ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1998. Серия 1. Том 5, № 3, 38–43

УДК 519.714

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ СИМВОЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, ПОРОЖДАЕМЫХ СИММЕТРИЧЕСКИМИ БУЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ*)

Ю. В. Мерекин

Для символьных последовательностей, порожденных симметрическими булевыми функциями, в классе схем конкатенации слов получена квадратичная верхняя оценка сложности. Для последовательностей, порожденных поясковыми симметрическими функциями, доказана уточненная оценка. Для одного подкласса последовательностей получена линейная верхняя оценка сложности.

Существует ряд моделей синтеза символьных последовательностей. Так, в работе [3] при синтезе символьных последовательностей в алфавите A к уже построенной части слова присоединяется произвольное подслово построенного слова или подслово, дополненное буквой из A. При возведении числа в заданную степень с использованием символьной последовательности в однобуквенном алфавите [5] разрешается присоединять только построенные ранее фрагменты.

При синтезе слов в произвольном алфавите с помощью операции конкатенации А. А. Евдокимов предложил многократно использовать уже построенные слова, подобно тому как это делается при реализации булевых функций схемами из функциональных элементов [1]. Ниже мы используем такой подход. Он представляется естественным. Для некоторых классов символьных последовательностей изучается сложность их синтеза.

Рассматриваются слова в алфавите $\{0,1\}$. *Длиной* слова W называется число входящих в него символов. Операция *конкатенации* слов U и V определяется как запись слова V за словом U и обозначается через $U \bullet V$. В некоторых случаях знак $\bullet$ опускается. Слово V называется

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01800).

подсловом слова W, если для некоторых (возможно, пустых) слов X и Y справедливо равенство $W = X \bullet V \bullet Y$.

Последовательность слов $0, 1, X, Y, \dots, Z$ называется *схемой конкатенации* слова Z и обозначается через $S(Z)$, если для любого слова W из этой последовательности, начиная со слова X, в ней имеются такие слова U, V (возможно, $U = V$), предшествующие слову W, что $W = U \bullet V$.

Обозначим через $L(S(Z))$ число слов в последовательности $X, Y, \dots, Z$ и $L(S(Z))$ назовем *сложностью* схемы $S(Z)$. Пусть $L(Z) = \min L(S(Z))$, где минимум берется по всевозможным схемам конкатенации слова Z. Величина $L(Z)$ называется *мультипликативной сложностью* слова Z.

Булева функция называется *симметрической*, если она не меняется при любом переименовании ее переменных. В настоящей работе устанавливается верхняя оценка для мультипликативной сложности слова, задаваемого столбцом значений произвольной симметрической булевой функции от n переменных, когда этот столбец является столбцом значений функции при лексикографическом перечислении наборов значений переменных. При этом, не уменьшая общности, предполагается, что набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ меньше набора $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, если $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k$ при некотором $k < n$ и $\alpha_{k+1} = \beta_{k+1}$.

Из определения симметрической функции следует, что она принимает одно и то же значение на всех наборах с одинаковым числом единиц. Очевидно, что каждая симметрическая булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ может быть задана последовательностью $(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ такой, что σ_i есть значение функции $f(x_1, \dots, x_n)$ на любом наборе значений переменных, содержащих i единиц и $n - i$ нулей. Такую последовательность $(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ назовем *характеристической* для $f(x_1, \dots, x_n)$.

Обозначим через $\mathscr{S}_{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n}(f(x_1, \dots, x_n))$ слово длины 2^n, являющееся столбцом значений симметрической булевой функции с характеристической последовательностью $(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Ниже мы используем отображение ξ последовательности $\widehat{\alpha}$ слов $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ в последовательность $\widehat{\beta}$ слов $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}$, определяемое следующим образом: $\widehat{\beta} = \xi(\widehat{\alpha}) = \alpha_0 \bullet \alpha_1,\ \alpha_1 \bullet \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1} \bullet \alpha_r$. Ясно, что в результате r-кратного применения отображения ξ к последовательности $\widehat{\alpha}$ получается одно слово $\xi^r(\widehat{\alpha})$.

Теорема 1. *Если последовательность $(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ является характеристической для симметрической функции $f(x_1, \dots, x_n)$, то*

$$\xi^n(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = \mathscr{S}_{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n}(f(x_1, \dots, x_n)).$$

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — симметрическая функция с характеристической последовательностью $(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Эту

функцию представим в виде

$$f(x_1,\dots,x_n)=\bar{x}_1 f(0,x_2,\dots,x_n)\vee x_1 f(1,x_2,\dots,x_n).$$

Ясно, что $f(0,x_2,\dots,x_n)$ и $f(1,x_2,\dots,x_n)$ являются симметрическими функциями с характеристическими последовательностями $(\sigma_0,\dots,\sigma_{n-1})$ и $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ соответственно.

Теперь воспользуемся индукцией по n. При $n=1$ имеем $\xi(0,0)=\mathscr{S}_{00}=00$; $\xi(0,1)=\mathscr{S}_{01}=01$; $\xi(1,0)=\mathscr{S}_{10}=10$; $\xi(1,1)=\mathscr{S}_{11}=11$. Предположим, что теорема верна при любом $k\leqslant n-1$. Убедимся в ее справедливости при $k=n$.

Используя определение отображения ξ, нетрудно видеть, что

$$\xi^n(\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_n)=\xi^{n-1}(\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\bullet\xi^{n-1}(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n).$$

По предположению индукции имеем

$$\xi^{n-1}(\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})=\mathscr{S}_{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}}(f(0,x_2,\dots,x_n)),$$
$$\xi^{n-1}(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)=\mathscr{S}_{\sigma_1\sigma_2,\dots\sigma_n}(f(1,x_2,\dots,x_n)).$$

Поэтому

$$\xi^n(\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_n)$$
$$=\mathscr{S}_{\sigma_0\sigma_1\dots\sigma_{n-1}}(f(0,x_2,\dots,x_n))\bullet\mathscr{S}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n}(f(1,x_2,\dots,x_n)).$$

Пользуясь этим фактом и тем, что столбец значений функции $f(x_1,\dots,x_n)$ является конкатенацией столбцов значений функций $f(0,x_2,\dots,x_n)$ и $f(1,x_2,\dots,x_n)$, имеем

$$\xi^n(\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_n)=\mathscr{S}_{\sigma_0\sigma_1\dots\sigma_n}(f(x_1,\dots,x_n)).$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *При любом $n\geqslant 1$ и любой последовательности $\widehat{\sigma}=(\sigma_0,\dots,\sigma_n)$ справедливо неравенство*

$$L(\xi^n(\widehat{\sigma}))\leqslant\binom{n+1}{2}.$$

Доказательство. Слова последовательности $\xi(\widehat{\sigma})$ получаются в результате конкатенации символов 0 и 1, а слова последовательности $\xi^i(\widehat{\sigma})$ — в результате конкатенации слов последовательности $\xi^{i-1}(\widehat{\sigma})$, $2\leqslant i\leqslant n$. Следовательно, последовательность $S(\xi^n(\widehat{\sigma}))=0,1,\xi(\widehat{\sigma}),\dots,\xi^n(\widehat{\sigma})$ есть схема конкатенации слова $\xi^n(\widehat{\sigma})$. Последовательность $\xi^i(\widehat{\sigma})$, $1\leqslant i\leqslant n$, содержит $n-i+1$ слово. Поэтому

$$L(S(\xi^n(\widehat{\sigma})))=n+\sum_{i=1}^{n-1}=\binom{n+1}{2}.$$

Теорема 2 доказана.

В схеме $S(\xi^n(\widehat{\sigma}))$ каждая последовательность $\xi^i(\widehat{\sigma})$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, содержит слова одинаковой длины и каждое слово может встретиться более одного раза. Во всех $n-1$ последовательностях удалим некоторые слова, оставив для каждого слова по одному представителю. В результате «чистки» путем удаления некоторых слов схемы $S(\xi^n(\widehat{\sigma}))$ получим схему конкатенации слова $\xi^n(\widehat{\sigma})$ с меньшей сложностью. Установим условие, позволяющее проводить «чистку» схемы $S(\xi^n(\widehat{\sigma}))$.

Лемма 1. *Если в последовательности $\widehat{\sigma}$ имеются две одинаковые подпоследовательности $(\sigma_v, \sigma_{v+1}, \ldots, \sigma_{v+s})$ и $(\sigma_w, \sigma_{w+1}, \ldots, \sigma_{w+s})$, $v \geqslant 0$, $w \geqslant 0$, $v \neq w$, $s \geqslant 1$, то в схеме $S(\xi^n(\widehat{\sigma}))$ конкатенации слова $\xi^n(\widehat{\sigma})$ содержится $\binom{s+1}{2}$ продублированных слов.*

Доказательство. Пусть $v = 0$, $w = n-s$. Рассмотрим два случая: $2s \leqslant n$ и $2s > n$.

Для $2s \leqslant n$ позиции символов $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s$, σ_{n-s}, $\sigma_{n-s+1}, \ldots, \sigma_n$ в последовательности $\widehat{\sigma}$ не пересекаются (кроме случая $2s = n$) и все слова одинаковых подпоследовательностей $\xi^t(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ и $\xi^t(\sigma_{n-s}$, σ_{n-s+1}, $\ldots, \sigma_n)$ встречаются в последовательностях $\xi^t(\widehat{\sigma})$ при всех t, $1 \leqslant t \leqslant s$, на разных позициях. Следовательно, все слова всех подпоследовательностей $\xi^t(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s)$, $1 \leqslant t \leqslant s$, продублированы и схема $S(\xi^n(\widehat{\sigma}))$ содержит $(s+1)s/2$ продублированных слов.

Для $2s > n$ одинаковые последовательности $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ и $(\sigma_{n-s}$, $\sigma_{n-s+1}, \ldots, \sigma_n)$ располагаются на всех $n+1$ позициях и справедливы равенства символов $\sigma_i = \sigma_{i+(n-s)}$, $0 \leqslant i \leqslant s$. Для каждой последовательности $\xi^j(\widehat{\sigma})$, $1 \leqslant j \leqslant s$, из равенства символов $\sigma_i = \sigma_{i+(n-s)}$, $0 \leqslant i \leqslant s$, следуют равенства слов, расположенных на позициях, отстоящих друг от друга на расстоянии $(n-s)$. Следовательно, в каждой последовательности $\xi^j(\widehat{\sigma})$, $1 \leqslant j \leqslant s$, все слова, занимающие позиции, начиная с позиции $(n-s)$, продублированы и схема $S(\xi^n(\widehat{\sigma}))$ содержит $(s+1)s/2$ продублированных слов. Лемма 1 доказана.

Последовательность $\widehat{\sigma}$, в которой все символы $\sigma_k, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_m$, $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$, равны единице, а все остальные — нулю, обозначим через $\widehat{\sigma}(k,m)$. Слово $\xi^n(\widehat{\sigma}(k,m))$ задает столбец значений поясковой симметрической булевой функции, т. е. функции, принимающей единичное значение на наборах, содержащих не менее k и не более m единиц.

Теорема 3. *При любых $n \geqslant 1$, $k \geqslant 0$, m, $n \geqslant m \geqslant k$, справедливы неравенства*

$$L(\xi^n(\widehat{\sigma}(k,m))) \leqslant \binom{n+1}{2} - \binom{n-m}{2} - \binom{k-1}{2} - \binom{m-k}{2} \text{ при } k \geqslant n-m,$$

$$L(\xi^n(\widehat{\sigma}(k,m))) \leqslant \binom{n+1}{2} - \binom{n-m-1}{2} - \binom{k}{2} - \binom{m-k}{2} \text{ при } k \leqslant n-m.$$

Доказательство. Пусть $k \geqslant n-m$. Последовательность $\widehat{\sigma}(k,m)$ содержит две одинаковые подпоследовательности $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-m-1})$ и $(\sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \ldots, \sigma_n)$. По лемме 1 схема $S(\xi^n(\widehat{\sigma}(k,m)))$ содержит $\binom{n-m}{2}$ продублированных слов, образующих подпоследовательности $\xi^i(\sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \ldots, \sigma_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n-m$. Удалим их из схемы. Затем (используя попарно одинаковые последовательности $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-2})$ и $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k-1})$; $(\sigma_k, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_{m-1})$ и $(\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \ldots, \sigma_m)$) из схемы последовательно удалим $\binom{k-1}{2}$ и $\binom{m-k}{2}$ слов. Справедливость первого неравенства теоремы 3 доказана. Поменяв k на m и m на k, получим второе утверждение теоремы 3.

Последовательность $\widehat{\sigma}$, в которой $\sigma_i = \sigma_{i+u}$, $0 \leqslant i \leqslant n-u$, обозначим через $\widehat{\sigma}(u)$.

Теорема 4. *При любых $n \geqslant 1$, $u \geqslant 1$, $n > u$, справедливо неравенство*

$$L(\xi^n(\widehat{\sigma}(u))) \leqslant \binom{n+1}{2} - \binom{n-u+1}{2}.$$

Доказательство. Последовательность $\widehat{\sigma}(u)$ содержит две одинаковые подпоследовательности $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-u})$ и $(\sigma_u, \sigma_{u+1}, \ldots, \sigma_n)$. По лемме 1 схема $S(\xi^n(\widehat{\sigma}(u)))$ содержит $\binom{n-u+1}{2}$ продублированных слов. Теорема 4 доказана.

При $u = 2$ верхняя оценка теоремы 4 совпадает с известной точной оценкой [2] для последовательности Туэ–Морса [4, с. 23].

Автор выражает благодарность С. В. Августиновичу за обсуждение результатов и полезные советы в процессе оформления работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1984.
2. **Мерекин Ю. В.** Нижняя оценка сложности для схем конкатенации слов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 1. С. 52–56.
3. **Lempel A., Ziv J.** On the complexity of finite sequences // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1976. V. IT-22, N 1. P. 75–81.

4. **Lotaire M.** Combinatorics on words. Reading, MIT: Addison-Wisley Publ. Co., 1983. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications; V. 17).

5. **Scholz A.** Jahresbericht der Deutschen Mathematiker // Vereiningung (11). 1937. Bd 47. S. 41–42.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
10 февраля 1998 г.