ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1998. Серия 1. Том 5, № 3, 70–79

УДК 519.717

ЗАТРАТЫ НА ПОИСК И ГРАФЫ ИНТЕРВАЛОВ*)

Ф. В. Фомин

В первых работах по поиску на графах [2, 3, 14, 16] конечный граф интерпретируется как система туннелей, в которых прячется очень быстрый и умный убегающий. В нашем распоряжении имеется команда преследователей. Требуется разработать план поиска убегающего, гарантирующий его нахождение. В настоящей статье определяется новый критерий оптимальности поиска — затраты на поиск. Доказывается, что для всякого графа G затраты на поиск равны числу ребер в наименьшем (по числу ребер) графе интервалов, содержащем G в качестве подграфа.

Введение

Задачи поиска на графах привлекают специалистов из разных областей дискретной математики по нескольким причинам.

Первая причина — это связь некоторых задач поиска с играми в камни (pebble games) [10], которые имеют отношение к задачам рационального использования памяти ЭВМ. Во-вторых, выяснилось, что некоторые инварианты графов, первоначально возникшие в теории сверхбольших интегральных схем, такие как ширина разреза [13], топологическая ширина ленты [12], величина вершинного разделения графа [7], во многих случаях имеют теоретико-игровую интерпретацию. Третьей причиной является связь задач поиска с путевой и древесной шириной графа — важнейшими параметрами в теории миноров графов, разработанной Робертсоном и Сеймуром [4, 6].

Проблемы поиска также возникают в задачах о координации движений роботов [17] и в задачах сохранения секретности информации, передаваемой по электронным сетям с мобильными подслушивающими устройствами («жучками») [9]. Подробную информацию о задачах поиска и их «родственниках» можно найти в обзорах [4, 8, 15].

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00934).

Часто задачу гарантированного поиска удобно трактовать как задачу очистки ребер графа от «диффузированного» убегающего (например, от газа или пыли). На каждом шаге поиска вершины и ребра графа, в которых может быть убегающий, объявляются загрязненными, а все остальные вершины и ребра — очищенными. Преследователи очищают граф по следующим правилам: каждым ходом на вершину графа ставится преследователь, после чего часть преследователей может быть удалена. Предполагается, что первоначально все ребра графа загрязнены. Загрязненное ребро очищается, если оба его конца заняты преследователями. Очищенное ребро e становится загрязненным, если при удалении преследователя появится путь, соединяющий e с загрязненным ребром, на внутренних вершинах которого нет преследователей.

С понятием очистки графа связана интересная трактовка задач поиска, приводимая Д. Биенстоком [4]. Рассмотрим поведение в сети компьютерного вируса. Получая информацию о наличии в сети вируса, мы не знаем масштабы заражения. Предполагая худшее, мы должны подозревать, что заражена вся сеть, а потому все узлы должны быть проверены и очищены. Предположим, что одновременная проверка всех узлов сети невозможна, а может быть, непрактична. Таким образом, ставится задача разработки оптимальной (по некоторому критерию) стратегии очистки.

В «традиционной» задаче поиска ищется программа с наименьшим числом задействованных преследователей. В настоящей работе нас интересуют программы с наименьшим суммарным (сумма производится по всем шагам программы поиска) числом задействованных преследователей. Это число названо нами затратами на поиск.

В задачах поиска одним из важнейших является вопрос о повторной очистке (монотонности). Оказывается [5, 11], что для некоторых задач поиска с «традиционным» критерием оптимальности имеет место следующий факт: если k преследователей достаточно для очистки графа, то k преследователей могут очистить граф и таким образом, что ни одно из очищенных ребер повторно не загрязняется.

В первой части статьи доказывается монотонность программ поиска с наименьшими затратами. Для доказательства монотонности используются конструкции, идейно близкие конструкциям, предложенным Д. Биенстоком и П. Сеймуром [5].

Во второй части работы с использованием теоремы о монотонности выясняется, каким образом вычисление затрат на поиск связано с задачей о дополнении до графа интервалов с наименьшим числом ребер, эквивалентной задаче о профиле графа (см. [1]). Проблема вычисления

профиля графа часто возникает в вычислительной математике при работе с матрицами.

1. Постановка задачи

Под графом будем понимать простой (без петель и кратных ребер) конечный неориентированный граф. Через $V(G)$ обозначается множество вершин, а через $E(G)$ — множество ребер графа G.

Программой поиска Π на графе G называется последовательность пар

$$(A_0^1, Z_0^1), (A_0^2, Z_0^2), (A_1^1, Z_1^1), (A_1^2, Z_1^2), \ldots, (A_n^1, Z_n^1), (A_n^2, Z_n^2)$$

такая, что

I) $A_i^j \subseteq E(G)$ и $Z_i^j \subseteq V(G)$ для любых i и j таких, что $0 \leqslant i \leqslant n$, а $j = 1, 2$;

II) при любых i и j таких, что $0 \leqslant i \leqslant n$ и $j = 1, 2$, всякая вершина, инцидентная ребру из A_i^j и ребру из $E(G) - A_i^j$, принадлежит Z_i^j;

III) $A_0^j = \varnothing$, $A_n^j = E(G)$ при $j = 1, 2$;

IV) (*постановка нового преследователя*) для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, найдется вершина v такая, что $Z_i^1 = Z_{i-1}^2 \cup \{v\}$ и $A_i^1 = A_{i-1}^2 \cup E_v$, где E_v — множество всех ребер, имеющих один конец v, а второй в Z_{i-1}^2;

V) (*удаление преследователя*) для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $Z_i^2 \subseteq Z_i^1$ и A_i^2 есть множество всех ребер $e \in A_i^1$ таких, что всякий путь, содержащий ребро e и ребро из $E(G) - A_i^1$, имеет внутреннюю вершину из Z_i^2.

Множество Z_i^1 удобно интерпретировать как множество вершин, занятых преследователями после постановки нового преследователя на i-м шаге, Z_i^2 — как множество вершин, занятых преследователями сразу перед $(i+1)$-м шагом, а A_i^1, A_i^2 — как множества очищенных ребер.

В известной задаче о вершинно-поисковом числе [10] требуется найти программу с наименьшим $\max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} Z_i^1$. Это число можно интерпретировать как наибольшее число преследователей, находящихся одновременно на графе. Нас интересует другая мера поиска. Определим *затраты на программу поиска* Π как $\sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} |Z_i^2|$. Затраты на программу поиска можно интерпретировать как общее количество «человеко-ходов», затраченных на поиск. *Затратами на поиск* в графе G будем называть наименьшие затраты на программу поиска, где минимум берется по всем программам поиска на G. Будем говорить, что программа поиска $(A_0^1, Z_0^1), (A_0^2, Z_0^2), \ldots, (A_n^1, Z_n^1), (A_n^2, Z_n^2)$ является *монотонной*, если при

каждом i, $0 \leqslant i \leqslant n$, выполняется условие $A_i^1 = A_i^2$ (при убирании преследователей с вершин не происходит повторного загрязнения). *Затратами на монотонный поиск* в графе G называются затраты на минимальную (с точки зрения затрат) монотонную программу поиска. Затраты на поиск и монотонный поиск в графе G будем обозначать через $\gamma(G)$ и $\gamma_m(G)$ соответственно.

Программы поиска можно определять и для псевдографов. При этом добавление кратных ребер и петель не влияет на затраты поиска.

2. Монотонность и клубки в псевдографах

Для подмножества ребер $X \subseteq E(G)$ графа G определяем $\delta(X)$ как множество вершин, одновременно инцидентных ребрам из множеств X и $E(G) - X$. Множество вершин в подграфе графа G, порождаемого подмножеством ребер $X \subseteq E(G)$, будем обозначать через $V(X)$.

Понятие клубка вводится для псевдографов. Пусть псевдограф G^0 получен из графа G добавлением петли к каждой вершине. *Клубком* в G^0 будем называть последовательность $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ подмножеств ребер $E(G^0)$ такую, что

1) $X_0 = \varnothing$ и $X_n = E(G^0)$;
2) $|V(X_i) - V(X_{i-1})| \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$;
3) если $v \in V(X_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то петля с концом в v также принадлежит множеству X_i.

Определим *меру клубка* $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ как $\sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} |\delta(X_i)|$. Клубок $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ называется *увеличивающимся*, если $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n$ и $|V(X_i) - V(X_{i-1})| = 1$ при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Теорема 1. *Для всякого графа G и $k \geqslant 0$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\gamma(G) \leqslant k$;

(ii) *если псевдограф G^0 получен из графа G добавлением петли к каждой вершине, то в G^0 есть клубок меры не более k;*

(iii) *если псевдограф G^0 получен из графа G добавлением петли к каждой вершине, то в G^0 есть увеличивающийся клубок меры не более k;*

(iv) $\gamma_m(G) \leqslant k$.

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Как уже отмечалось, $\gamma(G) = \gamma(G^0)$. Пусть

$$(A_0^1, Z_0^1), (A_0^2, Z_0^2), (A_1^1, Z_1^1), (A_1^2, Z_1^2), \ldots, (A_n^1, Z_n^1), (A_n^2, Z_n^2) \text{ —}$$

программа поиска в G^0 с затратами не более k. Докажем, что $A_0^2, A_1^2, \ldots, A_n^2$ является клубком меры не более k в G^0. По свойству III определения программы поиска имеем $A_0^2 = \varnothing$, $A_n^2 = E(G)$. Свойство II определения программы поиска гласит, что $\delta(A_i^2) \subseteq Z_i^2$ при каждом i, $0 \leqslant i \leqslant n$. Следовательно, $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\delta(A_i^2)| \leqslant k$. Убедимся, что при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant n$, выполняется неравенство $|V(A_i^2) - V(A_{i-1}^2)| \leqslant 1$. Если найдутся индекс i, $1 \leqslant i \leqslant n$, и несовпадающие вершины u, v такие, что $u, v \in V(A_i^2) - V(A_{i-1}^2)$, то добавленные к этим вершинам петли e_u, e_v принадлежат множеству $A_i^2 - A_{i-1}^2$. Используя включение $A_i^1 \supseteq A_i^2$ (свойство V определения программы поиска), получаем $e_u, e_v \in A_i^1 - A_{i-1}^2$, что противоречит свойству IV программы поиска.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Выберем в G клубок $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ такой, что сумма

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} |\delta(X_i)| \tag{1}$$

минимальна и с учетом (1) сумма

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} (|X_i| + 1) \tag{2}$$

минимальна.

Сначала докажем, что при каждом j, $1 \leqslant j \leqslant n$, выполняется включение $X_{j-1} \subseteq X_j$.

Поскольку $V(X_{j-1} \cup X_j) - V(X_{j-1}) = V(X_j) - V(X_{j-1})$ и $V(X_{j+1}) - V(X_{j-1} \cup X_j) \subseteq V(X_{j+1}) - V(X_j)$, то $(X_0, X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j-1} \cup X_j, X_{j+1}, \ldots, X_n)$ является клубком. Тогда (1) влечет неравенство

$$|\delta(X_{j-1} \cup X_j)| \geqslant |\delta(X_j)|. \tag{3}$$

Нетрудно убедиться, что $|\delta|$ удовлетворяет субмодулярному неравенству

$$|\delta(X_{j-1} \cup X_j)| + |\delta(X_{j-1} \cap X_j)| \leqslant |\delta(X_{j-1})| + |\delta(X_j)|. \tag{4}$$

Из (3) и (4) заключаем, что

$$|\delta(X_{j-1} \cap X_j)| \leqslant |\delta(X_{j-1})|. \tag{5}$$

Если вершина v принадлежит множеству $V(X_{j-1}) \cap V(X_j)$, то петля с концом в v принадлежит множеству $X_{j-1} \cap X_j$. Следовательно, $v \in V(X_{j-1} \cap X_j)$. Поэтому $V(X_j) - V(X_{j-1} \cap X_j) \subseteq V(X_j) - V(X_{j-1})$. Далее, $V(X_{j-1} \cap X_j) - V(X_{j-2}) \subseteq V(X_{j-1}) - V(X_{j-2})$, а поэтому $(X_0, X_1, \ldots, X_{j-2}, X_{j-1} \cap X_j, X_j, X_{j+1}, \ldots, X_n)$ является клубком. Из (5), (1) и (2) вытекает,

что $|X_{j-1} \cap X_j| \geqslant |X_{j-1}|$. Таким образом, $X_{j-1} \subseteq X_j$ для любого j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Если $|V(X_j) - V(X_{j-1})| = 0$, то $(X_0, X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_n)$ — клубок, что противоречит условию (2). Следовательно, $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ — увеличивающийся клубок.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Пусть $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ — увеличивающийся клубок в G^0 меры не более k. Определим программу поиска в G^0, положив $Z_0^1 = Z_0^2 = \varnothing$ и для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, задав $Z_i^1 = \delta(X_i) \cup \{V(X_i) - V(X_{i-1})\}$, $Z_i^2 = \delta(X_i)$. Предположим, что на j-м шаге преследователи располагаются в вершинах Z_j^1 и все ребра из X_j очищены. Очевидно, что при удалении преследователей с вершин $Z_j^1 - Z_j^2$ повторного загрязнения не произойдет.

Пусть $v = V(X_{j+1}) - V(X_j)$. Всякое ребро из множества $X_{j+1} - X_j$ является либо петлей с концом в v, либо инцидентно v и вершине из $\delta(X_j) = Z_j^2$. Тогда на $(j+1)$-м шаге преследователь, поставленный на v, очищает все ребра множества $X_{j+1} - X_j$. Наконец, $Z_0 = X_0$, $X_n = E(G)$, а потому $\gamma_m(G) = \gamma_m(G^0) \leqslant k$.

Импликация $(iv) \Rightarrow (i)$ очевидна. Теорема 1 доказана.

3. Графы интервалов

Графом интервалов называется граф, множество вершин которого совпадает с некоторым набором интервалов вещественной прямой и две вершины графа смежны тогда и только тогда, когда соответствующие интервалы пересекаются. Данный набор интервалов называется *интервальной реализацией графа.*

Хорошо известна следующая простая

Лемма 1. *Всякий граф интервалов обладает интервальной реализацией, в которой левые концы интервалов суть различные целые числа* $1, 2, \ldots, |V(G)|$.

Такую реализацию будем называть *каноническим представлением.*

Пусть $\mathscr{I} = \{I_v = (l_v, r_v)\}_{v \in V(G)}$, $l_v < r_v$, является каноническим представлением графа интервалов G. *Длиной представления* $\mathscr{I}$ будем называть величину $\sum\limits_{v \in V} \lfloor r_v - l_v \rfloor$. Определим $l(G)$ — *длину* графа интервалов G — как минимальную из длин представлений, где минимум берется по всевозможным каноническим представлениям графа G. Для произвольного графа G через $il(G)$ будем обозначать *интервальную длину* G, определяемую как наименьшую из длин графов интервалов, содержащих G в качестве подграфа.

Следующее свойство канонических представлений минимальной длины графов интервалов будет использоваться при доказательстве теоремы 2.

Лемма 2. *Пусть I — граф интервалов с n вершинами, а $\mathscr{I} = \{I_v = (l_v, r_v)\}_{v\in V(G)}$, $l_v < r_v$,— его каноническое представление минимальной длины. Тогда*

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |P(i)| = \sum_{v\in V} \lfloor r_v - l_v \rfloor = |E(I)|,$$

где $P(i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначает множество интервалов I_v, $v \in V(I)$, содержащих число i.

Доказательство. Поскольку $\mathscr{I}$ является каноническим представлением минимальной длины, то все числа r_v (правые концы интервалов из $\mathscr{I}$) не могут быть целыми и должны быть меньше $n+1$. Каждый интервал $I_v = (l_v, r_v)$, $v \in V(I)$, содержит $\lfloor r_v - l_v \rfloor$ целых чисел. Каждое число $i \in \{1, \ldots, n\}$ содержится точно в $|P(i)|$ интервалах. Таким образом,

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |P(i)| = \sum_{v\in V} \lfloor r_v - l_v \rfloor.$$

Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, степень вершины $v(i = l_v)$ в графе I равна $|P(i)| + \lfloor r_v - l_v \rfloor$ (число интервалов I_u, $l_u < i < r_u$, плюс число интервалов I_w, $i < l_w < r_v$). В результате имеем

$$2|E(I)| = \sum_{v\in V(I)} \deg(v) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |P(i)| + \sum_{v\in V} \lfloor r_v - l_v \rfloor,$$

где $\deg(v)$ — степень вершины v. Лемма 2 доказана.

Теорема 2. *Для всякого графа G и натурального числа $k > 0$ следующие утверждения эквивалентны:*

(*i*) $\gamma(G) \leqslant k$;

(*ii*) $il(G) \leqslant k$;

(*iii*) *существует граф интервалов не более чем с k ребрами, содержащий в качестве подграфа граф G.*

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть

$$(A_0^1, Z_0^1), (A_0^2, Z_0^2), (A_1^1, Z_1^1), (A_1^2, Z_1^2), \ldots, (A_n^1, Z_n^1), (A_n^2, Z_n^2) \text{ —}$$

программа поиска в G с затратами, не превосходящими k. Согласно теореме 1 полагаем, что программа является монотонной. Тогда, не умаляя общности, можно считать, что $n = |V(G)|$. Выберем $\varepsilon < 1$ и каждой вершине v графа G поставим в соответствие интервал $(l_v, r_v + \varepsilon)$, где l_v —

номер шага, на котором вершина впервые принимает преследователя, а r_v — номер последнего шага, на котором вершина v еще занята преследователем (наибольшее i, для которого $v \in Z_i^1$). По окончании действия программы поиска все ребра G окажутся очищенными. Поэтому в графе G для любого ребра e найдется шаг, на котором оба конца e заняты преследователями (момент очистки e). Поэтому граф интервалов I, каноническим представлением которого является $\mathscr{I} = \{I_v = (l_v, r_v + \varepsilon)\}_{v \in V(G)}$, в качестве подграфа содержит граф G. Поскольку

$$\sum_{v \in V} \lfloor r_v + \varepsilon - l_v \rfloor = \sum_{v \in V} \lfloor r_v - l_v \rfloor = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} |Z_i^2|$$

(каждая вершина v считается в правой части $\lfloor r_v - l_v \rfloor$ раз), то $il(G) \leqslant l(I) \leqslant k$.

Импликация $(ii) \Rightarrow (iii)$ является следствием леммы 2.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Пусть $\mathscr{I} = \{I_v = (l_v, r_v)\}_{v \in V(G)}$, $l_v < r_v$, — каноническое представление минимальной длины графа интервалов I, содержащего G в качестве подграфа. Будем считать, что $r_v < n + 1$ при любом v, где $n = |V(I)|$.

Опишем следующую программу поиска на графе G:

- $Z_0^1 = \varnothing$;
- для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, множество $Z_i^1 = Z_{i-1}^2 \cup \{v\}$, где v — вершина, соответствующая интервалу с левым концом i;
- $Z_i^2 = P(i+1)$ для каждого i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$;
- $Z_n^2 = \varnothing$.

Повторного загрязнения такие действия преследователей повлечь не могут, поскольку всякий путь в графе интервалов I (а значит, и в графе G) из вершины w, $l_w > i + 1$, в вершину u, $l_u < i + 1$, содержит вершину из $P(i + 1)$. Для всякого ребра графа I (и, следовательно, всякого ребра графа G) найдется множество вершин Z_i^1 такое, что оба конца ребра принадлежат этому множеству. Следовательно, по окончании действия программы все ребра графа будут очищены.

Затраты на построенную программу поиска равны

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} |Z_i^2| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |P(i)|.$$

По лемме 2 имеем $\gamma(G) \leqslant |E(I)|$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Головач П. А., Фомин Ф. В.** Суммарная величина вершинного разделения и профиль графов. (В печати в журн. «Дискрет. математика».)

2. **Петров Н. Н.** Некоторые экстремальные задачи поиска на графах // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 5. С. 821–827.

3. **Петров Н. Н.** Задачи преследования при отсутствии информации об убегающем // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 5. С. 1345–1352.

4. **Bienstock D.** Graph searching, path-width, tree-width and related problems (a survey). Reliability of computer and communication networks. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. P. 33–49. (DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.; V. 5.)

5. **Bienstock D., Seymour P.** Monotonicity in graph searching // J. Algorithms. 1991. V. 12, N 2. P. 239–245.

6. **Dendris N. D., Kirousis L. M., Thilikos D. M.** Fugitive-search games on graphs and related parameters // Theoret. Comput. Sci. 1997. V. 172, N 1–2. P. 233–254.

7. **Ellis J. A., Sudborough I. H., Turner J. S.** The vertex separation and search number of a graph // Inform. and Comput. 1994. V. 113, N 1. P. 50–79.

8. **Fomin F. V, Petrov N. N.** Pursuit-evasion and search problems on graphs // Congres. Numer. 1996. V. 122. P. 47–58.

9. **Franklin M., Galil Z., Yung M.** Eavesdropping games: A graph-theoretic approach to privacy in distributed systems // 34th Annu. Symp. on Found. of Comput. Sci. Los Alamitos, CA: IEEE Comput. Soc. Press, 1993. P. 670–679.

10. **Kirousis L. M., Papadimitriou C. H.** Searching and pebbling // Theoret. Comput. Sci. 1986. V. 47, N 2. P. 205–218.

11. **LaPaugh A. S.** Recontamination does not help to search a graph // J. Assoc. Comput. Mach. 1993. V. 40, N 2. P. 224–245.

12. **Makedon F. S., Papadimitriou C. H., Sudborough I. H.** Topological bandwidth // SIAM J. Algebraic Discrete Math. 1985. V. 6, N 3. P. 418–444.

13. **Makedon F. S., Sudborough I. H.** On minimizing width in linear layouts // Discrete Appl. Math. 1989. V. 23, N 3. P. 243–265.

14. **Megiddo N., Hakimi S. L., Garey M. R., Johnson D. S., Papadimitriou C. H.** The complexity of searching a graph // J. Assoc. Comput. Mach. 1988. V. 35, N 1. P. 18–44.

15. **Möhring R. H.** Graph problems related to gate matrix layout and PLA folding // Computational graph theory. Comput. Suppl. 7. Vienna: Springer, 1990. P. 17–51.

16. **Parsons T. D.** Pursuit-evasion in a graph // Theory and application of graphs. Berlin: Springer-Verl., 1976. P. 426–441.

17. **Sugihara K., Suzuki I.** Optimal algorithms for a pursuit-evasion problem in grids // SIAM J. Discrete Math. 1989. V. 2, N 1. P. 126–143.

Адрес автора:

Санкт-Петербургский
государственный университет,
мех.-мат. факультет,
Библиотечная пл., 2,
198904 Санкт-Петербург,
Россия. E-mail:
fomin@gamma.math.spbu.ru

Статья поступила
6 февраля 1998 г.