречит утверждению (2) леммы 2.2. Итак,

$x_{12} = 15$, а из второго уравнения в (1) следует, что $x_{10} = 28$ и $x_0 = -1$. Противоречие.

Мы доказали, что $x_{14} = x_{12} = 0$. Из второго уравнения в (1) следует, что $x_{10} = 46$ и снова $x_0 < 0$.

Пусть $\mu = 48$. Тогда система (1) принимает вид

$$\begin{cases} x_0 + \frac{32}{20}x_{12} + \frac{32}{18}x_{14} + x_{16} = 64, \\ 6x_{12} - 7x_{14} + 4x_{16} = 240. \end{cases}$$

Сначала предположим, что $x_0 = 0$. Тогда $x_i = 0$ при $i < 12$. Поэтому любая внешняя прямая содержит четыре точки из K_{12}. Следовательно, $x_{14} = x_{16} = x_{18} = 0$ и из первого уравнения в (1) получаем $x_{12} = 40$. Поэтому $x_{20} = 24$. Но K_{20} — коклика, что противоречит лемме 1.4.

Значит, $x_0 > 0$. Теперь предположим, что $x_{14} > 0$. Если $a \in K_{14}$, то любая внешняя прямая из $a^{\perp}$ содержит единственную точку из K_0. По утверждению (4) леммы 2.2 имеем $x_0 \geqslant 4$, а по лемме 1.3 каждая тройка из K_0 смежна не более чем с четырьмя точками из K_{14}. Поэтому $x_{14} \leqslant 16$, что противоречит утверждению (2) леммы 2.2.

Итак, $x_{14} = 0$. Так как любая внешняя прямая, содержащая точку из K_0, имеет тип (0, 16, 16, 16), то для любого $b \in K_0$ имеем $[b] \subset K_{16}$. Поэтому для $c \in K_{16}$ справедливо включение $[c] \subset K_{16} \cup \Lambda \cup K_0$. Следовательно, $\Sigma = K_{16} \cup \Lambda \cup K_0$ — точечный граф. Поэтому $x_0 = 4$ и $x_{16} = 60$. Если b_1, b_2, b_3 — различные точки из K_0, то по лемме 1.3 пересечение окрестностей этих точек содержит точку из K_{16}, что противоречит тому, что точка из K_{16} лежит точно на двух внешних прямых.

Пусть $\mu = 50$. Тогда первое уравнение в (1) запишется в виде

$$x_0 + \frac{17}{10}x_{14} + \frac{17}{9}x_{16} = 62.$$

Поэтому $x_0 \equiv 62 \pmod{17}$, что противоречит утверждению (4) леммы 2.2.

Пусть $\mu = 52$. По утверждению (1) леммы 2.2 имеем $x_i = 0$ для $0 < i < 16$. Поэтому любая внешняя прямая имеет тип (0, 16, 18, 18), причем по утверждению (4) леммы 2.2 $x_0 \leqslant 2$. Однако точка из K_{16} лежит точно на двух внешних прямых. Следовательно, K_0 содержит две вершины a, b и $K_{16} \subset [a] \cap [b]$. Поэтому $x_{16} \leqslant 10$, что противоречит лемме 2.2.

Пусть $\mu = 54$. Тогда система уравнений (1) имеет единственное решение $x_0 = 1$, $x_{18} = 30$, $x_{20} = 27$. Следовательно, K_{20} — коклика, что противоречит тому, что порядок любой коклики из Σ по лемме 1.4 не больше 21.

Лемма 2.4. *Параметр μ отличен от 36.*

Доказательство. Пусть $\mu = 36$. Сначала убедимся в справедливости следующих утверждений:

(a) $x_0 = 1$, $x_8 = 45$, $x_{12} = 30$ и $x_i = 0$ при остальных i.

При $\mu = 36$ система (1) принимает вид

$$\begin{cases} x_0 + \dfrac{10}{9}x_2 + \dfrac{10}{8}x_4 + \dfrac{10}{7}x_6 + \dfrac{10}{6}x_8 + x_{10} = 76, \\ 2x_2 + 4x_4 + 6x_6 + 8x_8 + 5x_{10} = 360. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на 5 и вычитая из полученного уравнения второе, имеем $5x_0 + \frac{32}{9}x_2 + \frac{9}{4}x_4 + \frac{8}{7}x_6 + \frac{1}{3}x_8 = 20$. Поэтому $x_2 = 0$, и если $x_4 > 0$, то по лемме 2.2 $x_4 \geqslant 8$ и делится на 4, поэтому $x_4 = 8$. Но в этом случае $x_6 = x_0 = 0$, причем $x_8 > 0$ влечет $x_8 > 6$. Противоречие.

