ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1998. Серия 1. Том 5, № 4, 6–17

УДК 519

ВЫСОТА МЛАДШИХ ГРАНЕЙ В ПЛОСКИХ НОРМАЛЬНЫХ КАРТАХ*)

О. В. Бородин, Д. В. Лопарев

Высотой грани в плоском графе называется наибольшая степень инцидентных ей вершин. При соответствующих необходимых условиях доказано существование в любой плоской нормальной карте либо 3-грани высоты не более 20, либо 4-грани высоты не более 11, либо 5-грани высоты не более 5. Точность оценок 20 и 5 подтверждена примерами.

Введение

Плоской нормальной картой называется плоский граф, в котором степень $d(v)$ любой вершины v и ранг $k = r(f)$ любой грани f не меньше трех.

Для грани f рассмотрим вектор $R(f) = (r_1, \dots, r_k)$, где $k = r(f)$ и r_i — степени вершин, содержащихся в f, расположенные в неубывающем порядке. Грань f называется *гранью типа* $(R_1, \dots, R_k)$, если этот вектор покомпонентно мажорирует (нестрого) вектор $R(f)$.

Известно, что всякая плоская нормальная карта содержит грань ранга не более 5, называемую *младшей*. В 1940 г. А. Лебег [9] доказал следующий факт о строении младших граней.

Теорема 1. *В любой плоской нормальной карте существует грань одного из следующих типов:* $(3,6,\infty)$, $(3,7,41)$, $(3,8,23)$, $(3,9,17)$, $(3,10,14)$, $(3,11,13)$, $(4,4,\infty)$, $(4,5,19)$, $(4,6,11)$, $(4,7,9)$, $(5,5,9)$, $(5,6,7)$, $(3,3,3,\infty)$, $(3,3,4,11)$, $(3,3,5,7)$, $(3,4,4,5)$, $(3,3,3,3,5)$.

Высотой грани f будем называть максимальную степень вершины, инцидентной f. В дальнейшем оценки для высоты младших граней, вытекающие из теоремы 1, были улучшены для некоторых специальных классов графов. Так, О. В. Бородин [2, 3, 5], отвечая на вопросы А. Коцига в [7, 8], доказал существование в плоских триангуляциях, не

*) Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96–01–01614 и 97–01–01075).

содержащих граней типа $(4, 4, \infty)$, треугольника высоты 20, а в плоских графах с минимальной степенью 5 — треугольника высоты не более 7. (Оценки 20 и 7, как будет показано ниже, неулучшаемы.) С. В. Августинович и О. В. Бородин [1] доказали существование в четыреангуляциях на торе (а значит, и на плоскости) грани высоты 10. М. Хорнак и С. Йендроль [6] установили верхнюю оценку 23 для высоты 3-граней в классе плоских нормальных карт без граней типа $(3, 5, \infty)$, $(4, 4, \infty)$, $(3, 3, 3, \infty)$. В данной работе получен следующий результат.

Теорема 2. *В любой плоской нормальной карте без граней типа* $(4, 4, \infty)$, $(3, 5, \infty)$ *и* $(3, 3, 3, \infty)$ *существует либо* 3*-грань высоты не более* 20, *либо* 4*-грань высоты не более* 11, *либо* 5*-грань высоты не более* 5, *причем для* 3- *и* 5*-граней эти оценки неулучшаемы.*

Мы предполагаем, что и оценка 11 в теореме 2 точна, несмотря на возможность ее улучшения в классе четыреангуляций [1].

Условия теоремы 2 являются необходимыми. Действительно, в N-бипирамиде имеются грани только типа $(4, 4, N)$, а в двойственном многограннике к антипризме на $2N$ вершинах — только грани типа $(3, 3, 3, N)$. Для обоснования необходимости запрета на $(3, 5, \infty)$-грани сошлемся на пример из [6], в котором нет граней типа $(4, 4, \infty)$ и $(3, 3, 3, \infty)$, а каждая грань имеет высоту не менее 30.

