ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1998. Серия 1. Том 5, № 3, 44–63

УДК 519.6

МИНИМАЛЬНЫЕ САМОКОРРЕКТИРУЮЩИЕСЯ СХЕМЫ ДЛЯ ОДНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ*)

Н. П. Редькин

Представлены минимальные 1-самокорректирующиеся схемы для последовательности булевых функций $p_1 = x_1y_1, \ldots, p_n = x_ny_n \vee (x_n \vee y_n)p_{n-1}, \ldots$ Ветвление выходов элементов в схемах исключается, т. е. рассматриваемые схемы являются, по существу, формулами над $\{\&, \vee\}$ (или над $\{\&, \vee, ^{-}\}$). В схемах допускаются одиночные константные неисправности заданного типа на выходах элементов; при этом всякий ненадежный элемент в неисправном состоянии реализует заданную булеву константу, например 0. Предполагается, что каждый ненадежный элемент имеет вес 1, а каждый надежный элемент имеет вес P, где $P \geqslant 3$.

Введение

Рассматриваются схемы из функциональных элементов над базисом Б $= \{x \mathbin{\&} y,\ x \vee y\}$ [1], в которых выходы элементов не «ветвятся», т. е. выход каждого элемента схемы соединяется не более чем с одним входом какого-нибудь элемента этой схемы. Фактически такие схемы представляют собой формулы над Б [4]. Однако здесь более удобно воспользоваться языком схем, а не языком формул.

Одно из направлений математической теории надежности схем связано с изучением самокорректирующихся схем [5]. Такие схемы, как обычно предполагается, можно строить из надежных и ненадежных функциональных элементов. Каждый надежный элемент имеет вес P ($P > 0$) и всегда реализует некоторую приписанную ему функцию из Б. Каждый ненадежный элемент в исправном состоянии реализует некоторую приписанную ему функцию из Б, а в неисправном состоянии — булеву константу δ ($\delta \in \{0, 1\}$). Вес каждого ненадежного элемента

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01068) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (код проекта 473).

равен единице. Схема S, реализующая булеву функцию f, называется 1-*самокорректирующейся*, если S реализует f как при исправном состоянии всех ее элементов, так и при переходе в неисправное состояние любого одного ненадежного элемента; далее в этой работе 1-самокорректирующиеся схемы будем называть *самокорректирующимися*.

Сложность $L_1(S)$ самокорректирующейся схемы S определяется как сумма весов всех ее элементов. Сложность самокорректирующейся схемы, которая реализует булеву функцию f и имеет минимальную сложность, обозначается через $L_1(f)$. Самокорректирующаяся схема S, реализующая булеву функцию f, называется *минимальной*, если $L_1(S) = L_1(f)$.

В данной работе исследуются минимальные самокорректирующиеся схемы, реализующие булевы функции с линейной (относительно числа переменных) сложностью.

§ 1. Предварительные замечания

Известно, что построение минимальных схем (не обладающих свойством самокорректирования), реализующих конкретные булевы функции, сопряжено со значительными трудностями, возникающими, как правило, при доказательстве нижних оценок сложности схем. Эти трудности возрастают при получении соответствующих оценок для сложности самокорректирующихся схем. Правда, в некоторых случаях минимальные (или асимптотически минимальные) схемы, в том числе и самокорректирующиеся, для конкретных булевых функций могут быть построены достаточно просто. Поясним это на примерах.

Рассмотрим последовательность булевых функций (конъюнкций) $K_n(\tilde{x}) = x_1x_2\ldots x_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Легко заметить, что конъюнкция $K_n(\tilde{x})$ может быть реализована минимальной (по числу элементов) схемой из $n-1$ двухвходовых конъюнкторов. Формально нижнюю оценку сложности минимальных схем в данном случае нетрудно доказать индукцией по n с использованием следующего утверждения [2]: из минимальной схемы, которая реализует функцию K_n, можно удалить по крайней мере один элемент и получить схему, реализующую функцию K_{n-1}. Это утверждение, в свою очередь, легко доказывается с использованием следующих рассуждений:

a) в произвольной минимальной схеме S, реализующей функцию K_n, имеется элемент E, на вход которого подается некоторая переменная, скажем x_n;

b) при подаче константы 1 на вход схемы, соответствующий переменной x_n, из схемы S можно удалить по крайней мере элемент E и получить схему S', которая реализует функцию K_{n-1}. Заметим, что

в данном простом примере нижнюю оценку для сложности минимальной схемы можно обосновать еще и так. Поскольку схема реализует функцию K_n, существенно зависящую от n переменных, то в ней должно быть по крайней мере n входов, на которые подаются эти переменные. Элементы же базиса имеют не более чем по два входа. Отсюда следует, что в схеме должно быть не менее $n-1$ элементов.

Если $n > 2$, а веса надежных элементов достаточно велики, например $P > 4$, то и минимальные самокорректирующиеся схемы для K_n построить нетрудно. Допустим, что ненадежные элементы в неисправном состоянии выдают константу 0. В таком случае можно взять две одинаковые минимальные схемы, реализующие функцию K_n, и выходы этих схем соединить с входами надежного дизъюнктора. В результате получится самокорректирующаяся схема S_1, в которой на выходе дизъюнктора реализуется функция K_n; сложность этой схемы равна $2n-2+P$.

Доказательство минимальности схемы S_1 остается в основном прежним. Но здесь вместо пункта а) можно утверждать следующее: в произвольной минимальной самокорректирующейся схеме S, реализующей функцию K_n $(n \geqslant 4)$, переменная x_n подается либо на вход хотя бы одного надежного элемента, либо на входы по крайней мере двух ненадежных элементов. В случае, когда x_n подается на вход лишь одного какого-то ненадежного элемента E, при переходе в неисправное состояние элемента E реализуемая схемой функция не зависит от x_n, что недопустимо для самокорректирующейся схемы. Значит, при подаче константы 1 на вход схемы, соответствующий переменной x_n, из схемы S_1 можно удалить либо хотя бы один надежный элемент, либо по крайней мере два ненадежных элемента и получить самокорректирующуюся схему S_1', реализующую функцию K_{n-1}. Поэтому для обоснования индукции остается только доказать, что сложность самокорректирующейся схемы, реализующей функцию K_3, не меньше 8, но это делается уже достаточно просто.