Если $x_6 > 0$, то по лемме 2.2 x_6 делится на 7 и $x_6 > 7$. Поэтому из уравнения следует, что $x_0 = 0$, $x_6 = 14$ и $x_8 = 12$, причем $x_8 > 0$. Из третьего утверждения леммы 2.2 следует, что $x_{12} = 8$ и $x_{14} = 6$. Возьмем произвольную внешнюю прямую L, пересекающую K_{14} в точке a. Тогда прямая L имеет тип либо (6, 8, 8, 14), либо (6, 6, 10, 14). Покажем, что не существует прямых второго типа. Действительно, на секущих из $a^\perp$ лежит семь точек из K_6 и для $u, w \in L \cap K_6$ имеем $u^\perp \cap w^\perp = L$, причем на секущих из $u^\perp \cup w^\perp$ имеется еще шесть точек из K_6. Противоречие.

Пусть $L = \{a, b, u, w\}$, где $b \in K_6$, $u, w \in K_8$. Тогда каждая из точек u, w лежит на четырех секущих, пересекающих K_{12}. Значит, все остальные прямые, пересекающие L, не содержат точек из K_{12}. Отсюда следует, что вершина b изолирована в K_6, иначе b лежит на внешней прямой типа (6, 6, 12, 12). Далее имеем $|[a] \cap K_6| = 10$. Поэтому четыре вершины из K_6 лежат в $u^\perp \cup w^\perp$. Заметим, что любая прямая, содержащая по точке из K_6 и K_8, имеет тип (6, 8, 8, 14). Поэтому $u^\perp \cup w^\perp$ содержит точно пять точек из K_{14}, да еще $b^\perp$ содержит не менее четырех точек из K_{14}. Это противоречит тому, что $x_{14} = 6$.

Итак, $x_6 = 0$. Если $x_0 > 0$, то из уравнения (2) следует, что $x_8 = 60$ и $x_{12} = 40$. Противоречие. Пусть $z \in K_0$. Тогда $[z] \subseteq K_{12}$. Поэтому $x_{12} \geqslant 30$ и $x_8 \geqslant 45$. Так как $\Sigma - \Lambda$ содержит 76 точек, то $x_0 = 1$, $x_8 = 45$ и $x_{12} = 30$. Утверждение (a) доказано.

(b) Пусть (a, b) — ребро из K_{12}. Тогда для любого ребра (x, y) из $\Lambda(a)$ выполняется равенство $|[b] \cap \Lambda(x)| + |[b] \cap \Lambda(y)| = 9$, причем $3 \leqslant |[b] \cap \Lambda(x)| \leqslant 6$.

Заметим, что ребро (a, b) лежит в некотором треугольнике $\{a, b, c\}$ из K_{12}, а окрестности вершин этого треугольника расщепляют гиперовал. Пусть $L = \{a, u, x, y\}$ — секущая и $u \in K_8$. Тогда $\Lambda(u)$ состоит из четырех изолированных ребер, одним из которых является ребро (x, y), а остальные ребра соединяют три точки из $\Lambda(b)$ с тремя точками из $\Lambda(c)$. Отсюда, в частности, следует, что $|[b]\cap\Lambda(u)| = |[c]\cap\Lambda(u)| = 3$. Далее, $\Lambda(b)-[u]$ содержится в $x^\perp \cup y^\perp$, причем Λ не содержит треугольников. Это влечет (b).

Введем следующее обозначение. Если $a \in K_{12}$, то через A обозначим 6-коклику, которая состоит из точек, находящихся в K_8 и лежащих на секущих из $a^\perp$.

(c) Если $\Delta = \{a,b,c\}$ — треугольник из K_{12}, то для вершины $x \in K_8 - [a]$ выполняется одно из следующих утверждений:

(1) $x \in B\cup C$ и $|A\cap[x]| = 3$;

(2) $x \notin B\cup C$ и $|A\cap[x]| = 2$.

Если $x \in B\cup C$, то как и в доказательстве предыдущего утверждения получаем $|\Lambda(a)\cap[x]| = 3$. Так как a лежит на шести секущих, то $|A\cap[x]| = 3$.