Доказательство основного результата

Неулучшаемость оценки для 3-граней следует из графа, который получается из икосаэдра двукратным применением операции вставки в каждую грань по вершине и соединения новой вершины с граничными вершинами соответствующей грани. В получившемся графе каждая грань имеет тип $(3, 6, 20)$ или $(3, 20, 20)$.

Неулучшаемость оценки для 5-граней следует из графа, двойственного плосконосому додекаэдру (см. [4]). В этом графе каждая грань имеет тип $(3, 3, 3, 3, 5)$.

Пусть G является контрпримером к теореме 2, т. е. в любой его 3-грани есть такая вершина v, что $d(v) \geqslant 21$, в любой 4-грани есть такая вершина v, что $d(v) \geqslant 12$, а в любой 5-грани — такая вершина v, что $d(v) \geqslant 6$.

Формула Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ для G может быть переписана в виде $(2|E| - 6|V|) + (4|E| - 6|F|) = -12$. Отсюда следует, что

$$\sum_{v \in V}(d(v) - 6) + \sum_{f \in F}(2r(f) - 6) = -12. \tag{1}$$

Зарядом вершины v назовем число $d(v) - 6$, а *зарядом грани* f — число $2r(f) - 6$. Теперь перераспределим заряды, не меняя их суммы, таким образом, что их сумма окажется неотрицательной, и это противоречие завершит доказательство теоремы.

Дадим ряд определений. Вершину v в G назовем *m-вершиной*, если $3 \leqslant d(v) \leqslant 5$, *N-вершиной*, если $6 \leqslant d(v) \leqslant 11$, *M-вершиной*, если $12 \leqslant d(v) \leqslant 20$, и *B-вершиной*, если $d(v) \geqslant 21$.

В дальнейшем тип грани иногда будем задавать, например, так: $f = (4, B, N)$. Грань вида $(3, 3, u, v)$, где u является 4- или 5-вершиной, назовем *особой*.

Замечание A. Можно считать, что G не содержит цепей вида $(\ldots v_1, v_2, v_3, \ldots)$, где $d(v_1) \geqslant 5$, v_2 — m-вершина, v_3 — B-вершина и v_1 с v_3 не имеют общего ребра, так как, проведя это ребро, можно получить другой контрпример к теореме 2. Также считаем, что в G нет грани вида $(5, v_1, v_2)$, где v_1 и v_2 — B-вершины, поскольку, вставляя в такую грань вершину, мы также не нарушаем свойства рассматриваемого графа быть контрпримером.

Теперь укажем такие правила перераспределения зарядов элементов графа G, что новый заряд каждой вершины и грани будет неотрицательным, что позволит получить противоречие с (1).

П1. Любая грань f ранга не менее пяти на каждую инцидентную m-вершину дает заряд 1, за следующими двумя исключениями:

если в f имеется m-вершина, находящая на границе f между двумя не m-вершинами, то на нее передается заряд 2;

если в границу f входит фрагмент $(\ldots d(v), 3, 4, 3, d(u) \ldots)$, где v и u не являются m-вершинами, то f передает на 4-вершину, входящую в этот фрагмент, 2 единицы заряда.

П2. Любая 4-грань f передает:

а) 1 на каждую 3-вершину;

б) 1 на каждую m-вершину, если число таких вершин в грани не больше двух;

в) если имеются три m-вершины, то

в1) 0 на вершину степени 4 или 5, если f — особая;

в2) $\frac{1}{2}$ на вершины степени 4 или 5, если в f имеется только одна 3-вершина, и 1 на 5-вершину, окруженную двумя 4- или 5-вершинами;

г) 2 на m-вершину, если она единственна.

П3. Любая M-вершина отдает на каждую инцидентную ей грань заряд $\frac{1}{2}$, и этот заряд распределяется следующим образом:

а) если грань особая, то заряд целиком передается на 4- или 5-вершину;

б) если это 3-грань, то заряд передается на m-вершину, а иначе делится поровну среди m-вершин, лежащих в этой грани, если таковые найдутся.