Достаточно простой выглядит задача построения минимальных (или хотя бы асимптотически минимальных) схем и в случаях, когда сложность схем фактически определяется числом выходов у них. Рассмотрим, к примеру, задачу реализации системы $Q_n = \{x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}\}$ для всех 2^n конъюнкций от n переменных. Очевидно, что любая схема, реализующая булев $(n, 2^n)$-оператор Q_n, должна иметь по крайней мере 2^n различных элементов, на выходах которых реализуются 2^n требуемых конъюнкций. Следовательно, сложность схемы для Q_n не может быть меньше 2^n. С другой стороны, для реализации Q_n нетрудно построить схему, сложность которой асимптотически не превосходит 2^n. Если говорить о минимальной самокорректирующейся схеме для Q_n, то ясно, что в этой схеме все 2^n выходных элементов должны быть

надежными. Поэтому ее сложность будет не менее чем $2^n P$. С другой стороны, нетрудно построить самокорректирующуюся схему для Q_n, сложность которой асимптотически не превосходит $2^n P$. Отсюда получаем асимптотику для сложности минимальных самокорректирующихся схем, реализующих функцию Q_n.

Теперь предположим, что последовательность булевых (n, m_n)-операторов $F_{n,m_n} = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{m_n}(x_1, \dots, x_n))$ такова, что начиная с некоторых значений n сложность реализации F_{n,m_n} не меньше $c(n + m_n)$, где $c > 1$ (буквой c здесь и ниже обозначаем константы; $n = 1, 2 \dots$). В этом случае строить минимальные схемы так же просто, как и в приведенных выше примерах, уже невозможно. Здесь приходится достаточно детально исследовать индивидуальные свойства реализуемых булевых функций и локальные свойства реализующих эти функции схем (или условия, которым должны удовлетворять эти схемы). И только с учетом таких свойств проводится, в частности, доказательство минимальности схем. Именно такого типа пример минимальных самокорректирующихся схем рассматривается ниже.

§ 2. Формулировка результата и верхняя оценка сложности самокорректирующихся схем для функции переноса $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$

Определим по индукции следующую последовательность булевых функций $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$: $p_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = p_1(x_1, y_1) = x_1 y_1$, $p_n(\tilde{x}, \tilde{y}) = p_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = x_n y_n \vee (x_n \vee y_n) p_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1})$ $(n = 2, 3, \dots)$.

Легко заметить, что функция $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ задает перенос в старший $(n+1)$-й разряд суммы, возникающий при арифметическом сложении двух n-разрядных двоичных чисел $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ (предполагается, что x_1 и y_1 — младшие разряды).

Теорема. *Если $P \geqslant 3$ и $n > 1$, то при однотипных константных неисправностях на выходах элементов*

$$L_1(p_n(\tilde{x}, \tilde{y})) = 8n - 6 + P.$$

Доказательство. Верхняя оценка. Для определенности будем считать, что на выходах ненадежных элементов возникают константные неисправности типа 0, т. е. $\delta = 0$; при $\delta = 1$ в доказательство достаточно внести почти очевидные изменения. Из индуктивного определения функции переноса $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ следует, что $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ можно реализовать схемой из $4n - 3$ элементов ($2n - 2$ дизъюнкторов и $2n - 1$ конъюнкторов). Возьмем две такие схемы из ненадежных элементов и выходы

этих схем соединим со входами надежного дизъюнктора (или конъюнктора при $\delta = 1$). В результате получим самокорректирующуюся схему, которая имеет сложность $8n - 6 + P$ и реализует функцию $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$. Тем самым верхняя оценка установлена.

Нижняя оценка теоремы получается индукцией по n с использованием доказываемых ниже лемм 2 и 4.

§ 3. Минимальные схемы без самокорректирования для $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$

Найдем сложность реализации функции $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ обычными схемами, т. е. схемами без самокорректирования.

Пусть $L(S)$ обозначает сложность (т. е. число элементов) обычной схемы S. Сложность схемы, которая реализует булеву функцию f и имеет минимальную сложность, обозначается через $L(f)$. Схема S, реализующая булеву функцию f, называется *минимальной*, если $L(S) = L(f)$.

Лемма 1. *При любом натуральном* n

$$L(p_n(\tilde{x}, \tilde{y})) = 4n - 3.$$

Доказательство. Верхняя оценка $L(p_n(\tilde{x}, \tilde{y})) \leqslant 4n - 3$ следует из индуктивного задания функции $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$. Нижние оценки здесь и далее будем доказывать в предположении, что на входы схем наряду с переменными можно подавать константы 0 и 1. Ясно, что эти оценки останутся справедливыми и в случае, когда на входы схем разрешается подавать только переменные. В данном случае нижняя оценка легко устанавливается индукцией по n с использованием очевидного равенства $L(p_1) = 1$ и доказываемого ниже при $n \geqslant 2$ неравенства $L(p_n) \geqslant L(p_{n-1}) + 4$ (при доказательстве последнего неравенства учитываются достаточно простые свойства схем [2], обычно используемые при получении нижних оценок сложности).

Пусть S — минимальная схема, реализующую функцию $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$. Предположим, что в S имеются элементы E_1, E_2 и переменная x_i (или y_i), $i > 1$, такие, что x_i подается на один вход элемента E_1 и на один вход элемента E_2. Поскольку ни один из элементов E_1, E_2, очевидно, не может быть выходным элементом схемы, а схема минимальна, то выход одного из элементов, скажем элемента E_1, должен подаваться на вход некоторого элемента E_3, отличного от E_2. Положим $x_i = \chi(E_1)$; здесь и далее $\chi(E) = 0$, если E — конъюнктор, и $\chi(E) = 1$, если E — дизъюнктор. При этом константа $\chi(E_1)$ будет реализована на выходе элемента E_1 и подана на входы элементов E_2, E_3. Если элементы E_1, E_2, E_3 удалить из схемы S, то получится некоторая схема S_1, реализующая

функцию $p_n(x_1, \ldots, x_{i-1}, \chi(E_1), x_{i+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. Поскольку эта функция существенно зависит от y_i, то в S_1 найдется хотя бы один элемент E_4, на вход которого подается y_i. Положим $y_i = \overline{\chi}(E_1)$. В схеме S_1 константа $\overline{\chi}(E_1)$ окажется поданной на вход элемента E_4; этот элемент можно удалить из S_1 и получить некоторую схему S_2, реализующую функцию $p_n(x_1, \ldots, x_{i-1}, \chi(E_1), x_{i+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{i-1}, \overline{\chi}(E_1), y_{i+1}, \ldots, y_n)$, т. е. функцию p_{n-1}. Отсюда и получается требуемое неравенство $L(p_n) \geqslant L(p_{n-1}) + 4$ (поскольку, очевидно, $L(S_2) \geqslant L(p_{n-1})$). Остается убедиться, что первоначально указанные элементы E_1 и E_2 обязательно найдутся.