Пусть $x \notin B\cup C$. Напомним, что $x \in [b]\cup[c]$. Пусть для определенности $x \in [b]$. Тогда $[b]\cap[x]$ не пересекает Λ. Поэтому $\Lambda(x)\subset\Lambda(a)\cup\Lambda(c)$. Кроме того, из соотношения $x \notin B\cup C$ следует, что подграфы $[a]\cap\Lambda(x)$, $[c]\cap\Lambda(x)$ являются 4-кокликами. Таким образом, $[c]$ пересекает секущие из $a^\perp$ по четырем точкам из Λ и по двум точкам из A.

(d) Если $a,b \in K_{12}$, то $|[a]\cap[b]\cap\Lambda| \neq 5$.

Допустим, что $a,b \in K_{12}$ и $|[a]\cap[b]\cap\Lambda| = 5$. Тогда $|A-[b]| = |B-[a]| = 5$. Следовательно, $|A\cap B| \leqslant 1$. Рассмотрим два случая.

Пусть $A\cap B = \{x\}$ и (u,w) — ребро из $[a]\cap[x]\cap\Lambda$. Тогда это ребро изолировано в $\Lambda(a)\cup\Lambda(x)$. Так как $|\Lambda(b)-(\Lambda(a)\cup\Lambda(x))| = 5$, то $|\Lambda(u)\cap\Lambda(b)|+|\Lambda(w)\cap\Lambda(b)| \leqslant 5$, что противоречит второму утверждению из (b).

Допустим, что A не пересекает B. Тогда некоторая вершина x из $A\cap[b]$ лежит на внешней прямой $L = \{b,x,u,w\}$ из $b^\perp$. Каждая вершина из $A-[b]$ смежна с единственной точкой из $\{x,u,w\}$. Так как A — коклика, то каждая из пяти вершин в $A-[b]$ смежна с u или w. Поэтому $|A\cap[u]|+|A\cap[w]| = 7$. Противоречие с утверждением (c).

Введем новое обозначение. Для треугольника $\Delta = \{a,b,c\}$ из K_{12} положим $S(\Delta) = A\cup B\cup C$. Так как A,B,C попарно не пересекаются, то $|S(\Delta)| = 18$.

(e) Если Δ_1, Δ_2 — различные треугольники из K_{12}, то

(1) для любой вершины $a \in \Delta_1$ найдется вершина $e \in \Delta_2$ такая, что $|\Lambda\cap[a]\cap[e]| = 6$, а если $b \in \Delta_1-\{a\}$ и $f \in \Delta_2-\{e\}$, то $|\Lambda\cap[a]\cap[f]| = |\Lambda\cap[b]\cap[e]| = 3$;

(2) если $a \in \Delta_1$ и $e \in \Delta_2$, то $|\Lambda\cap[a]\cap[e]| = 4$.

Пусть сначала найдутся такие вершины $a \in \Delta_1$ и $e \in \Delta_2$, что $|\Lambda \cap [a] \cap [e]| = 6$. В этом случае E не пересекает $K_8(a)$ и A не пересекает $K_8(e)$. Поэтому если $\{x, u, w\}$ — треугольник из $K_8(e)$ и $x \in K_8(a)$, то $x \notin A$. Таким образом, каждая вершина из A смежна либо с u, либо с w. Из утверждения (c) следует, что $|A \cap [u]| = |A \cap [w]| = 3$. Далее, так как в $K_8(e)$ имеется три треугольника, то из (c) следует, что $|B \cap K_8(e)|$ и $|C \cap K_8(e)| \geqslant 3$. Тогда по определению Γ имеем $|\Lambda \cap [b] \cap [e]|$, $|\Lambda \cap [c] \cap [e]| \leqslant 3$. Так как $|\Lambda \cap [a] \cap [e]| = 6$, то $|\Lambda \cap [b] \cap [e]| + |\Lambda \cap [c] \cap [e]| = 6$. Таким образом, $|\Lambda \cap [b] \cap [e]| = |\Lambda \cap [c] \cap [e]| = 3$.

В частности, отсюда заключаем, что $|B \cap K_8(e)| = 3$, причем каждая вершина из $B \cap K_8(e)$ лежит в некотором треугольнике из $K_8(e)$, т. е. B не пересекает E. Аналогичное заключение справедливо и для C. Мы доказали следующее утверждение.