П4. Любая B-вершина передает на смежную ей вершину v степени 3 или 4 следующий заряд:

а) если $d(v) = 3$, то:

а1) по слабому ребру:

$\frac{3}{2}$, если вершина v окружена только 3-гранями и смежна с N-вершиной;

1, если v окружена только 3-гранями и при ней нет N-вершины;

1, если одна из граней имеет ранг не менее пяти, либо одна из граней имеет ранг 4 и вершина, лежащая в этой грани и сопряженная с данной, не является m-вершиной;

$\frac{5}{4}$, если одна из инцидентных граней имеет ранг 4 и вершина, лежащая в этой грани и сопряженная с данной, является m-вершиной;

а2) по полуслабому ребру (отметим, что в силу замечания 3 в данном случае в окружении вершины v может быть только одна 3-грань):

1, если третья вершина, входящая в 3-грань, является N-вершиной, а иначе $\frac{1}{2}$;

б) если $d(v) = 4$, то 1 передается по слабому ребру и $\frac{1}{2}$ — по полуслабому.

П5. Если B-вершина входит в особую грань, то эта вершина передает на смежную 4- или 5-вершину $\frac{1}{2}$, за исключением следующих случаев, когда передачи не делается:

а) в особой грани B-вершина сопряжена с 4- или 5-вершиной и эта грань граничит через два $(3, B)$-ребра с гранями вида $(3, N, B)$;

б) в особой грани B-вершина сопряжена с 4- или 5-вершиной и эта грань граничит через $(3, B)$-ребра с гранью вида $(3, N, B)$ и гранью вида $(3, B, B)$;

в) в особой грани B-вершина смежна с 4-вершиной и эта грань граничит через $(3, B)$-ребро с гранью вида $(3, N, B)$, а через $(4, B)$-ребро — с гранью вида $(4, B, B)$.

П6. Пусть вершина u, являющаяся B- или M-вершиной, входит в особую грань $f_1 = (3,3,u,v)$, где v имеет степень 4 и не смежна с u. Пусть к тому же f_1 граничит через ребра $(3,u)$ с нетреугольными гранями f_2 и f_3, содержащими фрагмент типа $(\dots d(u), 3, 3, d(s)\dots)$, где s не является m-вершиной. Тогда если u есть B-вершина, то u передает на v не $\frac{1}{2}$, а 1. Если же u есть M-вершина, то вклад $\frac{1}{2}$, который по правилу П3 вершина u передает на f_2 и f_3, делится поровну по соседним граням, содержащим u. (Таким образом, f_1 получит от u дополнительный заряд $\frac{1}{2}$, который далее идет на v, т. е. общий заряд, передаваемый вершиной u на v, также равен 1.)

Полученный в результате выполнения перечисленных правил заряд элемента x обозначим через $M(x)$ и докажем, что $M(x) \geqslant 0$, если $x \in V \cup F$.

Сначала рассмотрим грань f. Если $r(f) \geqslant 6$, то на каждую вершину, входящую в грань, можно отдать по 1, поскольку $2r(f) - 6 - r(f) \geqslant 0$. Если при этом w не является m-вершиной и лежит на границе f, то w отдает соседним m-вершинам, лежащим в f, по $\frac{1}{2}$. Пусть в f есть фрагмент типа $(\dots 3, 4, 3\dots)$, ограниченный не m-вершинами u и v. Тогда поскольку 3-вершины, входящие в этот фрагмент, не смежны по циклу с двумя не m-вершинами (см. П1), то вклад $\frac{1}{2}$, который передается на них с u и v соответственно, передается дальше, на 4-вершину. Тем самым 4-вершина получит от f в общей сложности две единицы заряда.

