ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1998. Серия 1. Том 5, № 3, 64–69

УДК 519.8

К ЗАДАЧЕ О МАКСИМАЛЬНОМ ОСТОВЕ ОГРАНИЧЕННОГО РАДИУСА*)

А. И. Сердюков

Рассматривается NP-трудная задача отыскания в полном реберно-взвешенном неориентированном графе максимального по весу остова радиуса не более $R > 0$. Предлагается приближенный алгоритм с временной сложностью $O(n^2)$ и относительной погрешностью получаемого решения, не превосходящей $1/R$, где n — число вершин в исходном графе.

Имеется полный неориентированный граф $G_n = (V_n, U_n)$ с множеством вершин $V_n = \{1, \dots, n\}$ и множеством ребер U_n. Задана также вещественная симметрическая с неотрицательными элементами матрица $D_n = (d_{ij})_{n \times n}$ весов, определенных на ребрах множества U_n.

Рассмотрим некоторый остов T_n (остовное дерево) на множестве вершин V_n. Через $\lambda_{ij}(T_n)$ будем обозначать количество ребер простой цепи между вершинами i, j в остове T_n, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$.

Введем обозначения:

$r_i(T_n) = \max\{\lambda_{ij}(T_n) \mid j \in V_n, i \neq j\}$ — высота остова T_n с корнем в вершине i, $i \in V_n$;

$r(T_n) = \min\{r_i(T_n) \mid i \in V_n\}$ — радиус остова T_n;

$d(T_n) = \sum\{d_{ij} \mid (i,j) \in T_n\}$ — вес остова T_n;

$f(D_n, R) = \max\{d(T) \mid T$ — такой остов на множестве вершин V_n, что $r(T) \leqslant R\}$, R — заданное натуральное число.

Оптимизационная задача о максимальном остове ограниченного радиуса формулируется следующим образом.

Вход: вещественная симметрическая матрица D_n и натуральное число R.

Выход: остов T_n^{opt} такой, что $d(T_n^{opt}) = f(D_n, R)$ и $r(T_n^{opt}) \leqslant R$.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01591).

Отметим, что данная задача полиномиально разрешима при $R = 1$. Она NP-трудна уже при входе: $d_{ij} \in \{1,2\}$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, и $R = 2$. К ней полиномиально сводится задача поиска минимального остова с диаметром не более 4, когда веса ребер принимают также два значения: 1 либо 2. Известно,что последняя задача NP-трудна [1].

Поэтому при нахождении решения задачи мы вынуждены довольствоваться малотрудоемкими приближенными алгоритмами с гарантированными оценками относительной погрешности получаемых решений либо переходить к более частным постановкам задачи.

Пусть A — некоторый приближенный алгоритм, строящий допустимый остов T_n^A при входе (D_n, R) рассматриваемой задачи, а T_n^{opt} — оптимальный остов при этом входе. Под относительной погрешностью работы алгоритма A на входе (D_n, R) понимается величина

$$\frac{d(T_n^{opt}) - d(T_n^A)}{d(T_n^{opt})}.$$

В работе [2] предполагается, что элементы матрицы D_n удовлетворяют неравенству треугольника: для любой тройки $\{i,j,k\} \subset V_n$ справедливо соотношение $d_{i,k} \leqslant d_{i,j} + d_{j,k}$. Для решения задачи при этом ограничении в [2] предложен приближенный алгоритм с временной сложностью $O(n^2)$ и относительной погрешностью, не превосходящей

$$\min\left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{R+7}, \frac{2}{R+1}\right\}.$$

В настоящей работе предложен полиномиальный алгоритм A для решения исходной задачи в общей постановке с относительной погрешностью, не превосходящей $1/R$. Дадим поэтапное описание его работы при входных данных (D_n, R).

Алгоритм A.

Этап 1. Известными методами (см., например, [3]) находится остов T_n^* максимального веса в графе G_n.

Этот этап можно осуществить за время $O(n^2)$.

Этап 2. Если $r(T_n^*) \leqslant R$, то $T_n^A := T_n^*$ и перейти на конечный этап 5. В этом случае имеем оптимальное решение задачи.

Этап 3. Выбирается произвольный элемент $v \in V_n$ в качестве корневой вершины остова T_n^*, а вершины и ребра остова T_n^* размещаются по слоям. Считается, что вершина v находится на нулевом слое. Каждая вершина $i \in V_n, v \neq i$, находится на $\lambda_{vi}(T_n^*)$-м слое. Каждое ребро из T_n^* находится на меньшем из двух слоев для его концевых вершин.

Таким образом, максимальный номер слоя для вершин остова равен высоте остова с корневой вершиной v, т. е. величине $r_v(T_n^*)$, а для ребер максимальным номером слоя является число $(r_v(T_n^*) - 1)$.

Этот этап осуществляется за время $O(n)$.

Этап 4. Данный этап состоит из R шагов $k = 0, \ldots, R-1$. На k-м шаге строится остов T_n^k путем замены отдельных ребер остова T_n^* на другие ребра следующим образом. Из остова T_n^* удаляются все ребра, находящиеся на слоях с номерами $Rl + k$, где l — целое, $0 \leqslant l \leqslant \lfloor (n-k)/R \rfloor$. Затем все вершины, находящиеся на слоях с номерами $Rl + k + 1$, где l — целое, $0 \leqslant l \leqslant \lfloor (n-k-1)/R \rfloor$, соединяются с корневой вершиной v. Полученный остов обозначается через T_n^k. Далее, взяв в качестве k другую целую величину из отрезка $[0, R-1]$, повторим описанный процесс. В множестве $\{T_n^k \mid 0 \leqslant k \leqslant R-1\}$ остовов выбирается остов с максимальным весом. Такой остов обозначается через T_n^A.

Этот этап реализуется за время $O(n)$. Перед работой каждого шага хранится один из остовов, возникших на предыдущих шагах, с максимальным весом. Число операций, осуществляемых на k-м шаге, $0 \leqslant k \leqslant R-1$, по порядку равно числу ребер в остове T_n^*, находящихся на слоях с номерами $Rl + k$, где l — целое, $0 \leqslant l \leqslant \lfloor (n-k)/R \rfloor$. Таким образом, общее количество операций, затрачиваемых на четвертом этапе, по порядку равно числу ребер в остове T_n^*, т. е. равно $O(n)$.

Этап 5. Остов T_n^A является решением задачи.

Конец.

Замечание 1. На четвертом этапе алгоритма все возникающие подграфы T_n^k, $0 \leqslant k \leqslant R-1$, названы остовами. Это легко обосновать. Очевидно, что подграф T_n^k связен и содержит все вершины из V_n. Преобразование $g_k : T_n^* \to T_n^k$ сохраняет число ребер, т. е. $|T_n^* \backslash T_n^k| = |T_n^k \backslash T_n^*|$ и $|T_n^k| = |T_n^*| = n - 1$. Следовательно, T_n^k — остов на множестве вершин V_n.

Замечание 2. С учетом замечания 1 на выходе алгоритма A подграф T_n^A является остовом, и для корректности алгоритма A остается показать, что $r(T_n^A) \leqslant R$. Из построений остовов T_n^k, $0 \leqslant k \leqslant R-1$, следует, что $r_v(T_n^k) \leqslant R$. Следовательно, $r_v(T_n^A) \leqslant R$ и $r(T_n^A) \leqslant R$.

Теорема 1. *Алгоритм A корректен, его временная сложность не превосходит $O(n^2)$ и относительная погрешность не превосходит $1/R$.*

Доказательство. Корректность следует из замечаний 1 и 2.

Временная сложность каждого этапа алгоритма подсчитана при описании алгоритма: реализация первого этапа требует $O(n^2)$ операций, остальных — не более $O(n)$ операций.

По определению

$$d(T_n^A) \geqslant \sum_{k=0}^{R-1} d(T_n^k)/R.$$

Заметим, что в остове T_n^k сохранены все ребра остова T_n^*, кроме ребер, находящихся на слоях с номерами $Rl+k$, где l — целое, $0 \leqslant l \leqslant \lfloor (n-k)/R \rfloor$ (при этом в T_n^0 сохраняются также ребра из T_n^* нулевого слоя). Поэтому на всех шагах четвертого этапа алгоритма любое ребро из T_n^* заменяется не более одного раза. Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{R-1} d(T_n^k) \geqslant (R-1)d(T_n^*) \geqslant (R-1)d(T_n^{opt})$$

или

$$\frac{d(T_n^{opt}) - d(T_n^A)}{d(T_n^{opt})} \leqslant \frac{1}{R}.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 3. При обосновании оценок качества работы алгоритма A не учитываются веса ребер из множеств $\{T_n^k \backslash T_n^*\}$. Это можно учесть, например, в случае, когда элементы матрицы D_n принимают натуральные значения из отрезка $[1, s]$.

Теорема 2. *Для задачи о максимальном остове ограниченного радиуса алгоритм A находит решение с относительной погрешностью, не превышающей $(s-1)/(sR)$, когда веса ребер принимают целочисленные значения из отрезка $[1, s]$.*

Доказательство. Фиксируем некоторое $v \in V_n$. Будем оценивать снизу веса ребер из множеств $\{T_n^k \backslash T_n^*\}$ по минимуму, т. е. единицей. Тогда

$$\sum_{k=0}^{R-1} d(T_n^k) \geqslant (R-1)d(T_n^*) + n - 1.$$

Следовательно,

$$d(T_n^A) \geqslant (R-1)d(T_n^*)/R + (n-1)/R$$

или

$$d(T_n^A)/d(T_n^{opt}) \geqslant (R-1)/R + \frac{n-1}{(n-1)sR} = 1 - 1/R + 1/(sR),$$

поскольку

$$d(T_n^{opt}) \leqslant \min\{d(T_n^*), (n-1)s\}.$$

Следовательно,

$$(d(T_n^{opt}) - d(T_n^A))/d(T_n^{opt}) \leqslant 1/R - 1/(sR) = (s-1)/(sR).$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 4. В данном алгоритме корень v остова T_n^* выбирался произвольно. Алгоритм можно модифицировать, перебрав все вершины из V_n в качестве корня остова T_n^*. Очевидно, что временная сложность модифицированного алгоритма A_1 по порядку равна временной сложности алгоритма A (в алгоритме A_1 шаги 2, 3 и 4 проделываются n раз в отличие от алгоритма A). При обосновании качества работы алгоритма A_1 (в отличие от A) удается несколько улучшить оценку относительной погрешности, а именно, довести ее до $(1-2/n)R$.

Теорема 3. *Для задачи о максимальном остове ограниченного радиуса с входными данными* $\{D_n, R\}$ *алгоритм* A_1 *находит решение с относительной погрешностью, не превышающей* $(1-2/n)/R$.

Доказательство. Пусть $\delta(v)$ обозначает множество ребер нулевого слоя в остове T_n^* с корнем в вершине v. Будем считать, что $T_n^k = T_n^k(v)$. Очевидно, что $\delta(v) \subset T_n^k$, $0 \leqslant k \leqslant R-1$. Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{R-1} d(T_n^k) \geqslant (R-1)d(T_n^{opt}) + d(\delta(v))$$

или

$$\sum_{v=1}^{n}\sum_{k=0}^{R-1} d(T_n^k) \geqslant n(R-1)d(T_n^{opt}) + 2d(T_n^*),$$

поскольку

$$\sum_{v=1}^{n} d(\delta(v)) = 2d(T_n^*).$$

Поэтому

$$d(T_n^{A_1}) \geqslant (1/nR)\sum_{v=1}^{n}\sum_{k=0}^{R-1} d(T_n^k) \geqslant (1 - 1/R + 2/(nR))d(T_n^{opt}).$$

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

2. **Ерзин А. И.** Задача построения остовного дерева максимального веса с ограниченным радиусом // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. Вып. 27. С. 70–78.

3. **Прим Р. М.** Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения // Кибернетический сб. М.: Мир, 1961. Вып. 2. С. 95–107.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
13 апреля 1998 г.