(f) Если в утверждении (e) для треугольников Δ_1 и Δ_2 выполнено свойство (1), то $S(\Delta_1)$ не пересекает $S(\Delta_2)$.

Вернемся к доказательству утверждения (e). Для доказательства случая (1) этого утверждения для любой вершины $x \in \Delta_1$ достаточно найти вершину $y \in \Delta_2$ такую, что $|\Lambda \cap [x] \cap [y]| = 6$.

Допустим, что $b \in \Delta_1$ и для любой вершины $f \in \Delta_2$ выполняется неравенство $|\Lambda \cap [b] \cap [f]| < 6$. Так как $f \in \Delta_2$, то из (d) следует, что $|\Lambda \cap [b] \cap [f]| < 5$. Поскольку μ-подграфы из Γ являются кокликами, $|\Lambda \cap [b] \cap [f]| = 4$. Из доказанного выше следует, что не существует таких двух вершин a и e, что $a \in \Delta_1$, $e \in \Delta_2$ и $|\Lambda \cap [a] \cap [e]| = 6$. Поэтому справедлив случай (2) и утверждение (e) полностью доказано.

(g) Для любых треугольников Δ_1 и Δ_2 из K_{12} либо $S(\Delta_1)$ не пересекает $S(\Delta_2)$, либо $S(\Delta_1) = S(\Delta_2)$.

В силу (f) достаточно рассмотреть случай (2) из утверждения (e). Убедимся в том, что если $a \in \Delta_1$, $e \in K_{12}$ и $|\Lambda \cap [a] \cap [e]| = 4$, то $E \subset S(\Delta_1)$. Для этого достаточно доказать, что $|A \cap E| = 2$, т. е. любая точка из $[a] \cap E$ лежит на секущей из $a^{\perp}$.

Пусть $\Delta_1 = \{a, b, c\}$ и $L = \{a, x, y, z\}$ — внешняя прямая, содержащая точку $x \in E$. Тогда $|\Lambda(e) - ([a] \cup [x])| = 6$ и поэтому $[y]$, $[z]$ содержат по три вершины из $\Lambda(e)$ и из E. По утверждению (c) $y, z \in S(\Delta_2)$. Мы показали, что если $u \in \Delta_1$, то треугольник из $K_8 \cap [u]$, пересекающий $S(\Delta_2)$, содержится в $S(\Delta_2)$. Но $S(\Delta_2)$ содержит не более шести таких треугольников, а общее число таких треугольников равно 9. Без ограничения общности будем считать, что $[a]$ содержит треугольник $\{u, v, w\}$ из K_8, не пересекающий $S(\Delta_2)$. Пусть e смежна с u. Тогда $[u]$ содержит ребро из $\Lambda(e)$ и по утверждению (в) $|E \cap [v]| = |E \cap [w]| = 2$. Отсюда следует, что $|\Lambda(e) \cap [v]| = |\Lambda(e) \cap [w]| = 4$ и некоторая точка из $\Lambda(e)$ смежна по крайней мере с двумя точками на прямой $\{a, u, v, w\}$. Полученное противоречие доказывает утверждение (g).

Из утверждения (g) следует, что 18 делит $|K_8| = 45$. Лемма 2.4 доказана.

Замечание. Из единственности сильно регулярного графа Γ с параметрами $(81, 20, 1, 6)$ и леммы 2.4 следует, что Γ не содержит регулярных подграфов степени 10 на 36 вершинах, в которых нет треугольников.

Лемма 2.5. *Если* $\mu = 40$, *то справедливо заключение предложения* 2.1.

Доказательство. При $\mu = 40$ система (1) принимает вид

$$\begin{cases} x_0 + \dfrac{6}{5}x_4 + \dfrac{4}{3}x_6 + \dfrac{3}{2}x_8 + \dfrac{12}{7}x_{10} + x_{12} = 72, \\ 2x_4 + 3x_6 + 4x_8 + 5x_{10} + 3x_{12} = 200. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на 3 и вычитая из полученного уравнения второе, получаем $3x_0 + \frac{8}{5}x_4 + x_6 + \frac{1}{2}x_8 + \frac{1}{7}x_{10} = 16$.

Если $x_4 > 0$, то согласно лемме 2.2 имеем $x_4 = 10$. Поэтому $x_0 = x_6 = x_6 = x_8 = x_{10} = 0$. Отсюда следует, что $x_{20} = 2$, $x_{12} = 60$ и заключение леммы выполняется.