Выделим в S все те элементы, на все входы которых подаются переменные. Из выделенных элементов отметим элемент E, на вход которого подается переменная x_i (или y_i) с наибольшим номером i (если имеется несколько таких элементов, то отметим произвольный из них). Пусть y_j (или x_j) — другая переменная, подаваемая на второй вход элемента E; в силу минимальности схемы имеем $x_i \neq y_j$, а по построению $i \geqslant j$. Если $i > 1$, то в схеме S обязательно найдется по крайней мере один элемент E' (отличный от E), на вход которого подается x_i; иначе при $y_j \equiv \chi(E)$ реализуемая схемой функция не зависит от x_i, тогда как функция $p_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{j-1}, \chi(E), y_{j+1}, \ldots, y_n)$ при $i > 1$ и любой константе $\chi(E)$ существенно зависит от x_i. В этом случае в качестве ранее упоминавшихся элементов E_1 и E_2 можно взять элементы E и E'.

Предположим теперь, что $i = 1$, т. е. если на оба входа какого-либо элемента схемы S подаются переменные, то этими переменными являются x_1 и y_1. В этом случае, как нетрудно заметить, в схеме S найдется элемент E_1 такой, что

a) на один вход элемента E_1 подается переменная, скажем, x_i с номером $i > 1$;

b) второй вход элемента E_1 соединен с выходом подсхемы S_1, на входы которой подаются только переменные x_1, y_1.

Поскольку схема минимальна, то S_1 реализует некоторую функцию $\psi_1(x_1, y_1)$, отличную от константы. Поэтому найдутся некоторые значения α, β переменных x_1, y_1 такие, что $\psi_1(\alpha, \beta) = \chi(E_1)$. Но отсюда вытекает, что в схеме S переменная x_i должна подаваться на вход хотя бы одного какого-нибудь элемента E_2, отличного от E_1. В противном случае при подаче вместо x_1, y_1 констант α, β на вход элемента E_1 оказалась бы подана константа $\chi(E_1)$ и функция на выходе схемы не зависела бы от x_i, тогда как $p_n(\alpha, x_2, \ldots, x_n, \beta, y_2, \ldots, y_n)$ при любых α и β зависит от x_i. Таким образом, и в этом случае требуемые элементы E_1, E_2 в схеме имеются. Лемма 1 доказана.

§ 4. Нижняя оценка сложности самокорректирующихся схем для $p_2(\tilde{x}, \tilde{y})$

Установим нижнюю оценку сложности реализации функции $p_2(\tilde{x}, \tilde{y})$ самокорректирующимися схемами.

Лемма 2. $L_1(p_2(x_1, x_2, y_1, y_2)) \geqslant 10 + P$.

Доказательство. Пусть S — минимальная самокорректирующаяся схема, реализующая $p_2(\tilde{x}, \tilde{y})$. В этой схеме выделим выходной элемент E_1; этот элемент, очевидно, должен быть надежным. В зависимости от вида E_1 рассмотрим следующие случаи:

1) элемент E_1 — конъюнктор;

2) элемент E_1 — дизъюнктор.

Случай 1. Входы элемента E_1 должны быть соединены с выходами некоторых элементов E_2, E_3 (если на вход элемента E_1 подается, скажем, переменная x_1, то при $x_1 \equiv 0$ на выходе схемы реализуется константа 0, а должна реализовываться функция $p_2(0, x_2, y_1, y_2)$, отличная от константы 0). Элементы E_1, E_2, E_3 должны быть надежными, иначе при неисправности хотя бы одного из этих элементов на выходе схемы S реализуется константа 0. Если хотя бы один из элементов E_2, E_3 (скажем, E_2) — конъюнктор, то входы этого элемента должны быть соединены с выходами других элементов (если на вход элемента E_2 подается переменная, скажем, x_i, то при $x_i \equiv 0$ на выходе схемы S получается 0) и эти элементы должны быть надежными, иначе при неисправности одного из них на выходе схемы S реализуется 0. Но в таком случае $L(S) \geqslant 10 + P$.

Пусть элементы E_2, E_3 — дизъюнкторы. Только переменные на входы элементов E_2, E_3 подаваться не могут. Действительно, допустим, что на входы этих элементов подаются только переменные. Тогда x_1, y_1 должны подаваться на входы разных элементов, иначе при $x_1 = y_1 = 0$ и $x_2 = y_2 = 1$ на выходе схемы S реализуется 0, тогда как $p_2(0, 1, 0, 1) = 1$. Но если x_1, y_1 подаются на входы разных элементов, то при $x_1 = y_1 = 1$ и $x_2 = y_2 = 0$ на выходе схемы S реализуется 1, тогда как $p_2(1, 0, 1, 0) = 0$.

Значит, найдется хотя бы один элемент E_4, выход которого соединен с входом, скажем, элемента E_2. Далее будем различать два случая:

1.1) на второй вход элемента E_2 подается переменная x ($x \in \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$);

1.2) входы элемента E_2 соединены с выходами элементов E_4 и E_5.

Случай 1.1. В этом случае элемент E_4 должен быть надежным, иначе при $x \equiv 0$ и неисправном элементе E_4 на выходе схемы S реализуется константа 0. Но если при этом вход элемента E_3 соединен с выходом

хотя бы одного элемента, то $L(S) \geqslant 10 + P$. Допустим, что на входы элемента E_3 подаются только переменные. Тогда все три переменные, подаваемые на входы элементов E_2 и E_3, должны быть различными: ведь если на входы элементов E_2 и E_3 подается одна и та же переменная x, то при $x = 1$ и остальных переменных, равных нулю, на выходе схемы S реализуется 1, тогда как должен быть 0, а если одна и та же переменная x подается на оба входа элемента E_3, то при $x = 0$ и равных единице остальных переменных на выходе схемы S получается 0, тогда как должна быть единица. Но в таком случае хотя бы одна из переменных x_1, y_1, скажем x_1, подается на вход одного из элементов E_2, E_3, например E_2. Если вместо x_1 и одной из переменных, подаваемых на входы элемента E_3, подается единица, а вместо остальных переменных подается нуль, то на выходе схемы S получается 1, тогда как должен быть 0; это означает, что схема S рассматриваемого вида невозможна.

Случай 1.2. Если хотя бы один из элементов E_4, E_5 надежный, то $L(S) \geqslant 10 + P$. Пусть оба элемента E_4, E_5 — ненадежные.

Если оба входа элемента E_3 соединены с выходами некоторых элементов, то $L(S) \geqslant 10 + P$. Если на один вход элемента E_3 подается переменная x, а второй вход соединен с выходом элемента E_6, то элемент E_6 должен быть надежным (иначе при $x = 0$, равных единице остальных переменных и неисправном элементе E_6 на выходе схемы S получаем 0, тогда как должна быть 1). Поэтому $L(S) \geqslant 10 + P$.

