ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1998. Серия 1. Том 5, № 4, 3–5

УДК 519.72

К СТРОЕНИЮ ГРАФОВ МИНИМАЛЬНЫХ РАССТОЯНИЙ СОВЕРШЕННЫХ БИНАРНЫХ $(n, 3)$-КОДОВ*)

С. В. Августинович

Доказано, что графы минимальных расстояний двух совершенных бинарных $(n, 3)$-кодов изоморфны, если и только если эти коды эквивалентны.

Пусть C — произвольный совершенный бинарный код с расстоянием 3. *Графом минимальных расстояний* кода C называется граф $G(C)$, множество вершин которого совпадает с C и две вершины соединены ребром, если расстояние между ними равно 3. К. Фелпсом и М. Ле Ваном [2] был задан вопрос: верно ли, что совершенные бинарные коды с изоморфными графами минимальных расстояний всегда эквивалентны? Здесь приводится доказательство анонсированного в [1] утверждения, из которого вытекает положительный ответ на этот вопрос.

Пусть E^n — единичный n-мерный куб, C_1 и C_2 — некоторые два совершенных кода в E^n с расстоянием 3. Будем говорить, что коды C_1 и C_2 *эквивалентны*, если для некоторого автоморфизма A куба E^n выполняется $A(C_1) = C_2$. Равномощные коды C_1 и C_2 называются *изометричными*, если для некоторого отображения $I : C_1 \to C_2$ выполняется равенство $d(\alpha, \beta) = d(I(\alpha), I(\beta))$ для всех $\alpha, \beta \in C_1$. Коды C_1 и C_2 назовем *слабо изометричными*, если для некоторого отображения $J : C_1 \to C_2$ равенство $d(\alpha, \beta) = 3$ выполняется тогда и только тогда, когда $d(J(\alpha), J(\beta)) = 3$. Ясно, что эквивалентные коды изометричны, а изометричные коды слабо изометричны.

В [1] была доказана теорема (случай $n = 15$ этой теоремы отдельно рассмотрен в [3]), которая во введенных терминах формулируется следующим образом.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96–01–01800 и 97–01–01075) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (код проекта 473).

Теорема 1. *Если два совершенных бинарных $(n, 3)$-кода изометричны, то они эквивалентны.*

Нашей целью является доказательство следующего утверждения, из которого, как легко понять, следует предположение К. Фелпса и М. Ле Вана.

Теорема 2. *Если два совершенных бинарных $(n, 3)$-кода слабо изометричны, то они эквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим два совершенных $(n, 3)$-кода C_1, C_2 и слабую изометрию $J : C_1 \to C_2$ между ними. Зафиксируем произвольный вектор $V \in C_1$. Не теряя общности (с точностью до автоморфизмов куба E^n) можно считать, что $V = J(V) = 0$.

Будем говорить, что векторы V_1 и V_2 3-смежны, если $d(V_1, V_2) = 3$. Пусть координаты с номерами r, j и k являются единичными в векторе $V_1 + V_2$. В таком случае будем говорить, что вектор V_2 3-смежен с вектором V_1 и расположен от V_1 в направлении (r, j, k).

Множество векторов кода C_1 разобьем на попарно непересекающиеся подмножества $M_1, M_2, \ldots, M_n$, где M_i состоит из векторов веса i. Докажем, что каждый вектор из $J(M_i)$ имеет вес i. Это как раз и будет означать, что слабая изометрия сохраняет не только расстояние 3, но и любые другие расстояния, т. е. является просто изометрией. Для доказательства нам потребуются вспомогательные утверждения.

Предложение 1. *Каждый вектор из M_i либо 3-смежен хотя бы с одним вектором из M_{i-3}, либо 3-смежен в точности с $i(i-1)$ векторами из M_{i-1}.*

Доказательство. Предположим, что некоторый вектор W из M_i не является 3-смежным ни с одним вектором из M_{i-3}. Среди i единичных координат вектора W выделим произвольную пару (j, k). По определению совершенного кода существует единственная тройка (r, j, k) такая, что в направлении (r, j, k) от вектора W лежит некоторый вектор U из C_1. По предположению вектор U имеет вес $i - 1$, а r-я координата вектора W равна 1. Остается заметить, что выбор пары (j, k) можно осуществить $i(i-1)$ способами.

Предложение 2. *Каждый вектор из M_{i+2} является 3-смежным не более чем с $(i+1)(i+2)/6$ векторами из M_{i-1}.*

Доказательство. Зафиксируем вектор W из M_{i+2}. Среди $i + 2$ его единичных координат пару можно выделить $(i+1)(i+2)/2$ способами. По аналогии с предложением 1 эта пара однозначно дополняется до тройки. Разница состоит лишь в том, что дополняющая координата должна быть единичной в W, чтобы соответствующий 3-смежный с W

вектор оказался в M_{i-1}. Но так как каждая такая тройка порождается любой из своих трех пар, то число троек не превосходит $(i+1)(i+2)/6$.

Предложение 3. *Предложения* 1 *и* 2 *останутся верными, если в их формулировках все* M_i *заменить на* $J(M_i)$.

Доказательство. Действительно, предложения 1 и 2 опираются на понятие 3-смежности, которое по определению инвариантно относительно слабой изометрии.

Завершая доказательство теоремы, предположим, что для некоторого i (будем считать, что i минимальное из возможных) множество $J(M_i)$ содержит вектор V, вес которого отличен от i. В силу выбора i при $r < i$ все $J(M_r)$ состоят в точности из векторов кода C_2 веса r. Поскольку слабая изометрия сохраняет четность веса, вектор V может иметь только вес $i+2$. Однако предложения 1, 2 и 3 делают это невозможным, так как $i(i+1)/2 > (i+1)(i+2)/6$ при любом $i > 3$. Тем самым отображение J сохраняет веса векторов, или, другими словами, — расстояние от вектора до 0. Однако, как было замечено ранее, все проведенные рассуждения остаются в силе с точностью до произвольного автоморфизма куба E_n. Поэтому отображение J сохраняет любые расстояния и является изометрией.

С учетом сказанного теорема 2 просто вытекает из теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В.** Об изометричности плотно упакованных бинарных кодов // Дискретный анализ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1994. С. 3–5. (Тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 27).
2. **Phelps K. T., Le Van M. T.** Switching equivalence classes of perfect codes // Designs, Codes and Cryptografy (submitted).
3. **Solov'eva F. I., Avgustinovich S. V., Honold T., Heise W.** On the extendability of code isometries // J. Geometry. 1998. V. 61, N 1/2. P. 3–16.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: avgust@math.nsc.ru

Статья поступила
1 июня 1998 г.