Рассмотрим случай, когда $x_4 = 0$. Предположим, что $x_6 > 0$. Тогда выберем точку $a \in K_6$ и точки b_1, b_2, b_3, лежащие на секущих из $a^\perp$. Положим $\Delta = [b_1]\cap[b_2]\cap\Lambda$, $\Lambda_0 = \Lambda - ([a]\cup[b_1]\cup[b_2])$. Если $|\Delta| = \beta$, то $|\Lambda_0| = \beta + 2$, причем каждая вершина из Δ смежна по крайней мере с семью точками из Λ_0, в частности $\beta \geqslant 5$. Если $\beta \leqslant 7$, то любые три точки из Δ смежны по крайней мере с тремя точками из Λ. Противоречие с леммой 1.3. Значит, $\beta = 8$, число ребер между Λ_0 и Δ не меньше 56 и некоторая точка из Λ_0 смежна по крайней мере с пятью вершинами из Δ. Это противоречит лемме 1.3. Значит, $x_6 = 0$.

Пусть $x_6 = 0$ и $x_8 = 0$. Тогда $x_{12} \neq 0$, иначе $x_{10} = 40$ и x_0 — не целое. Теперь любая внешняя прямая, пересекающая K_{12}, имеет тип $(0, 12, 14, 14)$. Поэтому $x_0 = 4$, $x_{10} = 28$, $x_{12} = 20$ и $K_0 \cup K_{12}$ образует $(4, 20)$-подграф. Противоречие. Итак, $x_8 > 0$.

Выберем точку $a \in K_8$ и точки b_1, b_2, b_3, b_4, лежащие на секущих из $a^\perp$. Положим $\Delta = [b_1] \cap [b_2] \cap \Lambda$, $\Lambda_0 = \Lambda - ([a] \cup [b_1] \cup [b_2])$. Если $|\Delta| = \beta$, то $|\Lambda_0| = \beta + 4$, причем каждая вершина из Δ смежна с двумя точками из Δ, не более чем с двумя точками из $\Lambda(a) - ([b_1] \cup [b_2])$ и не менее чем с шестью точками из Λ_0 (в частности, $\beta \geqslant 2$). Пусть $\Delta = \{c_i\}_{i=1}^{\beta}$, $\{a_i\}_{i=1}^{7-\beta}$ — отличные от a точки из K_8, лежащие на секущих из $b_1^\perp$, не пересекающих Δ.

Если $\beta = 2$, то $\Lambda_0 \subset [c_1]\cap[c_2]$. Поэтому Λ_0 — коклика. Если a_1 лежит на внешней прямой из $b_2^\perp$, то $a_1^\perp$ содержит ребро из $[b_1] \cap \Lambda$ и не более двух ребер, соединяющих вершины из $(a^\perp \cap \Lambda) - ([b_1] \cup [b_2])$ с вершинами из Λ_0. Это противоречит тому, что $a_1 \in K_8$. Значит, любая вершина a_i лежит на секущей в $b_2^\perp$ и ее окрестность содержит два ребра, соединяющие вершины из $(a^\perp \cap \Lambda) - ([b_1] \cup [b_2])$ с вершинами из Λ_0. Положим $\Lambda_0^i = \Lambda - ([a_i] \cup [b_1] \cup [b_2])$. Тогда Λ_0^i является кокликой из $[c_1] \cap [c_2]$. Поэтому вершины d_1, d_2 из $\Lambda_\cap [a_1] \cap [a_2]$ смежны с каждой вершиной a_i и мы получим (4, 6)-подграф $\{b_1, b_2, d_1, d_2; a, a_1, \ldots, a_5\}$. Противоречие с леммой 1.3.

Если $\beta = 3$, то $|\Lambda_0| = 7$ и $[c_1] \cap [c_2] \cap [c_3]$ содержит b_1, b_2 и не менее четырех точек из Λ_0. Это противоречит лемме 1.3.

Если $\beta = 4$, то по лемме 1.3 в $[c_i] \cap [c_j] \cap [c_k]$ содержится не более двух точек из Λ_0 для различных i, j, k. Поэтому можно считать, что $[c_1] \cap [c_2]$ содержит четыре точки из Λ_0, $[c_3] \cap [c_4]$ содержит четыре оставшихся точки из Λ_0, $|[c_i] \cap \Lambda_0| = 6$ и каждая точка из Λ_0 смежна с четырьмя точками из Δ. Поэтому Λ_0 является кокликой. Как и выше, все три вершины из $\{a_i\}$ лежат на секущих в $b_2^\perp$. Пусть $[a_1] \cap \Lambda$ содержит ребра $(d_1, e_1$ и (d_2, e_2), где $e_1, e_2 \in \Lambda_0$. Тогда d_1 и d_2 смежны с любой вершиной a_i, причем не смежная с e_1 вершина c_i смежна с тремя вершинами из (4, 4)-подграфа $\{b_1, b_2, d_1, d_2; a, a_1, \ldots, a_3\}$. Противоречие с леммой 1.3.

Пусть $\beta = 7$. Так как каждая точка из $([a] \cap \Lambda) - ([b_1] \cup [b_2])$ смежна не более чем с тремя вершинами из Δ, то число ребер между Λ_0 и Δ не меньше 44, причем $|\Lambda_0| = 11$. Значит, указанное число ребер равно 44 и каждая точка из Λ_0 смежна с четырьмя вершинами из Δ, в частности, Λ_0 — коклика.

Если $[b_1] \cap [b_2] \cap [b_3]$ содержит отличную от a вершину w, не принадлежащую Λ, то w лежит на внешних прямых из $b_1^\perp \cup b_2^\perp$. В этом случае $[w] \cap \Lambda$ содержит не более двух ребер. Противоречие. Значит, $[b_1] \cap [b_2] \cap [b_3]$ содержит три точки из Δ и число ребер между Λ_0 и Δ больше 44. Противоречие.

Пусть $\beta = 6$. Предположим, что Λ_0 содержит два непересекающихся ребра и Λ' есть граф, полученный выбрасыванием из Λ_0 этих ребер. Тогда $|\Lambda'| = 6$ и каждая точка из Δ смежна по крайней мере с четырьмя вершинами из Λ'. Отсюда следует, что каждая точка из Λ' смежна точно с четырьмя вершинами из Δ. Далее, $[b_1] \cap [b_2] \cap [b_3]$ содержит точку w, лежащую на внешних прямых из $b_1^\perp \cup b_2^\perp$. Тогда $w \in K_8$, $[w]$ содержит указанные два ребра из Λ_0 и ребра, соединяющие точки из Λ' с точками из $[a] \cap \Lambda$. Пусть $d \in [a] \cap [w] \cap \Lambda$ и (d, e) — ребро из $[w] \cap \Lambda$. Так как Λ не содержит треугольников, то $[d]$ содержит не более двух вершин из Δ. Поэтому $[e]$ содержит не менее четырех вершин из Δ и мы получим (3, 5)-подграф $\{b_1, b_2, e; a, [e] \cap \Delta\}$.

Далее, $[b_1] \cap [b_2] \cap [b_i]$ не содержит вершин, лежащих на внешних прямых из $b_1^\perp \cup b_2^\perp$. Поэтому указанный подграф содержит по крайней мере одну вершину из Λ_0 для $i = 3, 4$ и число ребер между Λ_0 и Δ не меньше 38.

Пусть Λ_0 содержит 2-путь xyz и $\Lambda' = \Lambda_0 - \{x, y, z\}$. Тогда число ребер между Δ и Λ' не меньше 28, $|\Lambda'| = 7$. Отсюда следует, что число ребер равно 28, каждая вершина из $\Lambda' \cup \{x, z\}$ смежна с четырьмя вершинами из Δ и $|[y] \cap \Delta| = 2$. В этом случае имеем (4, 4)-подграф $\{b_1, b_2, x, z; \Delta - [y]\}$, и по лемме 1.3 каждая вершина u из Λ' смежна не более чем с двумя вершинами из $\Delta - [y]$. Поэтому $[u]$ содержит $[y] \cap \Delta = \{c_i, c_j\}$ и мы получаем (3, 6)-подграф $\{c_i, c_j, c_k; b_1, b_2, \Lambda' \cap [c_k]\}$. Противоречие.

Итак, Λ_0 содержит не более одного ребра. Если a_1 лежит на внешней прямой из $b_2^\perp$, то $[a] \cap \Lambda$ содержит ребро из Λ_0 и два ребра, соединяющие точки из Λ_0 с точками из $[a] \cap \Lambda$. Отсюда следует, что $[b_1] \cap [b_2] \cap [b_i]$ содержит не менее двух вершин из Δ при $i = 3, 4$. Поэтому число ребер между Λ_0 и Δ не меньше 40. Таким образом, указанное число ребер равно 40, каждая вершина из Λ_0 смежна с четырьмя вершинами из Δ и Λ_0 — коклика. Значит, четвертая вершина из $\Lambda \cap [b_1] \cap [b_2] \cap [b_i]$ — это a_1, причем a_1 лежит на секущей из $b_2^\perp$. Положим $\{d_1, d_2\} = \Lambda \cap [a] \cap [a_1]$ и $\Lambda_0^1 = \Lambda - ([b_1] \cup [b_2] \cup [a_1])$. Как и выше, каждая вершина из Λ_0^1 смежна с четырьмя вершинами из Δ. Если e_1 — вершина из $[d_1] \cap \Lambda_0^1$, то получаем (3, 5)-подграф $\{b_1, b_2, e_1; a, [e_1] \cap \Delta\}$. Противоречие.

Таким образом, показано, что если $\beta \neq 0$, то $\beta = 5$. Если Λ_0 содержит такой 5-вершинный подграф Ω, что каждая вершина из Ω смежна с четырьмя точками из Δ, то подграф $\{\Delta; \Omega\}$ получается удалением из (5, 5)-графа максимального паросочетания. Но в этом случае число ребер между $\Lambda_0 - \Omega$ и Δ не меньше 10, причем некоторая вершина $y \in \Lambda_0 - \Omega$ смежна с тремя точками из Δ. Противоречие с тем, что мы получим (3, 5)-подграф $\{[y] \cap \Delta; b_1, b_2, y, z_1, z_2\}$, где z_1, z_2 — вершины из Ω, смежные с вершинами из $[y] \cap \Delta$.

Теперь число ребер между Δ и Λ_0 не меньше 30, причем число вершин из Ω, смежных с четырьмя точками из Δ, не больше четырех. Отсюда следует, что в Λ_0 нет точек, смежных с единственной вершиной из Δ, и если некоторая вершина из Λ_0 смежна с двумя вершинами из Δ, то число ребер между Δ и Λ_0 равно 30 и точно по четыре вершины из Λ_0 смежны с тремя и четырьмя вершинами из Δ соответственно. В частности, Λ_0 не содержит пару непересекающихся ребер. Пусть Λ_0 содержит 2-путь xyz, $\Lambda' = \Lambda_0 - \{x, y, z\}$. Без ограничения общности положим $\Delta \cap [x] \cap [z] = \{c_1, c_2, c_3\}$. Ввиду леммы 1.3 любая точка из Λ' не смежна по крайней мере с одной из вершин в $\{c_1, c_2, c_3\}$. Среди вершин из Λ', смежных с четырьмя точками из Δ, найдутся две вершины

u, w, не смежные с вершиной c_i. В этом случае имеется (4, 4)-подграф $\{b_1, b_2, u, w; \Delta \cap [u]\}$, причем некоторая вершина из Λ' смежна с тремя вершинами из $\Delta \cap [u]$. Противоречие.

Мы показали, что Λ_0 содержит не более одного ребра. Допустим, что $a_i \in [b_1] \cap [b_2] \cap [b_3]$, причем a_i лежит на внешней прямой из $b_2^{\perp}$. Тогда $[a_i] \cap \Lambda$ содержит ребро из $[b_1]$, ребро из Λ_0 и два ребра, соединяющих точки из Λ_0 с вершинами из $[a] \cap \Lambda$. Противоречие с тем, что $[b_3]$ содержит ребро из $[a] \cap \Lambda$.

Таким образом, если вершина w из $\Lambda \cap [b_1] \cap [b_2] \cap [b_3]$ не лежит в Δ, то она лежит на секущих из $b_i^{\perp}$, $i = 1, 2$. Поэтому $[b_3]$ и $[b_4]$ содержат по крайней мере по одной вершине из Δ и число ребер между Λ_0 и Δ не меньше 32. Итак, по крайней мере пять вершин из Λ_0 смежны с четырьмя вершинами из Δ. Противоречие.

§ 3. Локально $GQ(3, 9)$-графы

Пусть Γ — связный локально $GQ(3, 9)$-граф, точки a, b из Γ находятся на расстоянии 2, $\Lambda = [a] \cap [b]$ и $\mu = |\Lambda|$.

Лемма 3.1. *Параметр μ не равен* 32.

Доказательство. Если $\mu = 32$, то каждая точка из $[b] - [a]$ лежит в $K_8(\Lambda)$. Ввиду предложения 2.1 $|[a] \cap [c]| = 32$ для любой точки c из $[b] - [a]$. Таким образом, граф Γ сильно регулярен с $\mu = 32$. Противоречие с тем, что 32 не делит $112 \cdot 81$.

Лемма 3.2. *Параметр μ не равен* 40.

Доказательство. Пусть $\mu = 40$ и $c, d \in K_{20}^b(\Lambda)$. Тогда $[c] \cap [d] \cap [b] = K_4^b(\Lambda) = \{e_i\}_{i=1}^{10}$. Положим $\Lambda_i = [a] \cap [e_i]$. Ясно, что $b \in K_4(\Lambda_i)$. Поэтому $|\Lambda_i| = 40$, причем $c \in K_{20}(\Lambda_i)$. Следовательно, ребро (b, e_i) лежит в $K_{20}(\Lambda_i)$ и по предложению 2.1 $|[a] \cap [c]| = 56$.

Через Σ (Ω) обозначим множество вершин из $\Gamma - a^{\perp}$, смежных с 40 (с 56) вершинами из $[a]$. Пусть $|\Sigma| = \alpha$, $|\Omega| = \beta$. Тогда каждая точка из Σ смежна с двумя вершинами из Ω и число ребер между Σ и Ω равно 2α.

Далее, число ребер между $[a]$ и $\Sigma \cup \Omega$ равно $112 \cdot 81 = 40\alpha + 56\beta$, т. е. $5\alpha = 7(162 - \beta)$. С другой стороны, окрестность вершины b в подграфе $\Sigma \cap [c]$ совпадает с $\{e_i\}_{i=1}^{10}$. Далее, окрестность вершины e_i в подграфе $\Sigma \cap [c]$ является 10-кокликой. Поэтому $\Sigma \cap [c]$ является гиперовалом из $[c] - [a]$. Согласно предложению 2.1 имеем $\Sigma \cap [c] = [c] - [a]$. Поэтому число ребер между Σ и Ω равно 56β. Итак, $\alpha = 28\beta$ и $20\beta = 162 - \beta$. Противоречие с тем, что 162 не делится на 21.

Из лемм 3.1, 3.2 и предложения 2.1 следует, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами (275, 112, 30, 56). Из [4] следует, что Γ — граф Маклафлина. Теорема доказана.

Докажем следствие. Пусть геометрия G является расширением обобщенного четырехугольника $GQ(3,9)$. Допустим, что эта геометрия не является треугольной. Тогда найдутся попарно коллинеарные точки a, b, c, не лежащие в блоке. По лемме 1.5 G_a содержит такой гиперовал Λ, что $c \in \Lambda$ и любая точка из Λ не коллинеарна с b в Δ. Противоречие с предложением 2.1. Значит, геометрия треугольна и можно применить теорему. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Браувер А.Е., ван Линт Й. Х.** Сильно регулярные графы и частичные геометрии // Кибернетический сб. М.: Мир, 1987. Вып. 24. С. 186–229.
2. **Махнев А. А.** Конечные локально $GQ(3,3)$-графы // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 6. С. 1314–1324.
3. **Cameron P. J., Hughes D. R., Pasini A.** Extended generalized quadrangles // Geom. Dedicata. 1990. V. 35, N 1–3. P. 193–228.
4. **Goethals J.-M., Seidel J. J.** The regular two graph on 276 points // Discrete Math. 1975. V. 12, N 1. P. 143–158.
5. **Makhnev A. A.** Locally $GQ(3,5)$-graphs and geometries with short lines // Всеукраинская конф. памяти П. С. Казимирского: Тез. докл. Львов, 1995. С. 59–60.
6. **Pasechnik D. V.** The triangular extensions of a generalized quadrangle of order (3, 3) // Bull. Belg. Math. Soc. 1995. V. 2. N 5. P. 509–518.
7. **Pasechnik D. V.** The extensions of the generalized qudrangle of order (3, 9) // European J. Combin. 1996. V. 17, N 8. P. 751–755.
8. **Payne S. E., Thas J. A.** Finite Generalized Quadrangles. Boston: Pitman, 1984.

Адрес авторов:

Институт математики
и механики УрО РАН,
ул. Ковалевской, 16,
620219 Екатеринбург, Россия.
E-mail: mak@top.imm.intec.ru

Статья поступила
31 марта 1997 г.,
переработанный вариант —
15 декабря 1997 г.