Пусть на оба входа элемента E_3 подаются переменные. Если входы элементов E_4, E_5 соединены с выходами двух или более элементов, то $L(S) \geqslant 10 + P$. Допустим, что входы элементов E_4, E_5 соединены с выходом не более чем одного элемента. Тогда на входы по крайней мере одного из этих элементов, например E_4, подаются только переменные. Допустим, что E_4 — конъюнктор и x — одна из переменных, подаваемых на входы элемента E_4. Тогда при $x = 0$, остальных переменных, равных единице, и неисправном элементе E_5 на выходе схемы S получается 0, тогда как должна быть 1. Предположим, что E_4 — дизъюнктор. Если некоторая переменная x подается на входы элементов E_3, E_4, то при $x = 1$ и остальных переменных, равных нулю, на выходе схемы S реализуется 1, тогда как должен быть 0. Остается предположить, что все переменные, подаваемые на входы элементов E_3, E_4, попарно различны. В таком случае на вход хотя бы одного из этих элементов, скажем элемента E_3, подается переменная x_1 (или y_1, что, по существу, то же самое); пусть x — одна из переменных, подаваемых на входы элемента E_4. В таком случае при $x_1 = x = 1$ и остальных переменных, равных нулю, на выходе схемы S получается 1, а должен быть 0. Противоречие.

Случай 2. Входы дизъюнктора E_1 должны быть соединены (как

и в случае 1) с выходами некоторых элементов E_2, E_3 (если на некоторый вход дизъюнктора E_1 подается переменная x, то при $x = 1$ и остальных переменных, равных нулю, на выходе схемы S получается 1, тогда как должен быть 0). Далее рассмотрим три случая:

2.1) элементы E_2, E_3 — ненадежные;

2.2) элемент E_2 — надежный, а E_3 — ненадежный;

2.3) элементы E_2, E_3 — надежные.

Случай 2.1. В данном случае при неисправном элементе E_2 на выходе элемента E_3 должна реализовываться функция $p_2(\tilde{x}, \tilde{y})$ и согласно лемме 1 как сложность подсхемы с выходным элементом E_3, так и сложность подсхемы с выходным элементом E_2 должна быть не менее 5. Следовательно, $L(S) \geqslant 10 + P$.

Случай 2.2. В этом случае при неисправном элементе E_3 на выходе элемента E_2 должна реализовываться функция $p_2(\tilde{x}, \tilde{y})$ и согласно лемме 1 подсхема S_2 с выходным элементом E_2 содержит не менее пяти элементов. Поскольку E_2 — надежный элемент, то сложность этой подсхемы не менее $P + 4$. Если E_3 — дизъюнктор, то его входы должны быть соединены с выходами элементов (ведь если на некоторый вход элемента E_3 подается переменная x, то при $x = 1$ и остальных переменных, равных нулю, на выходе схемы S получается 1, а должен быть 0). Поэтому $L(S) \geqslant 10 + P$.

Пусть E_3 — конъюнктор. Если в подсхеме S_2 помимо E_2 есть еще хотя бы один надежный элемент, то $L(S) \geqslant 10 + P$.

Пусть все элементы схемы S_2, кроме E_2, — ненадежные. Если в подсхеме S_3 с выходным элементом E_3 помимо E_3 имеются еще хотя бы два ненадежных элемента или хотя бы один надежный элемент, то $L(S) \geqslant 10 + P$. Далее будем различать следующие случаи:

2.2.1) на входы элемента E_3 подаются переменные;

2.2.2) на один вход элемента E_3 подается переменная x, а второй вход соединен с выходом ненадежного элемента E_4, на входы которого подаются переменные.

Случай 2.2.1. В данном случае на входы элемента E_3 должны подаваться переменные x_2 и y_2 (если на входы элемента E_3 подаются, скажем, x_1 и еще какая-то переменная x, то при $x_1 = x = 1$ и остальных переменных, равных нулю, на выходе схемы S получается 1, тогда как должен быть 0). Так как на выходе элемента E_2 должна реализовываться функция p_2, то на входы элемента E_2 переменные подаваться не могут. Значит, входы элемента E_2 соединены с выходами некоторых подсхем S_2 и S_2'. Функции, реализуемые подсхемами S_2 и S_2', должны существенно зависеть от переменных x_1, x_2, y_1, y_2. Действительно, допустим, что функция φ_2, реализуемая подсхемой S_2, не зависит от некоторой

переменной $x \in \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$. Но тогда при неисправном выходном элементе подсхемы S_2' и равенстве нулю переменной, подаваемой на вход элемента E_3 и отличной от x, реализуемая схемой S функция не зависит от x, а это недопустимо.

Если же подсхемы S_2 и S_2' реализуют функции, зависящие от четырех переменных, то ясно, что в этих подсхемах имеется не менее чем по три элемента. Следовательно, $L(S) \geqslant 10 + P$.

Случай 2.2.2. На входы элемента E_4 должны подаваться различные переменные, иначе схема не будет минимальной. Из свойства 4 и минимальности схемы S следует, что переменная x, подаваемая на вход элемента E_3, должна отличаться от переменных, подаваемых на входы элемента E_4. Но в таком случае найдутся две переменные с разными номерами, например x_1 и x_2, такие, что одна из них подается на вход элемента E_4, а вторая — на вход элемента E_3. Элемент E_4 должен быть конъюнктором; иначе при $x_1 = x_2 = 1$ и $y_1 = y_2 = 0$ на выходе исправной схемы S получается 1, тогда как $p_2(1,1,0,0) = 0$.

Поскольку на выходе элемента E_2 реализуется $p_2(\tilde{x}, \tilde{y})$, то входы элемента E_2 должны быть соединены с выходами каких-то подсхем S_2, S_2', реализующих функции φ_2, φ_2'. Каждая из этих функций должна зависеть от переменных x_1, y_1, y_2. Действительно, если, например, φ_2 не зависит от x_1, то при $x_2 \equiv 0$ и неисправном выходном элементе подсхемы S_2' реализуемая схемой S функция не зависит от x_1, что недопустимо. Кроме того, поскольку на выходе элемента E_2 реализуется $p_2(\tilde{x}, \tilde{y})$, то по крайней мере одна из функций φ_2, φ_2' должна зависеть и от x_2. Значит, одна из подсхем S_2, S_2' (реализующая функцию от четырех переменных) должна содержать не менее трех элементов, а вторая подсхема — не менее двух. В этом случае $L(S) \geqslant 10 + P$.

Случай 2.3. Допустим, что на входы хотя бы одного из элементов E_2, E_3, например элемента E_2, подаются только переменные x, $x' \in \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$. Тогда E_2 — конъюнктор, иначе при $x = 1$ и остальных переменных, равных нулю, на выходе схемы S получается 1, что недопустимо. Одна из переменных x, x' отлична от x_1 и y_1, иначе при $x_1 = y_1 = 1$ и $x_2 = y_2 = 0$ на выходе схемы получается 1, тогда как $p(1,0,1,0) = 0$. Функция φ_3, реализуемая на выходе элемента E_3, должна существенно зависеть от переменных x_1, x_2, y_1, y_2. Например, если φ_3 не зависит от x_1, то одна из подаваемых на входы элемента E_2 переменных, скажем x, будет отлична от x_1 и y_1. Тогда при $x \equiv 0$ функция на выходе схемы S не зависит от x_1, что недопустимо. Следовательно, подсхема S_3, реализующая φ_3 и имеющая в качестве выходного элемента E_3, содержит не менее трех элементов. Если в S_3 помимо элемента E_3 имеется еще хотя бы один надежный элемент, то $L(S) \geqslant 10 + P$.