Каждая 5-грань f содержит не крайней мере одну не m-вершину. Значит, на каждую m-вершину f может передать 1. Заметим, что f содержит не более двух m-вершин, смежных с обеих сторон с не m-вершинами. Такие m-вершины будем далее называть *зажатыми*. Если зажатая вершина единственна, то на нее передается заряд 2, а на остальные две — по 1. Если имеются две зажатые вершины, то на каждую из них передается по 2, причем других младших вершин нет. Если f содержит фрагмент типа $(\dots 3, 4, 3\dots)$, ограниченный не m-вершинами u и v, то f не содержит зажатых 3-вершин. Поэтому согласно П1 грань f отдает на 4-вершину 2, а на 3-вершины — по 1.

Каждая 4-грань имеет заряд 2, и согласно П2 он распределяется по m-вершинам. Ввиду П3 имеем $M = 0$ для любой 3-грани. Поэтому $M(f) \geqslant 0$ для любой $f \in F$.

Теперь пусть v — вершина графа G. Будем различать 9 случаев.

Случай 1. $d(v) = 3$.

Пусть при v есть только 3-грани. Так как G — контрпример, то v смежна не менее чем с двумя B-вершинами. Если третья вершина является N-вершиной, то по П4а1 имеем $M(v) \geqslant -3 + \frac{3}{2} \times 2 = 0$. Если третья

вершина является M-вершиной, то по П4а1 с каждой B-вершины на v отдается по 1, а по П3б с M-вершины через каждую из двух 3-граней — по $\frac{1}{2}$. Поэтому $M(v) = -3 + 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 = 0$. Если v смежна с тремя B-вершинами, то по П4а1 имеем $M(v) = -3 + 1 \times 3 = 0$.

Пусть при v есть только одна нетреугольная грань f (по замечанию А общая вершина 3-граней, смежная с v, есть B-вершина, а две другие смежные — не B-вершины).

Если $r(f) \geqslant 5$, то по правилу П1 с f на v приходит 2, а по П4а1 с B-вершины приходит 1. Отсюда $M(v) = -3 + 2 + 1 = 0$.

Пусть $r(f) = 4$. Если вершина, входящая в 4-грань и не смежная с v, не является m-вершиной, то по П4а1 и П2г имеем $M(v) = -3+1+2 = 0$. Иначе v смежна с M-вершиной и по П3б, П2а и П4а1 получаем $M(v) = -3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{5}{4} = 0$.

Пусть есть только одна 3-грань f. Тогда по П1 и П2а вершина v получит с каждой нетреугольной грани не менее 1. Если ни одна из двух других вершин, лежащих в 3-грани, не является N-вершиной, то по П4а2 каждая из них передаст по $\frac{1}{2}$ либо по ребру (B-вершина), либо через 3-грань (M-вершина). В противном случае согласно П4а2 В-вершина дает 1. В итоге получаем $M(v) = 0$.

Если 3-граней при v нет, то каждая грань, содержащая вершину v, дает по 1 в силу П1 и П2а, откуда $M(v) = 0$.

В разборе случаев 4- и 5-вершин нам понадобится следующая

Лемма (об исключениях). *В исключениях, описанных в правиле* П5, 4- *или* 5-*вершина, не получающая передачи через особую грань, компенсирует свой отрицательный заряд за счет вкладов других окружающих ее элементов.*

Доказательство. Пусть v обозначает 4- или 5-вершину, на которую не делается передача с B-вершины u в исключительных случаях.

Случай А. Заметим, что грани, соседствующие с особой гранью f через ребра, соединяющие v с 3-вершиной, будут иметь ранг не менее 4 и содержать цепь типа $(\dots d(v), 3, N \dots)$. Значит, по П1 и П2б каждая такая грань дает на v не менее 1, т. е. $M(v) \geqslant -2 + 2 \times 1 = 0$.

Случай Б. Рассмотрим фрагмент цепи $(\dots u_1, v_1, v, v_2, u_2 \dots)$, где все вершины, кроме v, смежны с u, u_1 является N-вершиной, u_2 — B-вершиной, а v_1 и v_2 — 3-вершинами из f. Через f_1 обозначим грань, содержащую фрагмент $(\dots u_1, v_1, v \dots)$, а через f_2 — грань, содержащую фрагмент $(\dots u_2, v_2, v \dots)$. Очевидно, что с f_1, как и в случае А, на v передается не менее 1. Можно считать, что v имеет степень 4. Если грань f_2 имеет ранг 5, то она также дает 1 на v по П1, откуда $M(v) = 0$. Пусть f_2 есть 4-грань (очевидно, что быть 3-гранью она не

может). Четвертую грань, содержащую v, обозначим через f_3. Рассмотрим два подслучая.

Пусть f_2 также попадает в исключения, описываемые леммой (возможен лишь случай Б). Это значит (см. П5), что f_3 содержит фрагмент $(\dots d(v), 3, N \dots)$, и тогда f_3 дает на v также не менее 1 по П1 и П2б, откуда $M(v) \geqslant 0$.

Пусть f_2 не попадает в исключения. Тогда она дает на v не менее $\frac{1}{2}$. Если при этом f_3 также не попадает в исключения, то гранью f_3 на вершину v будет передаваться не менее $\frac{1}{2}$. Отсюда $M(v) \geqslant 0$. Если же f_3 попадает в исключения, то f_1 будет содержать фрагмент типа $(\dots N, 3, d(v), 3, d(s) \dots)$, где s есть N- или B-вершина. Таким образом, $r(f_3) \geqslant 5$ и, значит, по П1 (4-вершина v зажата в цепи парами типа $(3, \geqslant 6)$), f_1 дает на v не 1, а 2. Отсюда $M(v) = -2 + 2 = 0$.

Случай В. Рассмотрим фрагмент цепи $(\dots u_1, v, v_1, v_2, u_2 \dots)$, когда все вершины, кроме v_1, смежны с u, u_1 является B-вершиной, u_2 — N-вершиной, а v_1 и v_2 — 3-вершинами. Через f_1 обозначим грань (u_1, v, u), через f_2 — грань, граничащую с f_1 через ребро (u_1, v), через f_3 — грань, граничащую с f через ребро (v, v_1).

Отметим, что на v с вершин u и u_1 по П4б идет не менее чем по $\frac{1}{2}$. Нетрудно видеть, что $r(f_3) \geqslant 4$.

Если f_3 попадает в исключения (возможен только случай В), то f_2 есть 3-грань, содержащая две B-вершины, одна из которых u_1. Тогда по П4б на v с u_1 передается 1, а с другой B-вершины — $\frac{1}{2}$. Отсюда $M(v) = 0$.

Пусть f_3 не попадает в исключения, т. е. с f_3 на v приходит не менее $\frac{1}{2}$. Если грань f_2 имеет ранг 3, то по правилу П4б с u_1 на v приходит не $\frac{1}{2}$, а 1. Следовательно, $M(v) = -2 + 1 + \frac{1}{2} \times 2 = 0$. Пусть f_2 — нетреугольная грань. Если f_2 не является 4-гранью, то она на v дает 1 и $M(v) \geqslant -2 + 1 + \frac{1}{2} \times 2 = 0$. Пусть f_2 имеет ранг 4. Если f_2 не попадает в исключения, то с нее на v приходит не менее $\frac{1}{2}$, откуда $M(v) \geqslant -2 + \frac{1}{2} \times 4 = 0$. Если f_2 также попадает в исключения, т. е. является особой и не передает на v положительного вклада (возможен только случай В), то f_3 будет особой, причем по П6 B- или M-вершина, входящая в f_3, будет давать на v не $\frac{1}{2}$, а 1. Таким образом, $M(v) = -2 + 1 + \frac{1}{2} \times 2 = 0$. Лемма доказана.

Ввиду леммы при доказательстве неотрицательности M для 4- и 5-вершин можно считать, что исключительных ситуаций в их окружении не возникает. Таким образом, каждая 4- или 5-вершина в дальнейшем получает от нетреугольной грани не менее $\frac{1}{2}$.

Случай 2. $d(v) = 4$.

Пусть вокруг v имеются только 3-грани. Так как G — контрпример, то v смежна с двумя противоположными B-вершинам. Тогда по П4б1 имеем $M(v) \geqslant -2 + 2 \times 1 = 0$.

Пусть в окружении v есть только одна нетреугольная грань. Заметим, что любая нетреугольная грань дает на v не менее $\frac{1}{2}$. Пусть v смежна по циклу с вершинами v_1, v_2, v_3 и v_4, причем 3-грани такие: $(v_4, v, v_1), (v_1, v, v_2), (v_2, v, v_3)$. Значит, либо v_1, либо v_2 является B-вершиной и по П4б дает 1 на v. Пусть это будет v_1. Тогда либо v_2, либо v_3 тоже является B-вершиной, которая согласно П4б передает на v не менее $\frac{1}{2}$. Кроме того, с нетреугольной грани v получает не менее $\frac{1}{2}$, откуда $M(v) \geqslant -2 + 1 + \frac{1}{2} \times 2 = 0$.

Пусть при v имеется только две 3-грани. Сначала допустим, что эти грани несмежны. Тогда каждая из них содержит B-вершину, которая по П4б передает на v заряд $\frac{1}{2}$. Кроме того, с двух нетреугольных граней v получает не менее чем по $\frac{1}{2}$. В итоге получаем $M(v) \geqslant -2 + \frac{1}{2} \times 4 = 0$.

Если же эти 3-грани смежны, то либо имеют одну общую B-вершину, с которой по П4б на v идет 1, либо две, лежащие в разных гранях, которые согласно П4б дают на v по $\frac{1}{2}$. Есть также две нетреугольные грани, с каждой из которых на v поступает не менее $\frac{1}{2}$, откуда $M(v) \geqslant -2 + 1 + \frac{1}{2} \times 2 = 0$.

Пусть при v есть только одна 3-грань. Тогда эта грань содержит В-вершину, с которой по П4б на v передается $\frac{1}{2}$, а так как каждая нетреугольная грань дает на v не менее $\frac{1}{2}$, имеем $M(v) \geqslant -2 + \frac{1}{2} \times 4 = 0$.

Если 3-граней при v нет, то с каждой грани вершина v получает не менее $\frac{1}{2}$, что влечет $M(v) \geqslant -2 + \frac{1}{2} \times 4 = 0$. Доказательство для случая 4-вершин закончено.

Случай 3. $d(v) = 5$.

Если в окружении вершины v есть хотя бы одна грань f ранга не менее пяти, то согласно П1 на v с f приходит 1, т. е. $M(v) = -1 + 1 = 0$. В силу замечания А окружение вершины v не может состоять только из 3-граней, поскольку из нечетности следовало бы существование грани типа $(5, B, B)$. Если в окружении вершины v есть хотя бы две 4-грани, то с каждой из них v получит не менее $\frac{1}{2}$, и тогда $M(v) \geqslant -1 + \frac{1}{2} \times 2 = 0$.

Будем считать, что v инцидентна только одной 4-грани. Если обе вершины, смежные v и лежащие в 4-грани f, являются B-вершинами, то по П2б на v с f приходит не менее 1, и тогда $M(v) = -1 + 1 = 0$. Если одна из них является B-вершиной, а другая нет, то в окружении вершины v возникает грань вида $(5, B, B)$, хотя в силу замечания 3 граф G не содержит таких граней.

Пусть среди вершин, смежных с v и лежащих в 4-грани f, нет B-вершин. Если обе эти вершины являются 4- или 5-вершинами (заметим, что 3-вершинами они быть не могут), то по правилу П2в2 на v с f поступает 1, т. е. $M(v) = -1 + 1 = 0$.

Если хотя бы одна из этих вершин является N-вершиной, а другая не M-вершина, то по П2б вершина v получит с f не менее 1, что дает $M(v) = -1 + 1 = 0$. Если же хотя бы одна из этих вершин является M-вершиной, то по П2в2 на v с f приходит не менее $\frac{1}{2}$ и по П3б с M-вершины через 3-грань приходит еще $\frac{1}{2}$. Отсюда $M(v) = -1 + \frac{1}{2} \times 2 = 0$. Разбор 5-вершин закончен.

Случай 4. $6 \leqslant d(v) \leqslant 11$.

Поскольку изначально заряды таких вершин были неотрицательными и отрицательных вкладов с других вершин на них не поступало, имеем $M(v) \geqslant 0$.

Случай 5. $12 \leqslant d(v) \leqslant 20$.

По П3 получаем, что $M(v) = d(v) - 6 - d(v) \times \frac{1}{2} = \frac{(d(v)-12)}{2} \geqslant 0$.

Случай 6. $d(v) \geqslant 21$.

Произведем следующее усреднение передач зарядов от v на смежные вершины, позволяющее оценить сверху суммарную передачу от вершины v. Ребра, по которым v передает заряд, будем называть *проводниками.* Если делается передача с v на сопряженную вершину через особую грань, то передаваемый заряд делится поровну по двум соседним по циклу ребрам. Ребра, не являющиеся проводниками, будем называть *нулевыми.* С каждого проводника отдадим на соседнее нулевое ребро заряд $\frac{3}{8}$. Очевидно, что после выполнения этой процедуры вершина v будет отдавать по каждому инцидентному ей ребру не более $\frac{3}{4}$. Получаем $M(v) \geqslant d(v) - 6 - d(v) \times \frac{3}{4} = \frac{(d(v)-24)}{4}$. Итак, при $d(v) \geqslant 24$ мы доказали, что $M(v) \geqslant 0$.

Заметим, что при таком усреднении для случаев $d(v) = 21, 22, 23$ на v возникает дефицит соответственно в $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к доказательству того, что в этих случаях в окружении вершины v найдутся ребра, по которым с v передается не $\frac{3}{4}$, а меньше, например x, и тогда резерв, который есть разность $\frac{3}{4}-x$, будет накапливаться на v. А именно, для $d(v) = 21$ нам нужен суммарный резерв $\frac{3}{4}$, для $d(v) = 22$ нужен резерв $\frac{1}{2}$, для $d(v) = 23$ нужна $\frac{1}{4}$. Сразу отметим следующее.

а) Если в окружении вершины v есть два подряд идущих нулевых ребра, то на v возникает резерв $\frac{3}{4}$ (за счет того, что на каждом из них остается по $\frac{3}{8}$).

б) Если в окружении вершины v есть нетреугольная грань f, то на v уже за счет f возникает резерв не менее $\frac{1}{4}$.

Действительно, пусть грани, соседствующие с f и содержащие v, являются 3-гранями. Если $r(f) \geqslant 4$ и f — не особая, то по каждому из ребер этой грани, содержащих v, уходит не более 1. Значит, на каждом таком ребре накапливается резерв не менее $\frac{1}{8}$, т. е. на v уже возникает резерв $\frac{1}{4}$. Пусть f — особая грань. Тогда с v на вершины, лежащие в f, в сумме идет не более 2. (Естественно, учитываются исключения, описанные в правиле П5.) Таким образом, на v и в этом случае образуется резерв не менее $\frac{1}{4}$.

Пусть теперь хотя бы одна из инцидентных v граней не является 3-гранью. Тогда независимо от того, является f особой или нет, на ней скапливается резерв не менее чем $\frac{1}{4}$, поскольку суммарный вклад, который делает v на вершины, лежащие в f, не более $\frac{3}{2}$.

Случай 7. $d(v) = 21$.

Если в окружении вершины v есть хотя бы три грани ранга не менее 4, то на v скапливается резерв $\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$. Пусть v инцидентна двум граням ранга не менее 4. Тогда в силу нечетности $d(v)$ либо одна из граней ранга не менее 4 имеет нулевое ребро, содержащее v, и резерв на v равен $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, либо при v есть два подряд идущих нулевых ребра.

Пусть при v есть только одна грань f грань ранга не менее 4. Тогда в силу того, что $d(v)$ не делится на 4, ребра, инцидентные и f, и v, будут только такого вида: (v, B) и (v, s), где s — либо N-, либо M-вершина.

Если f не является особой гранью, то по одному из этих ребер будет передаваться 1, а по другому $\frac{1}{2}$, и тем самым на v образуется резерв $\frac{3}{4}$.

Пусть f является особой гранью. Заметим, что вершина s смежна с 3-вершиной $v_1 \in f$, где v_1 смежна с v. В противном случае, т. е. если s смежна с 4- или 5-вершиной, на f будет накапливаться резерв не $\frac{1}{4}$, а $\frac{3}{4}$. Если s есть N-вершина, то по П5 (исключения б) и в)) с v не делается передачи $\frac{1}{2}$ через особую грань, и поэтому резерв равен $\frac{3}{4}$. Если s есть M-вершина, то по П3б с s на v_1 поступает дополнительно $\frac{1}{2}$, что позволяет накопить на v дополнительный резерв $\frac{1}{2}$, т. е. суммарный резерв равен $\frac{3}{4}$.

Если же в окружении v имеются только 3-грани, то в силу нечетности $d(v)$ появятся два подряд идущих нулевых ребра.

Случай 8. $d(v) = 22$.

Если в окружении вершины v имеются хотя бы две грани ранга не менее 4, то это дает необходимый резерв $\frac{1}{2}$. Пусть есть только одна грань ранга не менее 4. Тогда в силу четности $d(v)$ либо одно из ребер этой грани, которое содержит v, является нулевым, и тогда такая грань

дает резерв не менее $\frac{1}{2}$, либо возникают два подряд идущих нулевых ребра.

Если при v имеются только 3-грани, то в силу того, что $d(v)$ не делится на 4, в окружении вершины v найдется 3-вершина u, которая смежна либо с двумя B-вершинам, либо с двумя не B-вершинами (заметим, что они не могут быть m-вершинами). В первом случае по П4а1 на u с v передается 1 и тем самым на v набирается необходимый резерв $\frac{1}{2}$. Рассмотрим второй случай. Если обе указанные вершины являются N-вершинами, то по П4а1 с v на u передается 1, и опять на v есть резерв $\frac{1}{2}$. Если хотя бы одна из них есть M-вершина, то в окружении вершины v возникает не менее двух ребер, по которым согласно П4а1 с v передается не более $\frac{5}{4}$, т. е. на v получается резерв $\frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$.

Случай 9. $d(v) = 23$.

Если в окружении вершины v есть хотя бы одна нетреугольная грань, то уже это создает необходимый резерв $\frac{1}{4}$. Если в окружении вершины v имеются только 3-грани, то в силу нечетности $d(v)$ возникают два подряд идущих нулевых ребра.

В итоге получаем $M(v) \geqslant 0$ для всех $v \in V$. Противоречие. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В., Бородин О. В.** Окрестности ребер в нормальных картах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 3–9.

2. **Бородин О. В.** Решение задач Коцига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоских графах // Мат. заметки. 1989. Т. 46, вып. 5. С. 10–12.

3. **Бородин О. В.** Минимальный вес грани в плоских триангуляциях без 4-вершин // Мат. заметки. 1992. Т. 51, вып. 1. С. 16–19.

4. **Иванов А. Б.** Полуправильные многогранники // Мат. энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1984. Т. 4. С. 463.

5. **Borodin O. V.** