ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1998. Серия 1. Том 5, № 3, 17–37

УДК 519.08

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ НА ОДНОЙ МАШИНЕ С ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ РАБОТ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ*)

А. В. Кононов

Изучаются параметрические задачи теории расписаний. Все работы выполняются на одной машине. Длительность каждой работы пропорциональна некоторой функции от времени начала выполнения этой работы. Рассматриваются следующие критерии оптимальности: минимизация общего времени выполнения всех работ, минимизация взвешенной суммы времен завершения всех работ, минимизация максимального временного смещения, минимизация числа запаздывающих работ. Изучается комбинаторная сложность задач. Устанавливаются условия на функции, достаточные для существования точных полиномиальных алгоритмов.

Введение

Теория расписаний является важным разделом исследования дискретных экстремальных задач. Задачи теории расписаний состоят в оптимальном распределении имеющихся ресурсов для выполнения требований за определенный промежуток времени. Под ресурсами могут пониматься машины, станки, учебные помещения, приборы и т. п., под требованиями — выполняемые работы, программы, школьные занятия, грузоперевозки и многое другое. Для определенности в дальнейшем ресурсы будем называть машинами, а требования — работами. На работы и машины накладываются следующие ограничения.

- В каждый момент времени на машине выполняется не более одной работы.
- Прерывания в выполнении работ не допустимы.
- Вся исходная информация об индивидуальной задаче определена и известна заранее.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98–07–90259).

Обычно в задачах теории расписаний предполагается, что время выполнения каждой работы или ее операции на каждой машине фиксировано. Однако на практике оно часто зависит от времени начала выполнения. Если время выполнения каждой работы определяется собственной функцией, то вряд ли можно надеяться на существование точного полиномиального алгоритма для решения задачи. Действительно, если длительность каждой работы J_i определяется непрерывной кусочно линейной функцией $\Upsilon_i(t)$ вида $\Upsilon_i(t) = a_i + \max\{0, v_i(t - d_i)\}$, то, как показано в [1], нахождение минимального по длине расписания является NP-трудной в сильном смысле задачей. Поэтому полезно выяснить, для каких функций известные задачи теории расписаний априори являются полиномиально разрешимыми.

Первый шаг в этом направлении был сделан в работе [3]. В ней рассматривались задачи, в которых длительность каждой работы J_i задается функцией $p_i = a_i + \Upsilon(t)$, где $a_i \geqslant 0$ и $\Upsilon(t) \geqslant 0$ — функция, определенная для всех $t \geqslant 0$. В случае одной машины в [3] установлено, что если $\Upsilon(t)$ монотонно возрастает при $t \geqslant 0$, то перестановка работ по неубыванию величин a_i минимизирует длину расписания; если $\Upsilon(t)$ — монотонно убывающая дифференцируемая функция и $|\frac{d\Upsilon(t)}{dt}| \leqslant 1$ при $t \geqslant 0$, то перестановка работ по невозрастанию величин a_i минимизирует длину расписания.

В [2, 20] изучались задачи, в которых время выполнения работы J_i прямо пропорционально моменту s_i начала ее выполнения и равно $\alpha_i s_i$. В [20] при различных критериях построены полиномиальные алгоритмы нахождения оптимального расписания для n работ на одной машине. Там же отмечено, что полиномиально разрешимые задачи с постоянными длительностями на одной машине остаются полиномиально разрешимыми и в рассматриваемом случае. В [2] изучались задачи при наличии нескольких машин. Установлено, что при переходе от обычных задач к задачам с прямо пропорциональным ростом длительностей комбинаторная сложность, как правило, сохраняется. Например, задача минимизации длины расписания для систем потокового и открытого типа NP-трудна для трех машин и полиномиально разрешима для двух машин. Однако в [2] приведен пример задачи, когда это не так. Задача построения оптимального расписания на двух параллельных машинах с критерием минимизации суммы времен завершения всех работ и прямо пропорциональным ростом длительностей является NP-трудной, в то же время в классическом случае эта задача полиномиально разрешима [8].

Другие задачи, в которых длительность работы есть функция, зависящая от момента начала выполнения работы, рассматривались также в [1, 4–7, 9–12, 14, 15, 19–22].

Целью данной статьи является изучение задач теории расписаний на одной машине, когда длительность работы J_j равна $\alpha_j \Upsilon(s_j)$, где $\Upsilon(t)$ — некоторая функция от времени, одинаковая для всех работ. Отметим, что если функция $\Upsilon(t)$ тождественно равна единице, то возникают обычные задачи теории расписаний с фиксированными длительностями.

В § 1 даны основные определения и обозначения. В § 2 рассмотрена задача, когда функция $\Upsilon(t)$ имеет вид $\Upsilon(t) = at + b$. В § 3 рассмотрены полиномиально разрешимые случаи с произвольной функцией $\Upsilon(t)$. В § 4 рассмотрен случай, когда $\Upsilon(t)$ является ступенчатой функцией. Для всех рассмотренных в этом параграфе задач установлена их NP-трудность и построены «псевдополиномиальные» алгоритмы.

§ 1. Основные обозначения и определения

Пусть на одной машине требуется выполнить множество работ $J = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$. Предполагается, что все работы готовы к выполнению в момент времени $t_0 \geqslant 0$. Обозначим через s_i момент начала выполнения работы J_i. Тогда длительность работы J_i равна $p_i = \alpha_i \Upsilon(s_i)$, где $\Upsilon(t)$ — кусочно непрерывная функция, определенная для всех $t \geqslant t_0$, а $\alpha_i > 0$ — рациональные числа, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Обозначим через $C_i = s_i + p_i$ время завершения работы J_i. Для описания целевых функций определим следующие параметры: d_i — директивный срок на завершение выполнения работы J_i, $w_i \geqslant 0$ — вес работы J_i.

Будем считать, что целевой функцией может быть одна из следующих функций:

$f = C_{\max} = \max\limits_{J_i \in J} C_i$ — момент завершения всех работ;

$f = \Sigma C_i = \sum\limits_{J_i \in J} C_i$ — сумма времен завершения всех работ;

$f = \Sigma w_i C_i = \sum\limits_{J_i \in J} C_i$ — взвешенное суммарное время завершения всех работ;

$f = L_{\max} = \max\limits_{J_i \in J} (C_i - d_j)$ — максимальное временное смещение;

$f = \Sigma U_i = \sum\limits_{J_i \in J} U_i$ — число запаздывающих работ, где $U_i = 1$, если $C_i > d_i$, и $U_i = 0$ в противном случае.

При обозначении конкретной задачи будет использоваться запись $\alpha|\beta|\gamma$, введенная в [17]. В поле α записывается информация о машинах. Для всех рассматриваемых ниже задач $\alpha = 1$. В поле β указываются различные характеристики работ. Запись $p_i = \alpha_i \Upsilon(s_i)$ в этом поле означает, что длительность выполнения работы J_i равна $p_i = \alpha_i \Upsilon(s_i)$; запись *prec* означает, что между работами есть отношения предшествования. В третьем поле задается вид целевой функции.

Требуется найти расписание, когда целевая функция f принимает наименьшее значение. Будем говорить, что индивидуальная задача *хорошо определена*, если выполнены следующие условия:

$$\Upsilon(t_0) > 0, \tag{1}$$

$$t_1 + \alpha_i \Upsilon(t_1) \leqslant t_2 + \alpha_i \Upsilon(t_2) \text{ при всех } t_2 > t_1 \geqslant t_0 \text{ и всех } J_i \in J. \tag{2}$$

Прокомментируем подробнее эти условия. Из второго условия следует, что если работа начнет выполняться раньше, то раньше и закончится, хотя время, затраченное на ее выполнение, может быть и больше. Заметим, что в этом условии наряду с функцией $\Upsilon(t)$ участвуют и параметры α_i. Поэтому одни индивидуальные задачи для некоторой функции $\Upsilon(t)$ могут быть хорошо определены, а другие с той же функцией — нет. В качестве примера рассмотрим $\Upsilon(t) = 1/t$. Индивидуальная задача с $\Upsilon(t) = 1/t$ и $t_0 = 1$ хорошо определена, если $\alpha_i < 1$ для каждой работы J_i. Таким образом, для некоторых функций условие (2) сужает класс рассматриваемых задач. Однако нетрудно заметить, что если $\Upsilon(t)$ — неубывающая функция, то второе условие выполнено для любого набора параметров α_i.

Лемма 1. *Пусть для некоторого $\tau > t_0$ справедливо неравенство $\Upsilon(\tau) \leqslant 0$ и $\Upsilon(t) > 0$ для любого $t \in [t_0, \tau)$. Если для индивидуальной задачи с длительностями работ $p_i = \alpha_i \Upsilon(s_i)$ выполнены условия* (1) *и* (2), *то для любого $s_i \in [t_0, \tau)$ время завершения работы J_i меньше τ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $C_i = s_i + \alpha_i \Upsilon(s_i)$. Так как $s_i < \tau$, то по условию (2) $s_i + \alpha_i \Upsilon(s_i) < \tau + \alpha_i \Upsilon(\tau) \leqslant \tau$. Лемма 1 доказана.

Предположим, что целевая функция не убывает от времени окончания каждой работы. Это условие выполняется для всех рассматриваемых далее задач. Тогда из условий (1) и (2) следует, что в оптимальном расписании машина работает без простоев и расписание полностью определяется последовательностью π выполнения работ. Такую последовательность будем называть *расписанием.* Более того, из из условий (1) и (2) согласно лемме 1 следует, что если для некоторого $\tau > t_0$ выполняется $\Upsilon(\tau) \leqslant 0$, то все работы заканчиваются до момента τ и их длительность строго положительна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [4]. Пусть $\mathscr{P}$ — множество всех перестановок π из элементов множества J. Функционал $f(\pi)$ на множестве $\mathscr{P}$ называется 1-*приоритетно порождающим*, если существует функционал $\omega(i)$ такой, что для любых элементов i, l и любых перестановок $\pi^1 = (\pi_1, i, l, \pi_2)$ и $\pi^2 = (\pi_1, l, i, \pi_2)$ из $\mathscr{P}$ выполняются соотношения:

$$(a) \text{ если } \omega(i) > \omega(l), \quad \text{то } \ f(\pi^1) \leqslant f(\pi^2);$$
$$(b) \text{ если } \omega(i) = \omega(l), \quad \text{то } \ f(\pi^1) = f(\pi^2).$$

Величина $\omega(i)$ называется *приоритетом* элемента i.

Теорема 1 [4]. *Пусть $\pi \in \mathscr{P}$ и функционал $F(\pi)$ является 1-приоритетно порождающим на множестве $\mathscr{P}$. Тогда $F(\pi)$ принимает минимальное значение на любой перестановке, в которой элементы упорядочены по невозрастанию их приоритетов.*

§ 2. Линейные функции

Если $\Upsilon(t) = at + b$ и время выполнения работы J_i равно

$$p_i = \alpha_i(as_i + b), \tag{3}$$

то задачу будем называть задачей с пропорциональными линейными длительностями. Если $a = 0$, то получаем задачи теории расписаний с постоянными длительностями. Случай $b = 0$ изучался в [2, 20].

Для рассматриваемых задач неравенства (1) и (2) принимают следующий вид:

$$at_0 + b > 0, \tag{4}$$

$$-\alpha_i a < 1 \text{ при всех } J_i \in J. \tag{5}$$

Заметим, что если в рассматриваемой задаче $a < 0$ и выполняются условия (4) и (5), то согласно лемме 1 все работы заканчиваются до момента $-b/a$.

Рассмотрим задачу $1|p_i = \alpha_i(as_i + b)|C_{\max}$.

Теорема 2. *Пусть в индивидуальной задаче $1|p_i = \alpha_i(as_i + b)|C_{\max}$ выполнены неравенства (4) и (5). Тогда любая перестановка работ дает оптимальное расписание и величина $C_{\max}$ вычисляется по следующей формуле:*

$$C_{max} = \begin{cases} t_0 + b\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i & \text{при } a = 0, \\ (t_0 + b/a)\prod\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i a + 1) - b/a & \text{при } a \neq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. Покажем, что момент завершения n работ задается формулой (6) и не зависит от порядка их выполнения. Для случая $a = 0$ утверждение очевидно. Для случая $a \neq 0$ доказательство проведем индукцией по числу работ. Рассмотрим произвольную перестановку π из n работ. Без ограничения общности можно считать, что работы занумерованы по порядку от 1 до n. Для $n = 1$ равенство выполнено.

Пусть оно выполнено для $n = k - 1$. Тогда имеем

$$
\begin{aligned}
C_k &= C_{k-1} + p_k = (t + b/a)\prod_{i=1}^{k-1}(\alpha_i a + 1) - b/a + \alpha_k(as_k + b) \\
&= (t + b/a)\prod_{i=1}^{k-1}(\alpha_i a + 1) - b/a \\
&+ \alpha_k a\left((t + b/a)\prod_{i=1}^{k-1}(\alpha_i a + 1) - b/a\right) + \alpha_k b \\
&= (\alpha_k a + 1)(t + b/a)\prod_{i=1}^{k-1}(\alpha_i a + 1) + \alpha_k b - \alpha_k b - b/a \\
&= (t + b/a)\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i a + 1) - b/a.
\end{aligned}
$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 2 позволяет применять классическую технику для решения задач с пропорциональными линейными длительностями. Действительно, рассмотрим задачу $1|p_i = \alpha_i(as_i + b), prec|f_{\max}$, в которой на одной машине требуется выполнить n работ с отношением предшествования между работами. Для каждой работы J_i задана стоимостная функция $f_i(C_i)$. Все функции f_i являются неубывающими и могут быть различны для разных работ. Требуется построить расписание работ, минимизирующее функцию $f_{\max} = \max\limits_{J_i \in J} f_i$.

Аналогично классическому случаю применение правила Лолэ [16] позволяет найти оптимальную перестановку, решающую эту задачу.

Правило Лолэ. Пусть $L \subseteq J$ — множество работ, у которых нет последующих, и работа $J_l \in L$ такова, что

$$f_l(C_n) = \min_{i \in L} f_i(C_n),$$

где C_n вычисляется по формуле (6). Тогда существует оптимальное расписание, в котором работа J_l выполняется последней.

Повторив правило Лолэ для оставшихся работ, не более чем за $O(n^2)$ элементарных операций получим оптимальное расписание.

Теорема 3. *Пусть в индивидуальной задаче $1|p_i = \alpha_i(as_i + b)$, $prec|f_{\max}$ выполнены неравенства (4) и (5). Тогда построенная по правилу Лолэ перестановка является оптимальной.*

Доказательство. По лемме 1 величина C_n не зависит от последовательности работ и может быть найдена за полиномиальное время.

Дальнейшее рассуждение совпадает с доказательством аналогичного результата для задачи с фиксированными длительностями и впервые было опубликовано Е. Лолэ [16]. Обозначим через $f^\star_{\max}(J)$ значение целевой функции в оптимальном расписании. Тогда выполняются следующие неравенства:

$$f^\star_{\max}(J) \geqslant \min_{J_i \in L} f_i(C_n), \tag{7}$$

$$f^\star_{\max}(J) \geqslant f^\star_{\max}(J \setminus J_i) \text{ для всех } J_i. \tag{8}$$

Пусть работа $J_l \in L$ такова, что $f_l(C_n) = \min_{J_i \in L} f_i(C_n)$. Обозначим через $f_l(J)$ значение оптимальной целевой функции при условии, что J_l выполняется последней. Тогда

$$f_l(J) = \max\{f_l(C_n), f^\star_{\max}(J \setminus l)\}.$$

Из последнего равенства и неравенств (7), (8) следует, что $f^\star_{\max}(J) \geqslant f_l(J)$ и существует оптимальное расписание, в котором работа J_l выполняется последней. Теорема 3 доказана.