Пусть все элементы подсхемы S_3, кроме E_3, ненадежные. В таком случае в S_3 найдется ненадежный элемент E_4, на оба входа которого подаются переменные $y, y' \in \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$. Но тогда переменная y должна подаваться на вход еще хотя бы одного элемента подсхемы S_3, отличного от E_4. Иначе при неисправности элемента E_4 и равенстве нулю переменной, подаваемой на вход элемента E_2 и отличной от y (или даже от x_1 и y_1, если $y \in \{x_1, y_1, \}$), функция, реализуемая на выходе схемы S, не зависит от y, что недопустимо. То же самое можно сказать и про переменную y'. В итоге получается, что не менее чем на 6 входов подсхемы S_3 должны подаваться переменные. Но в таком случае в S_3 должно быть не менее пяти элементов (включая E_3). Поэтому $L(S) \geqslant 10 + P$.

Если на все входы элементов E_2, E_3 подаются только выходы других элементов, то в этом случае $L(S) \geqslant 10 + P$.

Пусть теперь на один вход элемента E_2 или E_3, скажем элемента E_2, подается переменная x, второй вход этого элемента соединен с выходом некоторого элемента E_4 и хотя бы один вход элемента E_3 соединен с выходом некоторого элемента E_5. При этом элемент E_2 должен быть конъюнктором, иначе при $x = 1$ и остальных переменных, равных нулю, на выходе схемы S получается 1. Если E_4 — надежный элемент, то $L(S) \geqslant 10 + P$.

Допустим, что E_4 — ненадежный элемент. В этом случае при неисправности элемента E_4 на выходе элемента E_1, а значит, и на выходе элемента E_3 должна реализовываться функция $p_2(\tilde{x}, \tilde{y})$. Но в таком случае подсхема S_3 с выходным элементом E_3 согласно лемме 1 должна содержать не менее пяти элементов. Поэтому $L(S) \geqslant 10 + P$. Лемма 2 доказана.

§ 5. Свойства самокорректирующихся схем

Приведем некоторые используемые далее свойства рассматриваемых самокорректирующихся схем.

Свойство 1. Если в самокорректирующейся схеме S на входы правильно работающих элементов $E_1, \dots, E_m$ подаются константы, то после удаления из S элементов $E_1, \dots, E_m$ получается самокорректирующаяся схема S', реализующая ту же функцию, что и схема S (предполагается, что после удаления указанных элементов допускается изменение соединений оставшихся в схеме элементов).

Свойство 2. Если в самокорректирующейся схеме S на выходах правильно работающих элементов $E_1, \dots, E_m$ реализуются константы, то после удаления из S элементов $E_1, \dots, E_m$ получается самокорректирующаяся схема S', реализующая ту же функцию, что и схема S.

Свойство 3. Если в самокорректирующейся схеме S выход какого-либо элемента E не является выходом схемы и не соединен с входами других элементов, то после удаления из S элемента E получается самокорректирующаяся схема, реализующая ту же функцию, что и схема S.

Свойства 1–3 известны и использовались при исследовании сложности самокорректирующихся схем [3].

Свойство 4. Если в самокорректирующейся схеме S, реализующей булеву функцию $f(x_1, \dots, x_r)$, на один вход некоторого элемента E подается переменная x_i, а второй вход этого элемента соединен с выходом подсхемы A, в которой переменная x_i подается на входы некоторых элементов $E_1, \dots, E_m$, то после удаления из S элементов $E_1, \dots, E_m$ получается самокорректирующаяся схем S', реализующая функцию $f(x_1, \dots, x_r)$.

Это свойство следует из тождеств $x_i \vee \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_r) = x_i \vee \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_r)$ и $x_i\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_r) = x_i\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_r)$. Действительно, пусть, например, элемент E — дизъюнктор. Тогда из первого тождества следует, что при одном и том же состоянии схемы S на выходе элемента E реализуется одна и та же функция как в случае, когда на входы элементов $E_1, \dots, E_m$ подается переменная x_i, так и в случае, когда на входы элементов $E_1, \dots, E_m$ вместо переменной x_i подается константа 0 (при $x_i = 1$ значение на выходе элемента E не зависит от значения на выходе подсхемы A и потому в этом случае вместо единичного значения переменной x_i на входы элементов $E_1, \dots, E_m$ можно подавать 0). Но в таком случае согласно свойству 1 элементы $E_1, \dots, E_m$ можно удалить.

Для свойства 4 существенно то обстоятельство, что в рассматриваемых схемах выходы элементов не ветвятся.

§ 6. Доказательство нижней оценки сложности самокорректирующихся схем для $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$

Обозначим через $p_n^{i,\sigma}$ функцию, получающуюся из $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ подстановкой булевой константы σ вместо переменной x_i, т. е. положим $p_n^{i,\sigma} = p_n(x_1, \dots, x_{i-1}, \sigma, x_{i+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$.

Лемма 3. *Из любой самокорректирующейся схемы, реализующей функцию $p_n^{i,\sigma}$, $i > 1$, можно удалить некоторые элементы с общим весом не менее двух и получить самокорректирующуюся схему, реализующую функцию p_{n-1}.*

Доказательство. Пусть S — произвольная самокорректирующаяся схема, реализующая функцию $p_n^{i,\sigma}$, $i > 1$. Поскольку при $i > 1$ функция $p_n^{i,\sigma}$ существенно зависит от переменной y_i, то в схеме S найдется

хотя бы один элемент E, на вход которого подается y_i. Если E — ненадежный элемент, то в схеме S найдется еще хотя бы один элемент E', на вход которого также подается переменная y_i; иначе при неисправном состоянии элемента E реализуемая схемой S функция не зависит от y_i. Положим $y_i \equiv \bar{\sigma}$. В этом случае константа $\bar{\sigma}$ будет подана в схеме S на входы некоторых элементов с общим весом не менее двух. Согласно свойству 1 эти элементы можно удалить из S и получить самокорректирующуюся схему, реализующую функцию $p_n(x_1, \dots, x_{i-1}, \sigma, x_{i+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{i-1}, \bar{\sigma}, y_{i+1}, \dots, y_n)$, т. е. функцию p_{n-1}. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Из любой самокорректирующейся схемы, реализующей функцию $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$, $n \geqslant 3$, можно удалить некоторые элементы с общим весом не менее восьми и получить самокорректирующуюся схему, реализующую функцию p_{n-1}.*

Доказательство леммы, очевидно, достаточно провести для произвольной минимальной самокорректирующейся схемы S, реализующей функцию p_n. При этом согласно лемме 3 для данной схемы S достаточно доказать одно из следующих двух утверждений:

a) из S можно удалить некоторые элементы с общим весом не менее восьми и получить самокорректирующуюся схему, реализующую функцию p_{n-1};

b) из S можно удалить некоторые элементы с общим весом не менее шести и получить самокорректирующуюся схему, реализующую $p_n^{i,\sigma}$, где $i > 1$, $\sigma \in \{0, 1\}$.

Пусть S — произвольная самокорректирующаяся схема, реализующая $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$. В S выделим все те элементы, на входы которых подаются только переменные, и рассмотрим два случая:

1) на входы всех выделенных элементов подаются только переменные x_1 и y_1;

2) на вход хотя бы одного выделенного элемента подается переменная, отличная от x_1 и y_1.

Случай 1. Ясно, что в этом случае в схеме S найдется некоторый элемент E_1, удовлетворяющий следующим условиям:

a) на один вход элемента E_1 подается переменная x_i (или y_i) с наибольшим (для заданной схемы) номером i;

b) $i \geqslant 2$;

c) второй вход элемента E_1 соединен с выходом некоторой подсхемы S_1, на входы которой подаются только переменные x_1, y_1.

Кроме того, в схеме S обязательно найдется отличный от E_1 элемент E_2, на вход которого подается переменная x_i; иначе для x_1 и y_1 можно подобрать такие значения, при которых на выходе схемы S_1 в исправной схеме S будет реализована константа $\chi(E_1)$ и реализуемая на

выходе схемы S функция не будет зависеть от x_i (тогда как при подстановке в $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ вместо x_1, y_1 любых констант получится функция, существенно зависящая от всех остальных переменных). Ясно, что ни E_1, ни E_2 не может быть выходным элементом схемы, а из минимальности S и свойства 3 следует, что за элементами E_1 и E_2 следуют еще какие-то элементы (если выход элемента E соединен с входом элемента E', то будем говорить, что элемент E предшествует элементу E', а E' следует за E).

Если хотя бы один из элементов E_1, E_2 надежный, то при $x_i \equiv \chi(E_1)$ согласно свойствам 1–3 можно удалить элементы E_1; E_2, следующий за E_1 элемент E_3 (согласно свойству 4 этот элемент не может совпадать с E_2) и подсхему S_1 с общим весом не менее шести и в результате получить самокорректирующуюся схему для $p_n^{i,\chi(E_1)}$ $(i > 1)$.

Допустим, что элементы E_1, E_2 ненадежные. В этом случае в S найдется отличный от E_1 и E_2 элемент E_3, на вход которого подается переменная x_i; иначе при некоторых подходящих значениях переменных x_1, y_1 и неисправном элементе E_2 реализуемая на выходе схемы S функция не зависела бы от x_i. Среди элементов E_1, E_2, E_3 хотя бы два элемента, скажем E_1 и E_2, окажутся одинаковыми (например, дизъюнкторами). Поскольку E_1 не может быть выходным элементом схемы S, то в силу свойства 3 за E_1 должен следовать некоторый элемент E_4, который в силу свойства 4 отличен от E_1, E_2 и E_3.

В рассматриваемом случае один из входов элемента E_2 должен быть соединен с выходом некоторой подсхемы S_2. Согласно свойству 4 подсхемы S_1, S_2 не содержат элементов E_1, E_2, E_3 и состоят из различных элементов. Но в таком случае при $x \equiv \chi(E_1) = \chi(E_2)$ можно удалить элементы E_1, E_2 (свойство 2), элементы E_3, E_4 (свойство 1) и подсхемы S_1, S_2 (свойство 3) с общим весом не менее шести и получить самокорректирующуюся схему для $p_n^{i,\chi(E_1)}$ $(i > 1)$.

Случай 2. Пусть E_1 — один из выделенных элементов схемы S, на входы которого подаются переменная x_i и какая-то переменная x ($x \in \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$), где i — наибольший возможный номер (выбор переменной x_i из $\{x_i,\ y_i\}$ не ограничивает общности, поскольку переменные x_i и y_i можно поменять местами на входах схемы). Кроме элемента E_1 в схеме найдется еще по крайней мере один элемент E_2, на вход которого подается x_i. В противном случае при $x \equiv \chi(E_1)$ реализуемая схемой S функция не зависит от x_i, что недопустимо при $x > 1$. Далее в зависимости от вида схемы рассмотрим три случая:

2.1) элементы E_1, E_2 надежные;

2.2) один из элементов E_1, E_2 надежный, а второй ненадежный;

2.3) элементы E_1, E_2 ненадежные.

Случай 2.1. В этом случае при $x_i \equiv 1$ согласно свойству 1 можно удалить элементы E_1, E_2 с весом не менее шести и получить самокорректирующуюся схему, реализующую функцию $p_n^{i,1}$.

Случай 2.2. Если x_i подается еще на вход какого-нибудь элемента E_3, отличного от E_1 и E_2, то при $x_i \equiv \chi(E_1)$ можно удалить элементы E_1, E_2, E_3 с общим весом 5 и еще хотя бы один следующий за E_1 элемент E_4, отличный от E_2 и E_3. Такой элемент E_4 имеется, поскольку E_1 не может быть выходным элементом схемы и по свойству 3 за E_1 должен следовать элемент, а элементы E_2, E_3 не могут следовать за E_1 по свойству 4.

Пусть переменная x_i подается только на входы элементов E_1, E_2. В таком случае элемент E_2 должен быть надежным, иначе при неисправности этого элемента и $x \equiv \chi(E_1)$ реализуемая схемой функция (вида $p_n^{j,\chi(E_1)}$) не будет зависеть от x_i при $i > 1$. Так как выход элемента E_2 не может быть выходом схемы, то в силу минимальности схемы S и свойства 4 найдется единственный (поскольку выходы элементов в рассматриваемых схемах не ветвятся) элемент E_3, вход которого соединен с выходом элемента E_2. Элемент E_3 должен быть надежным — иначе при неисправности элемента E_3 и $x \equiv \chi(E_1)$ реализуемая схемой S функция не зависит от x_i. Но в таком случае при $x_i \equiv \chi(E_2)$ после удаления (с использованием свойств 1 и 2) элементов E_1, E_2, E_3 с общим весом 7 получается самокорректирующаяся схема для $p_n^{i,\chi(E_2)}$.

Случай 2.3. Уточним возможный в данном случае вид схемы S. Если предположить, что переменная x_i подается только на входы элементов E_1 и E_2, то при $x \equiv \chi(E_1)$ и неисправном элементе E_2 реализуемая схемой функция не зависит от x_i, что невозможно (поскольку S — самокорректирующаяся схема). Значит, в S имеется элемент E_3 (отличный от E_1, E_2), на вход которого подается x_i. Кроме того, можно считать, что на входы надежных элементов переменная x_i не подается (если это не так, то получаем предыдущий случай).

Далее рассмотрим два случая:

2.3.1) в схеме S имеется хотя бы один элемент E_4, отличный от элементов E_1, E_2, E_3, на вход которого подается x_i;

2.3.2) переменная x_i подается только на входы элементов E_1, E_2, E_3.

Случай 2.3.1. Ясно, что среди элементов E_2, E_3, E_4 имеются два одинаковых элемента. Допустим, что такими элементами являются E_2 и E_3. Поскольку на входы элементов E_2, E_3 подается переменная x_i, то ни один из этих элементов не может быть выходным в схеме S. Из минимальности схемы S и свойства 3 вытекает, что в схеме S за элементами E_2, E_3 должны следовать еще какие-то элементы. Поскольку в силу минимальности схемы S и свойства 4 среди $E_1, \ldots, E_4$ нет двух элементов,

следующих один за другим, то следующие за E_2 и E_3 элементы не могут совпадать с элементами $E_1, \ldots, E_4$. Если за элементами E_2 и E_3 следуют два различных элемента E_5 и E_6, то при $x_i \equiv \chi(E_2) = \chi(E_3)$ согласно свойствам 1, 2 можно удалить элементы $E_1, \ldots, E_6$ и получить самокорректирующуюся схему для $p_n^{i,\chi(E_2)}$.

Допустим, что выходы элементов E_2, E_3 соединены с входами одного и того же элемента E_5. В таком случае E_5 не может быть выходным элементом схемы, поскольку при $x_i \equiv \chi(E_2)$ на выходе элемента E_5 будет реализована константа. Но тогда из минимальности схемы S и свойства 3 получаем, что за элементом E_5 следует некоторый элемент E_6, который не совпадает (в силу минимальности схемы S и свойства 4) ни с одним из элементов $E_1, \ldots, E_5$. При $x_i \equiv \chi(E_2)$ согласно свойствам 1 и 2 элементы $E_1, \ldots, E_6$ можно удалить и получить самокорректирующуюся схему для $p_n^{i,\chi(E_2)}$.

Случай 2.3.2. В данном случае рассмотрим далее два варианта:

2.3.2.1) элементы E_1, E_2, E_3 одинаковые;

2.3.2.2) среди E_1, E_2, E_3 имеются только два одинаковых элемента.

Вариант 2.3.2.1. В схеме S ни один из элементов E_1, E_2, E_3 не может быть выходным и среди E_1, E_2, E_3 нет двух элементов, следующих один за другим (в силу минимальности схемы S и свойства 4). Значит, в силу минимальности схемы S и свойства 3 за каждым из элементов E_1, E_2, E_3 следует еще некоторый элемент, не совпадающий ни с одним из элементов E_1, E_2, E_3. Если за E_1, E_2, E_3 следуют три различных элемента E_4, E_5, E_6, то при $x_i \equiv \chi(E_1)$ согласно свойствам 1 и 2 после удаления элементов $E_1, \ldots, E_6$ получится самокорректирующаяся схема для $p_n^{i,\chi(E_1)}$.

Допустим, что выходы двух элементов, например E_1 и E_2, соединены с входами одного и того же элемента E_4, а выход элемента E_3 соединен с входом элемента E_5. В таком случае E_4 не может быть выходным элементом схемы S, поскольку при $x_i \equiv \chi(E_1)$ на выходе элемента E_4 получаем константу $\chi(E_1)$. Значит, в силу минимальности схемы S и свойства 3 за E_4 должен следовать некоторый элемент. Если за E_4 следует элемент E_6, отличный от $E_1, \ldots, E_5$, то при $x_i \equiv \chi(E_1)$ согласно свойствам 1 и 2 можно удалить элементы $E_1, \ldots, E_6$ и получить самокорректирующуюся схему для $p_n^{i,\chi(E_1)}$.

Элемент E_3 не может следовать за E_4 в силу минимальности схемы S и свойства 4. Допустим, что за E_4 следует E_5. В таком случае E_5 должен быть надежным элементом, поскольку при неисправности элемента E_5 функция, реализуемая на выходе схемы S, не зависит от x_i. Но тогда при $x_i \equiv \chi(E_1)$ по свойствам 1, 2 можно удалить элементы $E_1, \ldots, E_5$ с общим весом не менее семи и получить самокорректирующуюся схему для $p_n^{i,\chi(E_1)}$.

Вариант 2.3.2.2. Здесь рассмотрим два варианта:

2.3.2.2.1) элементы E_2, E_3 одинаковые;

2.3.2.2.2) элементы E_2, E_3 различные, т. е. один из них — дизъюнктор, а другой — конъюнктор.

Вариант 2.3.2.2.1. Допустим, что вход хотя бы одного из элементов E_2, E_3 соединен с выходом некоторого элемента E_4. Если, скажем, выход элемента E_4 соединен с входом элемента E_2, то из свойства 4 и минимальности схемы S следует, что E_4 отличен от элементов E_1, E_2, E_3. Поскольку элементы E_2, E_3 не могут быть выходными элементами схемы S, то из минимальности схемы S, а также свойств 3 и 4 вытекает, что за каждым из элементов E_2, E_3 должен следовать элемент, отличный от $E_1, \ldots, E_4$. Если за элементами E_2, E_3 следуют два элемента E_5, E_6, то при $x_i \equiv \chi(E_2)$ согласно свойствам 1–3 можно удалить не менее шести элементов $E_1, \ldots, E_6$ и получить самокорректирующуюся схему для $p_n^{i,\chi(E_2)}$.

В случае, когда выходы элементов E_2, E_3 соединены с входами одного и того же элемента E_5, то E_5 не может быть выходным элементом схемы S и за ним должен следовать некоторый элемент E_6, отличный от $E_1, \ldots, E_5$. При $x_i \equiv \chi(E_2)$ на выходах исправных элементов E_2, E_3, E_5 будут реализованы константы и согласно свойствам 1–3 из схемы S можно удалить не менее шести элементов и получить самокорректирующуюся схему для $p_n^{i,\chi(E_2)}$.

Допустим, что на входы элементов E_2 и E_3 подаются только переменные. Случай, когда на входы обоих элементов E_2, E_3 подается одна и та же переменная y, $y \neq x_i$, исключается, поскольку в этом случае при $y \equiv \chi(E_2)$ и единственном неисправном элементе E_1 реализуемая схемой S функция не зависит от x_i, а этого в самокорректирующейся схеме при $i \geqslant 2$ не должно быть. Предположим, что на входы элементов E_2, E_3 помимо x_i подаются две разные переменные. В таком случае одна из этих переменных отлична от переменной x, подаваемой на вход элемента E_1. Но если на вход элемента E_1 подается x, а на вход, скажем, элемента E_2 подается другая переменная y, то при $x \equiv \chi(E_1)$, $y \equiv \chi(E_2)$ и неисправном элементе E_3 реализуемая схемой S функция не зависит от x_i. Но $\chi(E_1) \neq \chi(E_2)$, номера переменных x и y не превосходят i и при подстановке в $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ констант $\chi(E_1)$ и $\chi(E_2)$ вместо переменных x и y получается, как нетрудно заметить, существенно зависящая от x_i функция. Получаем противоречие, исключающее последнее предположение.

Вариант 2.3.2.2.2. В данном случае один из элементов E_2, E_3, скажем E_2, реализует ту же функцию, что и E_1. Если вход элемента E_2 соединен с выходом какого-либо элемента E_4, то возможность удаления шести элементов и получения самокорректирующейся схемы для $p_n^{i,\chi(E_2)}$

устанавливается как и в предыдущем случае.

Переменная x, которая подается на вход элемента E_1, подаваться на вход элемента E_2 не может, поскольку в таком случае при $x \equiv \chi(E_1) = \chi(E_2)$ и неисправном элементе E_3 реализуемая схемой S функция не зависит от x_i. Поэтому далее можно считать, что на вход элемента E_2 подается некоторая переменная y, отличная от x и, конечно, от x_i — в силу минимальности схемы.

Переменные x и y отличаются от x_i, и их номера не превосходят i. Поэтому при подстановке в $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ констант c_1 и c_2 вместо переменных x и y получается независящая от x_i функция только в том случае, когда одновременно выполняются следующие условия:

a) $i = 2$, т. е. $x_i = x_2$;

b) одна из переменных x, y совпадает с y_2, а вторая совпадает с одной из переменных x_1, y_1;

c) $c_1 = c_2 = 0$.

Поэтому все схемы, в которых $i > 2$ или элементы E_1 и E_2 — дизъюнкторы, или $\{x, y\}$ есть одно из множеств $\{x_1, y_2\}$, $\{y_1, y_2\}$, можно исключить из дальнейшего рассмотрения; в таких схемах при $x \equiv y \equiv \chi(E_1)$ и неисправном элементе E_3 реализуемая на выходе функция не зависит от x_i, что недопустимо. Значит, можно считать, что элементы E_1 и E_2 — конъюнкторы, $x_i = x_2$ и, скажем, $x = y_2$, $y = x_1$.

Допустим, что на входы элемента E_3 подаются только переменные x_2 и x'. Если x' отличается от y_2, то при $y_2 \equiv 0$, $x' \equiv 1$ и неисправном элементе E_2 функция, реализуемая на выходе схемы S, не зависит от x_2, что недопустимо (при подстановке в $p_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ нуля и единицы вместо y_2 и x' получается зависящая от x_2 функция). Если $x' \neq x_1$, то при $x_1 \equiv 0$, $x' \equiv 1$ и неисправном элементе E_1 функция, реализуемая на выходе схемы S, не зависит от x_2, что также недопустимо. Поэтому на один вход элемента E_3 подается выход некоторой подсистемы S', причем в силу свойства 4 элементы E_1 и E_2 в S' не входят.

Предположим, что S' содержит не менее двух элементов. За элементом E_3, как нетрудно заметить, должен следовать некоторый элемент E_4. Получается, что при $x_2 \equiv 1$ можно удалить не менее шести элементов ($E_1, \ldots, E_4$ и все элементы подсхемы S') и получить самокорректирующуюся схему для $p_n^{2,1}$.

Далее будем считать, что подсхема S' содержит только один элемент E_4. Номера переменных, подаваемых на входы элемента E_4, по построению не превосходят двух. В силу свойства 4 переменная x_2 не может подаваться на вход элемента E_4. Следовательно, в данном случае на входы элемента E_4 могут подаваться лишь переменные x_1, y_1, y_2. Ясно, что в таком случае хотя бы одна из переменных x_1, y_1

подается на вход элемента E_4. Для определенности будем считать, что на вход элемента E_4 подается x_1. Если при этом на второй вход элемента E_4 подается y_1 или элемент E_4 является дизъюнктором, то при $x_1 \equiv y_1 \equiv 1$, $y_2 \equiv 0$ и неисправном элементе E_2 функция на выходе схемы S не зависит от x_2, что недопустимо. Остается предположить, что на второй вход элемента E_4 подается y_2, а сам элемент E_4 — конъюнктор. Схему, отвечающую последним условиям, назовем *особой* относительно переменной x_2.

Теперь в качестве переменной с наибольшим номером, подаваемой на вход выделенного элемента E_1, возьмем переменную y_2 (а не x_2). Основываясь на таком выборе переменной, снова проведем изложенные выше рассуждения, начиная со случая 2. В результате либо убедимся в справедливости утверждения леммы, либо придем к заключению, что схема является особой относительно переменной y_2.

Ясно, что схема S может быть особой относительно y_2, если на вход некоторого дизъюнктора E_5 подается переменная y_2 и дизъюнктор E_5 следует за E_2 (относительно элементов $E_1, \ldots, E_4$ напомним, что в рассматриваемой здесь схеме переменная x_2 подается на входы элементов E_1, E_2, E_3, x_1 — на входы элементов E_2 и E_4, y_2 — на входы элементов E_1 и E_4, а элемент E_3 следует за E_4). Но в таком случае при $y_2 \equiv x_1 \equiv 1$ и неисправном элементе E_1 реализуемая схемой S функция не зависит от x_2, а это недопустимо. Лемма 4 доказана.

Замечание. Утверждение теоремы сохраняется и для самокорректирующихся схем над полным базисом $\{x \mathbin{\&} y,\ x \vee y,\ \bar{x}\}$. В этом случае опять же предполагается, что вес каждого ненадежного элемента равен 1, а вес каждого надежного элемента равен P.

Доказательство нижних оценок сложности схем в случае полного базиса несколько усложняется. Однако соответствующие рассуждения остаются в основном прежними. Здесь только приходится считаться с присутствием в схемах инверторов. Например, при доказательстве леммы 4 следует выделять все те элементы, на входы которых подаются только переменные и отрицания переменных; в разбиравшихся вариантах схем потребуется учитывать случаи, когда переменные подаются на входы не только дизъюнкторов и конъюнкторов, но и инверторов, и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.

2. **Редькин Н. П.** Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1970. Вып. 23. С. 83–101.

3. **Редькин Н. П.** Асимптотически минимальные самокорректирующиеся схемы для одной последовательности булевых функций // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 2. С. 62–79.

4. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

5. **Яблонский С. В.** Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1988. Вып. 1. С. 5–25.

Адрес автора:

МГУ, мех.-мат. факультет,
Воробьевы горы,
119899 Москва,
Россия

Статья поступила
5 февраля 1998 г.