Далее в этом параграфе рассмотрим одномашинные задачи со следующими критериями оптимальности: минимизация максимального запаздывания, минимизация взвешенной суммы времен завершения всех работ и минимизация числа запаздывающих работ. В случае, когда длительности работ постоянны, все эти задачи являются полиномиально разрешимыми. В [20] показано, что одномашинные задачи с этими критериями остаются полиномиально разрешимыми и для случая, когда $p_i = \alpha_i s_i$. Сформулируем аналогичные результаты для задач $1|p_i = \alpha_i(as_i + b)|L_{\max}$, $1|p_i = \alpha_i(as_i + b)|\Sigma w_i C_i$.

Теорема 4. *Пусть для индивидуальной задачи $1|p_i = \alpha_i(as_i + b)|L_{\max}$ выполнены условия (4) и (5). Тогда любая перестановка работ по неубыванию величин d_i является оптимальной.*

Доказательство аналогично доказательству для задачи с постоянными длительностями (см., например, [13, 20]).

Теорема 5. *Пусть для индивидуальной задачи $1|p_i = \alpha_i(as_i + b)|\Sigma w_i C_i$ выполнены условия (4) и (5). Тогда любая перестановка работ по невозрастанию величин $w_i(\alpha_i^{-1} + a)$ является оптимальной.*

Доказательство аналогично доказательству для задачи с постоянными длительностями (см., например, [18, 20]).

Рассмотрим задачу о минимизации числа запаздывающих работ $1|p_i = \alpha_i(as_i + b)|\Sigma U_i$. Классическая задача $1||\Sigma U_i$ с тем же критерием оптимальности решается алгоритмом Ходжсона — Мура [18] за $O(n \log n)$ операций. Аналогичный алгоритм рассматривался в [20] для

задачи $1|p_i = \alpha_i s_i|\Sigma U_i$. Обозначим через J^* множество незапаздывающих работ в оптимальном расписании и без ограничения общности будем считать, что нумерация работ в алгоритме на шаге 5 совпадает с построенной последовательностью.

Алгоритм 1 [20].

Шаг 1. Полагается $J^* := J$.

Шаг 2. Работы упорядочиваются по неубыванию величин d_i.

Шаг 3. Если никакая работа из J^* в последовательности не запаздывает, то стоп. Последовательность оптимальна.

Шаг 4. В полученной последовательности находится первая запаздывающая работа. Пусть J_k является такой работой.

Шаг 5. Находится работа J_i такая, что $\alpha_i = \max\limits_{j=1,\dots,k} \alpha_j$. Полагается $J^* := J^* \setminus J_i$. Работа J_i ставится последней в J^*. Полагается $J^* := J^* \setminus J_i$ и осуществляется возврат на шаг 3.

Конец.

Теорема 6. *Пусть в индивидуальной задаче* $1|p_i = \alpha_i(as_i + b)|\Sigma U_i$ *выполнены условия* (4) *и* (5). *Тогда алгоритм* 1 *находит оптимальное расписание за* $O(n^2)$ *элементарных операций.*

Доказательство аналогично доказательству, приведенному в [20] для случая, когда $p_i = \alpha_i s_i$.

§ 3. Выпуклые и вогнутые функции

Рассмотрим задачи с нелинейными функциями длительности, для которых удается найти оптимальную перестановку за полиномиальное от числа работ время.

Пусть $\Upsilon(t)$ — непрерывная выпуклая функция, удовлетворяющая условиям (1) и (2). Примерами таких функций для $t_0 = 0$ являются следующие: $\Upsilon(t) = \exp(t)$, $\Upsilon(t) = t^2+1$, $\Upsilon(t) = 1/(t+1)$, $\Upsilon(t) = |t-1|+1$. Как было отмечено выше, в первых двух примерах условия (1) и (2) выполняются для любых α_i, а для $\Upsilon(t) = |t-1|+1$ и $\Upsilon(t) = 1/(t+1)$ задача $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|F$ хорошо определена, если $\alpha_i < 1$ для каждой работы J_i.

Рассмотрим задачу $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|L_{\max}$. Пусть параметры задачи удовлетворяют следующему ограничению:

$$d_i \leqslant d_l \text{ для всех } J_i, J_j \text{ таких, что } \alpha_i < \alpha_l. \qquad (9)$$

Теорема 7. *Пусть* $\Upsilon(t)$ — *выпуклая функция при* $t \geqslant t_0$, *а индивидуальная задача* $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|L_{\max}$ *удовлетворяет условиям* (1), (2) *и* (9). *Тогда любая перестановка работ по неубыванию величин* $\alpha_i + d_i$ *является оптимальной.*

Доказательство. Покажем, что целевая функция $L_{\max}$ является 1-приоритетно порождающим функционалом с приоритетом $\omega_i = -\alpha_i - d_i$. Рассмотрим два расписания $\pi^1 = (\pi_1, J_i, J_l, \pi_2)$ и $\pi^2 = (\pi_1, J_l, J_i, \pi_2)$, отличающиеся друг от друга только положением двух работ J_l и J_i. Предположим, что

$$\alpha_l + d_l > \alpha_i + d_i. \tag{10}$$

Тогда для работ J_l и J_i выполняются неравенства $\alpha_l \geqslant \alpha_i$ и $d_l \geqslant d_i$. Сначала докажем первое неравенство. Предположим обратное, т. е. пусть $\alpha_l < \alpha_i$. Тогда из [9] следует, что $d_i \leqslant d_l$, и, складывая два последних неравенства, получаем противоречие.

Неравенство $d_l \geqslant d_i$ в случае $\alpha_l > \alpha_i$ следует из (9), а в случае $\alpha_l = \alpha_i$ следует из (10).

Покажем, что если $\alpha_l \geqslant \alpha_i$, то

$$C_{\max}(\pi_1, J_l, J_i) \geqslant C_{\max}(\pi_1, J_i, J_l). \tag{11}$$

Обозначим через $\bar{t}$ время завершения последней работы из перестановки π_1. Тогда имеем

$$C_{\max}(\pi_1, J_l, J_i) = \bar{t} + \alpha_l \Upsilon(\bar{t}) + \alpha_i \Upsilon(\bar{t} + \alpha_l \Upsilon(\bar{t})), \tag{12}$$

$$C_{\max}(\pi_1, J_i, J_l) = \bar{t} + \alpha_i \Upsilon(\bar{t}) + \alpha_l \Upsilon(\bar{t} + \alpha_i \Upsilon(\bar{t})). \tag{13}$$

Рассмотрим линейную функцию

$$R(t) = t\frac{\Upsilon(\bar{t} + \alpha_l \Upsilon(\bar{t})) - \Upsilon(\bar{t})}{\alpha_l \Upsilon(\bar{t})} + \frac{\Upsilon(\bar{t})(\bar{t} + \alpha_l \Upsilon(\bar{t})) - \bar{t}\Upsilon(\bar{t} + \alpha_l \Upsilon(\bar{t}))}{\alpha_l \Upsilon(\bar{t})}.$$

Так как

$$R(\bar{t}) = \Upsilon(\bar{t}), R(\bar{t} + \alpha_l R(\bar{t})) = \Upsilon(\bar{t} + \alpha_l \Upsilon(\bar{t})), \tag{14}$$

то, подставив (14) в (12), получаем

$$C_{\max}(\pi_1, J_l, J_i) = \bar{t} + \alpha_l R(\bar{t}) + \alpha_i R(\bar{t} + \alpha_l R(\bar{t})). \tag{15}$$

Из теоремы 2 и линейности функции $R(t)$ следует равенство

$$\bar{t} + \alpha_l R(\bar{t}) + \alpha_i R(\bar{t} + \alpha_l R(\bar{t})) = \bar{t} + \alpha_i R(\bar{t}) + \alpha_l R(\bar{t} + \alpha_i R(\bar{t})). \tag{16}$$

Тогда из (15) и (16) имеем

$$C_{\max}(\pi_1, J_l, J_i) = \bar{t} + \alpha_i R(\bar{t}) + \alpha_l R(\bar{t} + \alpha_i R(\bar{t})). \tag{17}$$

Из (14) и предположения $\alpha_l > \alpha_i$ следует, что $\bar{t} < \bar{t} + \alpha_i R(\bar{t}) = \bar{t} + \alpha_i \Upsilon(\bar{t}) < \bar{t} + \alpha_l \Upsilon(\bar{t})$. Тогда из выпуклости функции $\Upsilon(t)$ вытекает неравенство $R(\bar{t} + \alpha_i R(\bar{t})) \geqslant \Upsilon(\bar{t} + \alpha_i \Upsilon(\bar{t}))$. Сравнив выражения в равенствах (13) и (17), получим $C_{\max}(\pi_1, J_l, J_i) \geqslant C_{\max}(\pi_1, J_i, J_l)$.

Итак, имеем

$$L_{\max}(\pi_1, J_l, J_i) = \max\{L_{\max}(\pi_1); C_{\max}(\pi_1, J_l) - d_l; C_{\max}(\pi_1, J_l, J_i) - d_i\}; \tag{18}$$

$$L_{\max}(\pi_1, J_i, J_l) = \max\{L_{\max}(\pi_1); C_{\max}(\pi_1, J_i) - d_i; C_{\max}(\pi_1, J_i, J_l) - d_l\}. \tag{19}$$

Из (11) и неравенства $d_l \geqslant d_i$ получаем

$$C_{\max}(\pi_1, J_l, J_i) - d_i \geqslant C_{\max}(\pi_1, J_i, J_l) - d_l. \tag{20}$$

Кроме того,

$$C_{\max}(\pi_1, J_l, J_i) - d_i \geqslant C_{\max}(\pi_1, J_i) - d_i. \tag{21}$$

Из (18)–(21) следует, что $L_{\max}(\pi_1, J_l, J_i) \geqslant L_{\max}(\pi_1, J_i, J_l)$. Из последнего неравенства и из (11) получаем $L_{\max}(\pi^1) \geqslant L_{\max}(\pi^2)$.

Осталось показать, что если $\alpha_l + d_l = \alpha_i + d_i$, то $L_{\max}(\pi^1) = L_{\max}(\pi^2)$. Покажем, что из равенства $\alpha_l + d_l = \alpha_i + d_i$ вытекает равенство $\alpha_l = \alpha_i$ и, следовательно, $d_l = d_i$. Действительно, пусть $\alpha_l > \alpha_i$. Тогда из (9) следует, что $d_l \geqslant d_i$ и $\alpha_l + d_l > \alpha_i + d_i$. Противоречие. Таким образом, параметры работ J_i и J_l совпадают и $L_{\max}(\pi^1) = L_{\max}(\pi^2)$.

Тогда согласно определению 1 целевая функция $L_{\max}$ является 1-приоритетно порождающим функционалом с приоритетом $\omega_i = -\alpha_i - d_i$ и по теореме 1 любая перестановка, в которой работы расположены по неубыванию величин $\alpha_i + d_i$, является оптимальной. Теорема 7 доказана.

Следствие 1. *Пусть $\Upsilon(t)$ — выпуклая функция при $t \geqslant t_0$, а индивидуальная задача $1|p_i = \alpha_i \Upsilon(s_i)|C_{\max}$ удовлетворяет условиям (1) и (2). Тогда любая перестановка работ по неубыванию величин α_i является оптимальной.*

Рассмотрим задачу $1|p_i = \alpha_i \Upsilon(s_i)|\Sigma w_i C_i$.

Теорема 8. *Пусть $\Upsilon(t)$ — выпуклая функция при $t \geqslant t_0$, а индивидуальная задача $1|p_i = \alpha_i \Upsilon(s_i)|\Sigma w_i C_i$ удовлетворяет условиям (1) и (2). Тогда*

a) если $\Upsilon(t) \geqslant 0$ для всех t, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{d\Upsilon(t)}{dt} = \infty$ и $w_i \geqslant w_l$ для всех J_i, J_l таких, что $\alpha_i < \alpha_l$, то любая перестановка работ по неубыванию величин $\alpha_i - w_i$ задает оптимальное расписание;

b) если $\Upsilon(t) \geqslant 0$ для всех t, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{d\Upsilon(t)}{dt} = H$ и

$$w_i(\alpha_i^{-1} + H) \geqslant w_l(\alpha_l^{-1} + H) \tag{22}$$

для всех J_i, J_l таких, что $\alpha_i < \alpha_l$, то любая перестановка работ по неубыванию величин $\alpha_i - w_i(\alpha_i^{-1} + H)$ задает оптимальное расписание;

c) *если существует* $\tau > t_0$ *такой, что* $\Upsilon(\tau) = 0$, *и* $\Upsilon(t) > 0$ *при любом* $t \in [t_0, \tau)$ $\lim_{t \to \tau - 0} \frac{d\Upsilon(t)}{dt} = H$, *а* $w_i(\alpha_i^{-1} + H) \geqslant w_l(\alpha_l^{-1} + H)$ *для всех* J_i, J_l *таких, что* $\alpha_i < \alpha_l$, *то любая перестановка работ по неубыванию величин* $\alpha_i - w_i(\alpha_i^{-1} + H)$ *задает оптимальное расписание.*

Доказательство проведем для случая b).

Рассмотрим два расписания $\pi^1 = (\pi_1, J_i, J_l, \pi_2)$ и $\pi^2 = (\pi_1, J_l, J_i, \pi_2)$, отличающиеся друг от друга только положением двух работ J_l и J_i. Предположим, что

$$\alpha_l - w_l(\alpha_l^{-1} + H) > \alpha_i - w_i(\alpha_i^{-1} + H). \qquad (23)$$

Убедимся в том, что для работ J_l и J_i выполняется неравенства $\alpha_l \geqslant \alpha_i$ и $w_l(\alpha_l^{-1} + H) \leqslant w_i(\alpha_i^{-1} + H)$. Сначала докажем первое неравенство. Предположим обратное, т. е. что $\alpha_l < \alpha_i$. Тогда из (22) следует, что $w_l(\alpha_l^{-1} + H) \leqslant w_i(\alpha_i^{-1} + H)$. Вычитая последнее неравенство из предыдущего, получаем противоречие.

Неравенство $w_l(\alpha_l^{-1} + H) \leqslant w_i(\alpha_i^{-1} + H)$ в случае $\alpha_l > \alpha_i$ следует из (22), а в случае $\alpha_l = \alpha_i$ — из (23).

Обозначим через $\bar{t}$ время завершения работ из перестановки π_1. Тогда

$$f(\pi_1, J_l, J_i) = f(\pi_1) + w_l\bar{t} + w_l\alpha_l\Upsilon(\bar{t}) + w_i\bar{t} + w_i\alpha_l\Upsilon(\bar{t}) + w_i\alpha_i\Upsilon(\bar{t} + \alpha_l\Upsilon(\bar{t})),$$
$$f(\pi_1, J_i, J_l) = f(\pi_1) + w_i\bar{t} + w_i\alpha_i\Upsilon(\bar{t}) + w_l\bar{t} + w_l\alpha_i\Upsilon(\bar{t}) + w_l\alpha_l\Upsilon(\bar{t} + \alpha_i\Upsilon(\bar{t})).$$

Далее имеем

$$f(\pi_1, J_l, J_i) - f(\pi_1, J_i, J_l) = w_l\alpha_l\Upsilon(\bar{t}) + w_i\alpha_l\Upsilon(\bar{t}) + w_i\alpha_i\Upsilon(\bar{t} + \alpha_l\Upsilon(\bar{t})) - w_i\alpha_i\Upsilon(\bar{t}) - w_l\alpha_i\Upsilon(\bar{t}) - w_l\alpha_l\Upsilon(\bar{t} + \alpha_i\Upsilon(\bar{t})). \qquad (24)$$

Рассмотрим линейную функцию $R(t) = at + b$, определенную в предыдущей теореме. Подставив (14) в (24), получаем

$$f(\pi_1, J_l, J_i) - f(\pi_1, J_i, J_l) = w_l\alpha_l R(\bar{t}) + w_i\alpha_l R(\bar{t}) + w_i\alpha_i R(\bar{t} + \alpha_l R(\bar{t})) - w_i\alpha_i R(\bar{t}) - w_l\alpha_i R(\bar{t}) - w_l\alpha_l\Upsilon(\bar{t} + \alpha_i\Upsilon(\bar{t})).$$

Из выпуклости функции $\Upsilon(t)$ следует, что

$$f(\pi_1, J_l, J_i) - f(\pi_1, J_i, J_l) \geqslant w_l\alpha_l R(\bar{t}) + w_i\alpha_l R(\bar{t}) + w_i\alpha_i R(\bar{t} + \alpha_l R(\bar{t})) - w_i\alpha_i R(\bar{t}) - w_l\alpha_i R(\bar{t}) - w_l\alpha_l R(\bar{t} + \alpha_i R(\bar{t})).$$

Заменив $R(t)$ на $at + b$, получаем

$$f(\pi_1, J_l, J_i) - f(\pi_1, J_i, J_l) \geqslant (at + b)\alpha_l\alpha_i(w_i(\alpha_i^{-1} + a) - w_l(\alpha_l^{-1} + a)).$$

Заметим, что согласно (5) $(\alpha_i^{-1} + a) \geqslant 0$ для любой работы J_i. Тогда если $w_i \geqslant w_l$, то $f(\pi_1, J_l, J_i) - f(\pi_1, J_i, J_l) \geqslant 0$. Если $w_i < w_l$, то из выпуклости функции $\Upsilon(t)$ следует, что $a \leqslant H$ и $f(\pi_1, J_l, J_i) - f(\pi_1, J_i, J_l) \geqslant$

$(at+b)\alpha_l\alpha_i(w_i(\alpha_i^{-1}+H)-w_l(\alpha_l^{-1}+H))\geqslant 0$. Итак, $f(\pi_1,J_l,J_i)\geqslant f(\pi_1,J_i,J_l)$. Кроме того, из $\alpha_l\geqslant\alpha_i$ согласно следствию 2 имеем $C_{\max}(\pi_1,J_l,J_i)\geqslant C_{\max}(\pi_1,J_i,J_l)$. Поэтому $f(\pi^1)\geqslant f(\pi^2)$.

Предположим, что $\alpha_l-w_l(\alpha_l^{-1}+H)=\alpha_i-w_i(\alpha_i^{-1}+H)$. Тогда из (22) следует, что $\alpha_l=\alpha_i$, $w_l=w_i$. Поэтому $f(\pi^1)=f(\pi^2)$. По теореме 1 любая перестановка, в которой работы расположены по неубыванию величин $\alpha_i-w_i(\alpha_i^{-1}+H)$, является оптимальной. Случай b) доказан. Доказательство случаев a) и c) проводится аналогично. Теорема 8 доказана.

Следствие 2. *Пусть $\Upsilon(t)$ — выпуклая функция при $t\geqslant t_0$, а индивидуальная задача $1|p_i=\alpha_i\Upsilon(s_i)|\Sigma C_i$ удовлетворяет условиям* (1) *и* (2). *Тогда любая перестановка работ по неубыванию величин α_i является оптимальной.*

Проиллюстрируем результат теоремы 8 на примерах.

Пример 1. Пусть $\Upsilon(t)=y^t$, $y>1$ и параметры задачи $1|p_i=\alpha_i\Upsilon(s_i)|w_iC_i$ удовлетворяют следующему ограничению:

$$w_i\geqslant w_l \text{ для всех } J_i \text{ и } J_l \text{ таких, что } \alpha_i<\alpha_l.$$

Тогда любая перестановка работ по неубыванию величин α_i-w_i задает оптимальное расписание.

Пример 2. Пусть $\Upsilon(t)=t^y$, $y>1$, $t_0>0$ и параметры задачи $1|p_i=\alpha_i\Upsilon(s_i)|w_iC_i$ удовлетворяют следующему ограничению:

$$w_i\geqslant w_l \text{ для всех } J_i \text{ и } J_l \text{ таких, что } \alpha_i<\alpha_l.$$

Тогда любая перестановка работ по неубыванию величин α_i-w_i задает оптимальное расписание.

Пример 3. Пусть $\Upsilon(t)=t^{-y}$, $y>0$, $t_0>0$ и параметры задачи $1|p_i=\alpha_i\Upsilon(s_i)|w_iC_i$ удовлетворяют следующему ограничению:

$$w_i\alpha_i^{-1}\geqslant w_l\alpha_l^{-1} \text{ для всех } J_i \text{ и } J_l \text{ таких, что } \alpha_i<\alpha_l.$$

Тогда любая перестановка работ по неубыванию величин α_i-w_i/α_i задает оптимальное расписание.

В заключение рассмотрим случай, когда $\Upsilon(t)$ является вогнутой функцией при $t\geqslant t_0$. Примерами таких функций являются функции $\Upsilon(t)=\sqrt{t}$, $\Upsilon(t)=\log t$. Проведя рассуждения, аналогичные случаю, когда $\Upsilon(t)$ является выпуклой функцией, получаем следующие результаты.

Рассмотрим задачу $1|p_i=\alpha_i\Upsilon(s_i)|L_{\max}$. Пусть параметры задачи удовлетворяют следующему ограничению:

$$d_i\geqslant d_l \text{ для всех } J_i \text{ и } J_l \text{ из } J \text{ таких, что } \alpha_i<\alpha_l. \qquad (25)$$

Теорема 9. *Пусть $\Upsilon(t)$ — вогнутая функция при $t \geqslant t_0$, а индивидуальная задача $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|L_{\max}$ удовлетворяет условиям (1), (2) и (25). Тогда любая перестановка работ по невозрастанию величин $\alpha_i - d_i$ является оптимальной.*

Доказательство. Поскольку условия (25) являются аналогом условий (9) в теореме 7, то, проводя аналогичные рассуждения, получаем утверждение теоремы.

Следствие 3. *Пусть $\Upsilon(t)$ — вогнутая функция при $t \geqslant t_0$, а индивидуальная задача $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|C_{\max}$ удовлетворяет условиям (1) и (2). Тогда любая перестановка работ по невозрастанию величин α_i является оптимальной.*

Теорема 10. *Пусть $\Upsilon(t)$ — вогнутая функция при $t \geqslant t_0$, а индивидуальная задача $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|\Sigma w_iC_i$ удовлетворяет условиям (1) и (2). Тогда*

a) *если $\Upsilon(t) \geqslant 0$ для всех t, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{d\Upsilon(t)}{dt} = H$ и $w_i(\alpha_i^{-1} + H) \leqslant w_l(\alpha_l^{-1} + H)$ для всех J_i, J_l таких, что $\alpha_i < \alpha_l$, то любая перестановка работ по невозрастанию величин $\alpha_i + w_i(\alpha_i^{-1} + H)$ задает оптимальное расписание;*

b) *если существует $\tau > t_0$ такой, что $\Upsilon(\tau) = 0$ и $\Upsilon(t) > 0$ при любом $t \in [t_0, \tau)$, $\lim\limits_{t\to\tau-0} \frac{d\Upsilon(t)}{dt} = H$, а $w_i(\alpha_i^{-1} + H) \leqslant w_l(\alpha_l^{-1} + H)$ для всех J_i, J_l таких, что $\alpha_i < \alpha_l$, то любая перестановка работ по невозрастанию величин $\alpha_i + w_i(\alpha_i^{-1} + H)$ задает оптимальное расписание.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих теорему.

Пример 4. Пусть $\Upsilon(t) = \sqrt{t}$ и параметры задачи $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|w_iC_i$ удовлетворяют следующему ограничению:

$$w_i\alpha_i^{-1} \leqslant w_l\alpha_l^{-1} \text{ для всех } J_i \text{ и } J_l \text{ таких, что } \alpha_i < \alpha_l.$$

Тогда любая перестановка работ по невозрастанию величин $\alpha_i + w_i\alpha_i^{-1}$ задает оптимальное расписание.

Пример 5. Пусть функция $\Upsilon(t) = t + \ln t$ и параметры задачи $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|w_iC_i$ удовлетворяют следующему ограничению:

$$w_i(\alpha_i^{-1} + 1) \leqslant w_l(\alpha_l^{-1} + 1) \text{ для всех } J_i \text{ и } J_l \text{ таких, что } \alpha_i < \alpha_l.$$

Тогда любая перестановка работ по невозрастанию величин $\alpha_i + w_i$ $(\alpha_i^{-1} + 1)$ задает оптимальное расписание.

Пример 6. Пусть $\Upsilon(t) = 100 - t^2$ и параметры задачи $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|w_iC_i$ удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\alpha_i < \frac{1}{20} \text{ для всех } J_i \in J,$$

$$w_i(\alpha_i^{-1} - 20) \leqslant w_l(\alpha_l^{-1} - 20) \text{ для всех } J_i \text{ и } J_l \text{ таких, что } \alpha_i < \alpha_l.$$

Тогда любая перестановка работ по невозрастанию величин $\alpha_i+w_i(\alpha_i^{-1}-20)$ задает оптимальное расписание.

§ 4. Ступенчатые функции

Рассмотрим задачу $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|C_{\max}$ с функциями длительности вида

$$\Upsilon(t) = \begin{cases} a_1 & \text{при } t \leqslant b, \\ a_1 + a_2 & \text{при } t > b, \end{cases} \tag{26}$$

где a_1, a_2, b — положительные рациональные числа.

Для удобства вычислений предположим, что все работы готовы к выполнению в момент времени $t_0 = 0$. Заметим, что если $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_1 \leqslant b$, то задача становится тривиальной. Поэтому пусть $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_1 > b$. Тогда

$$C_{\max} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i a_1 + \sum_{i\in\{i|s_i>b\}} \alpha_i a_2. \tag{27}$$

Пусть $J_m \in J$ — работа с наибольшим α_i.

Лемма 2. *Для задачи $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|C_{\max}$ существует оптимальное расписание, в котором работа J_m начинает выполняться не позднее момента времени b и среди работ множества $\{J_i \mid s_i \leqslant b\}$ выполняется последней.*

Доказательство. Предположим, что в оптимальном расписании π работа J_m начинает выполняться после момента времени b. Пусть $J_x \in \{j_i \mid s_i \leqslant b\}$ и выполняется последней из работ этого множества. Рассмотрим перестановку π^*, в которой на месте работы J_m стоит работа J_k и наоборот. Заметим, что множества работ, которые выполняются после момента времени b, в расписаниях π и π^* отличаются только работами J_k и J_m соответственно. Обозначив пересечение этих множеств через J', получаем

$$C_{\max}(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_1 + \sum_{i\in J'} \alpha_i a_2 + \alpha_m a_2$$
$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_1 + \sum_{i\in J'} \alpha_i a_2 + \alpha_k a_2 = C_{\max}(\pi^*).$$

Следовательно, расписание π^* является оптимальным.

Предположим, что в оптимальном расписании π работа J_m начинает выполняться до момента времени b и существуют работы из $\{J_i \mid s_i \leqslant b\}$, которые выполняются после нее.

Пусть $J_k \in \{J_i \mid s_i \leqslant b\}$ и выполняется последней из работ этого множества. Рассмотрим перестановку π^*, в которой на месте работы J_m стоит работа J_k и наоборот. Так как $\alpha_m a_2 \geqslant \alpha_k a_2$, то момент начала каждой работы из $\{J_i \mid s_i \leqslant b\}$, кроме работы J_m, не увеличится. Обозначим через t время завершения работ из J^0 в расписании π. Тогда

$$b \geqslant s_k(\pi) = t - \alpha_k a_1 \geqslant t - \alpha_m a_1 = s_m(\pi^*).$$

Следовательно, $C_{\max}(\pi) = C_{\max}(\pi^*)$ и расписание π^* является оптимальным. Лемма 2 доказана.

Теорема 11. *Пусть $\Upsilon(t)$ — функция, заданная равенством* (26). *Тогда задача $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|C_{\max}$ является* NP-*трудной.*

Доказательство. Рассмотрим NP-полную задачу ZR о сумме размеров.

Задача ZR. При заданных целых $y_i \geqslant 1$, $i \in I$, и целом $Z \geqslant 1$ найти $I' \subseteq I$ такое, что

$$\sum_{i \in I'} y_i = Z.$$

По входу задачи ZR получим вход задачи $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|C_{\max}$. Пусть $|I| = n$ и $y = \max_{i\in I} y_i$, $Y = \sum_{i\in I} y_i$. Положим $|J| = n+1$, $\alpha_0 = \frac{yb}{a_1 Z}$ и $\alpha_i = \frac{y_i b}{a_1 Z}$ для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Покажем, что в этой задаче расписание π, в котором $C_{\max}(\pi) \leqslant \frac{b(Y+y)}{Z} + \frac{a_2 b(Y-Z)}{a_1 Z}$, существует тогда и только тогда, когда в I есть подмножество $I' \subseteq I$ такое, что сумма размеров его элементов равна Z. По лемме 2 в оптимальном расписании имеем $J_0 \in \{J^i \mid s_i \leqslant b\}$ и $s_0 \geqslant s_i$ для всех $J_i \in \{J^i \mid s_i \leqslant b\}$. Пусть в расписании π работа J_0 начинает выполняться в момент времени $b_0 \leqslant b$. Тогда

$$b \geqslant b_0 = \sum_{i\in\{i|s_i\leqslant b\}\setminus\{0\}} p_i = a_1 \sum_{i\in\{i|s_i\leqslant b\}\setminus\{0\}} \alpha_i = \sum_{i\in\{i|s_i\leqslant b\}\setminus\{0\}} \frac{y_i b}{Z}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i\in\{i|s_i\leqslant b\}\setminus\{0\}} y_i \leqslant Z. \qquad (28)$$

Вычислим длину расписания. Имеем

$$C_{\max} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_1 + \sum_{i\in\{i|s_i>b\}} \alpha_i a_2 = \sum_{i=0} \frac{y_i b}{a_1 Z} a_1 + \sum_{i\in\{i|s_i>b\}} \frac{y_i b}{a_1 Z} a_2$$
$$= \frac{b(Y+y)}{Z} + \frac{a_2 b}{a_1 Z} \sum_{i\in\{i|s_i\leqslant b\}\setminus\{0\}} y_i = \frac{b(Y+y)}{Z}$$
$$+ \frac{a_2 bY}{a_1 Z} - \frac{a_2 b}{a_1 Z} \sum_{i\in\{i|s_i\leqslant b\}\setminus\{0\}} y_i. \qquad (29)$$

Из (28) и (29) получаем, что $C_{\max}(\pi) \leqslant \frac{b(Y+y)}{Z} + \frac{a_2 b(Y-Z)}{a_1 Z}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i \in \{i | s_i \leqslant b\} \setminus \{0\}} y_i = Z.$$

Теорема 11 доказана.

Пусть a_1, α_i, b — целые положительные числа. Опишем алгоритм, который точно решает задачу $1|p_i = \alpha_i \Upsilon(s_i)|C_{\max}$ за $O(bn)$ элементарных операций.

Алгоритм 2.

Шаг 1. Находится работа $J_m \in J$ такая, что $\alpha_m = \max\limits_{J_i \in J} \alpha_i$.

Шаг 2. Решается следующая оптимизационная задача.

$$\text{Найти } J' \subseteq J/\{J_m\}, \text{ которое максимизирует величину } \sum_{J_i \in J'} \alpha_i \tag{30}$$

$$\text{при условии, что } \sum_{J_i \in J'} a_1 \alpha_i \leqslant b. \tag{31}$$

Шаг 3. Строится следующая перестановка π: сначала в произвольном порядке выполняются работы множества J', затем работа J_m и, наконец, в произвольном порядке выполняются оставшиеся работы.

Конец.

Теорема 12. *Пусть $\gamma(t)$ задается равенством (26). Тогда алгоритм 2 точно решает задачу $1|p_i = \alpha_i \Upsilon(s_i)|C_{\max}$ не более чем за $O(bn)$ элементарных операций.*

Доказательство. Из (27) следует, что целевая функция принимает минимальное значение в том случае, когда сумма $\sum\limits_{i \in \{i | s_i > b\}} \alpha_i$ минимальна. Так как

$$\sum_{i \in \{i | s_i > b\}} \alpha_i = \sum_{J_i \in J} \alpha_i - \sum_{i \in \{i | s_i \leqslant b\}} \alpha_i,$$

то для построения оптимального расписания требуется найти такое множество индексов работ $\{i \mid s_i \leqslant b\}$, чтобы сумма $\sum\limits_{i \in \{i | s_i \leqslant b\}} \alpha_i$ была максимальной. По лемме 2 имеем $J_m \in \{J_i \mid s_i \leqslant b\}$, и работа J_m выполняется последней среди таких работ. Следовательно, $\sum\limits_{i \in \{i | s_i \leqslant b\} \setminus \{m\}} \alpha_i \leqslant b$. Поэтому, решив задачу (30), (31), найдем искомое множество. Задача (30), (31) — известная задача о рюкзаке — может быть решена алгоритмом динамического программирования за $O(bn)$ элементарных операций. Трудоемкость второго шага и определяет трудоемкость всего алгоритма. Теорема 12 доказана.

Рассмотрим функцию $\Upsilon(t)$ вида

$$\Upsilon(t) = \begin{cases} a_1 + a_2, & \text{если } t < b, \\ a_1, & \text{если } t \geqslant b, \end{cases} \tag{32}$$

где a_1, a_2, b — положительные числа.

Заметим, что задача $1|p_i = \alpha_i \Upsilon(s_i)|C_{\max}$ не может быть хорошо определена, так как для любого набора α_i условие (2) не выполняется. Поэтому введем дополнительное ограничение. Пусть, начиная с момента времени 0, машина работает без простоев. Обозначим эту задачу $1|p_i = \alpha_i \Upsilon(s_i), w.i.|C_{\max}$. Тогда имеем

$$C_{\max} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_1 + \sum_{i \in \{i|s_i < b\}} \alpha_i a_2.$$

Теорема 13. *Пусть функция* $\Upsilon(t)$ *задана равенством* (32). *Тогда задача* $1|p_i = \alpha_i \Upsilon(s_i), w.i.|C_{\max}$ *является* NP-*трудной.*

Доказательство. Построим полиномиальное сведение задачи ZR к задаче $1|p_i = \alpha_i \Upsilon(s_i)|C_{\max}$. Положим $\alpha_i = \frac{y_i b}{(a_1+a_2)Z}$ для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Покажем, что в этой задаче расписание π, в котором $C_{\max}(\pi) \leqslant \frac{b a_1 Y}{(a_1+a_2)Z} + \frac{a_2 b}{a_1+a_2}$, существует тогда и только тогда, когда в I есть подмножество $I' \subseteq I$ такое, что сумма размеров его элементов равна Z. Так как по условиям задачи машина с момента времени 0 работает без простоев, то выполнение последней работы из множества $\{i \mid s_i < b\}$ заканчивается не ранее момента времени b. Следовательно,

$$b \leqslant \sum_{i \in \{i|s_i<b\}} p_i = \sum_{i \in \{i|s_i<b\}} \alpha_i (a_1 + a_2) = \sum_{i \in \{i|s_i<b\}} \frac{y_i b}{Z}$$

и

$$\sum_{i \in \{i|s_i<b\}} y_i \geqslant Z. \tag{33}$$

Далее имеем

$$C_{\max} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_1 + \sum_{i \in \{i|s_i<b\}} \alpha_i a_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i b}{(a_1+a_2)Z} a_1 + \sum_{i \in \{i|s_i<b\}} \frac{y_i b}{a_1 Z} a_2$$
$$= \frac{bYa_1}{(a_1+a_2)Z} + \frac{a_2 b}{(a_1+a_2)Z} \sum_{i \in \{i|s_i<b\}} y_i. \tag{34}$$

Из (33) и (34) получаем, что

$$C_{\max}(\pi) \leqslant \frac{b a_1 Y}{(a_1+a_2)Z} + \frac{a_2 b}{a_1 + a_2}$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i \in \{i | s_i < b\}} y_i = Z.$$

Теорема 13 доказана.

Пусть a_1, a_2, α_i, b — целые положительные числа. Опишем алгоритм, который точно решает задачу $1|p_i = \alpha_i \Upsilon(s_i), w.i.|C_{\max}$ за $O(bn)$ элементарных операций.

Алгоритм 3.

Шаг 1. Решается следующая оптимизационная задача.

$$\text{Найти } J' \subseteq J, \text{ которое минимизирует величину } \sum_{J_i \in J'} \alpha_i$$

$$\text{при условии, что } \sum_{J_i \in J'} (a_1 + a_2)\alpha_i \geqslant b.$$

Шаг 2. Строится следующая перестановка π: сначала в произвольном порядке выполняются работы множества J' и затем в произвольном порядке выполняются оставшиеся работы.

Конец.

Теорема 14. *Пусть функция* $\Upsilon(t)$ *задана равенством* (32). *Тогда алгоритм* 3 *позволяет находить точное решение задачи* $1|p_i = \alpha_i \Upsilon(s_i), w.i.|C_{\max}$ *не более чем за* $O(bn)$ *элементарных операций.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 13.

В заключение рассмотрим задачу $1|p_i = \alpha_i \Upsilon(s_i)|C_{\max}$, в которой функция $\Upsilon(t)$ имеет вид (32) и простои на машине допускаются.

Пусть порядок запуска работ на выполнение фиксирован. Тогда длина оптимального расписания относительно этого порядка находится следующим образом.

Для каждой работы J_i вычисляются величины s_i и C_i при условии, что работы выполняются без простоев. Если момент завершения последней работы меньше b, то расписание оптимально. В противном случае находится работа J_k такая, что $s_k < b \leqslant C_k$. Тогда если $s_k + \alpha_k a_2 < b$, то в оптимальном расписании относительно заданного порядка работа J_k начинает выполняться в момент времени s_k, в противном случае — в момент времени b.

Таким образом, как и в рассмотренных выше задачах, достаточно найти оптимальную перестановку π для нахождения оптимального расписания. Пусть $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ — некоторая перестановка, $k(\pi) = \max\{k \mid (a_1 + a_2) \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{\pi_i} < b\}$, $J^0(\pi) = \{\pi_i \mid i = 1, \dots, k(\pi)\}$. Тогда

длина кратчайшего расписания S_π, задаваемого перестановкой работ π, определяется по формуле

$$C_{\max}(S_\pi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_1 + \sum_{i \in J^0(\pi)} \alpha_i a_2 + \min\{0; b + a_1\alpha_{k(\pi)} - \sum_{i \in J^0(\pi)} \alpha_i(a_1 + a_2)\}.$$

Теорема 15. *Если функция* $\Upsilon(t)$ *задана равенством* (34), *то задача* $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|C_{\max}$ *является* NP-*трудной.*

Доказательство. Сведем задачу ZR к задаче $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|C_{\max}$. Положим $\alpha_i = \frac{y_i b}{(a_1+a_2)Z}$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Проведя рассуждения, аналогичные рассуждениям из доказательств теорем 12 и 14, получим, что в задаче $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|C_{\max}$ расписание π, в котором $C_{\max}(\pi) \leqslant \frac{ba_1Y}{(a_1+a_2)Z} + \frac{a_2 b}{a_1+a_2}$, существует тогда и только тогда, когда в I есть подмножество $I' \subseteq I$ такое, что сумма размеров его элементов равна Z. Теорема 15 доказана.

Пусть a_1, a_2, α_i и b — целые положительные числа. Опишем алгоритм, который точно решает задачу $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|C_{\max}$ за $O(bn)$ элементарных операций.

Алгоритм 4.

Шаг 1. Решается следующая оптимизационная задача.

$$\text{Найти } J' \subseteq J, \text{ которое минимизирует величину } \sum_{J_i \in J'} \alpha_i \tag{35}$$

$$\text{при условии, что } \sum_{J_i \in J'} (a_1 + a_2)\alpha_i \geqslant b. \tag{36}$$

Шаг 2. Строится перестановка π_1: сначала в произвольном порядке выполняются работы множества J' и затем в произвольном порядке выполняются оставшиеся работы.

Шаг 3. Решается следующая оптимизационная задача.

$$\text{Найти } J' \subseteq J, \text{ которое максимизирует величину } \sum_{J_i \in J'} \alpha_i \tag{37}$$

$$\text{при условии, что } \sum_{J_i \in J'} (a_1 + a_2)\alpha_i \leqslant b. \tag{38}$$

Шаг 4. Строится расписание π_2: сначала в произвольном порядке выполняются работы множества J', а затем с момента времени b в произвольном порядке выполняются оставшиеся работы.

Шаг 5. Вычисляются значения функционалов $C_{\max}(\pi_1)$ и $C_{\max}(\pi_2)$. Перестановка, на которой значение функционала меньше, берется в качестве решения.

Конец.

Теорема 16. *Пусть функция $\Upsilon(t)$ задана равенством* (32). *Тогда алгоритм* 3 *точно решает задачу* $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|C_{\max}$ *за* $O(bn)$ *элементарных операций.*

Доказательство. Как было отмечено выше, в оптимальном решении задачи $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|C_{\max}$ либо машина работает без простоев, либо машина заканчивает выполнять работы множества $J^0\setminus\{k(\pi)\}$ не позднее момента времени b и затем с момента времени b выполняет оставшиеся работы. На шагах 1 и 2 находится оптимальная перестановка, когда машина работает без простоев. На шагах 3 и 4 находится оптимальная перестановка, когда моменту b предшествует простой. Полученные решения сравниваются и из них выбирается оптимальное. Трудоемкость алгоритма определяется трудоемкостью решения задачи (35), (36) и задачи (37), (38) и равна $O(bn)$. Теорема 16 доказана.

Отметим, что в формулировках теорем 11, 13 и 15 не указано, являются ли числа a_1, a_2, b частью входа задачи $1|p_i = \alpha_i\Upsilon(s_i)|C_{\max}$ или нет. Однако доказательства теорем справедливы в обоих случаях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кононов А. В.** О расписаниях работ на одной машине с длительностями, нелинейно зависящими от времени // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 1. С. 21–35.
2. **Кононов А. В.** Комбинаторная сложность составления расписаний для работ с простым линейным ростом длительностей // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 2. С. 15–32.
3. **Мельников О. Н., Шафранский Я. М.** Параметрическая задача теории расписаний // Кибернетика. 1979. № 3. С. 53–57.
4. **Танаев В. С., Гордон В. С., Шафранский Я. М.** Теория расписаний. Одностадийные системы. М.: Наука, 1984.
5. **Browne S., Yechiali U.** Scheduling deteriorating jobs on a single processor // Oper. Res. 1990. V. 38, N 3. P. 495–498.
6. **Chen Z-L.** A note on single-processor scheduling with time-dependent execution times // Oper. Res. Lett. 1995. V. 17, N 3. P. 127–129.
7. **Chen Z-L.** Parallel machine scheduling with time dependent processing times // Discrete Appl. Math. 1996. V. 70, N 1. P. 81–93.
8. **Conway R. W., Maxwell W. L., Miller L. W.** Theory of scheduling. Reading, MA: Addison-Wesley, 1967.
9. **Gawiejnowicz S.** Brief survey of continuous models of scheduling // Found. Comput. Decision Sci. 1996. V. 21, N 2. P. 81–100.
10. **Gawiejnowicz S., Pankowska L.** Scheduling jobs with varying processing times // Inform. Process. Lett. 1995. V. 54, N 3. P. 175–178.

11. **Gupta J. N. D., Gupta S. K.** Single facility scheduling with nonlinear processing times // Computers Ind. Engng. 1988. V. 14, N 4. P. 387–393.
12. **Ho K. I.-J., Leung J. Y.-T., Wei W. D.** Complexity of scheduling tasks with time-dependent execution times // Inform. Process. Lett. 1993. V. 48, N 6. P. 315–320.
13. **Jackson J. R.** Scheduling a production line to minimize maximum tardiness. Research Report 43. Management Science Research Project, University of California, Los-Angeles, 1955.
14. **Kononov A. V.** Scheduling problems with linear increasing processing times // Oper. Res. Proc. 1996. Berlin: Springer, 1997. P. 208–212.
15. **Kunnathur A. S., Gupta S. K.** Minimizing the makespan with late start penalties added to processing times in a single facility scheduling problem // European J. Oper. Res. 1990. V. 47, N 1. P. 56–64.
16. **Lawler E. L.** Optimal sequencing of a single machine subject to precedence constraints // Management Sci. 1973. V. 19, N 5. P. 544–546.
17. **Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., Shmoys D. B.** Sequensing and scheduling: algorithms and complexity. Centrum voor Wiskunde en Informatica Report BS-R8909, 1989.
18. **Moore J. M.** An n job, one machine sequencing algorithm for minimizing the number of late jobs // Management Sci. 1968. V. 15, N 1. P. 102–109.
19. **Mosheiov G.** V-shaped policies for scheduling deteriorating jobs // Oper. Res. 1991. V. 39, N 6. P. 979–991.
20. **Mosheiov G.** Scheduling jobs under simple linear deterioration // Comput. Oper. Res. 1994. V. 21, N 6. P. 653–659.
21. **Sundararaghavan P. S., Kunnathur A. S.** Single machine scheduling with start time dependent processing times: some solvable cases // European J. Oper. Res. 1994. V. 78, N 3. P. 394–403.
22. **Woeginger G. J.** Scheduling with time-dependent execution times // Inform. Process. Lett. 1995. V. 54, N 3. P. 155–156.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: alvenko@math.nsc.ru

Статья поступила
3 декабря 1997 г.,
переработанный вариант —
1 сентября 1998 г.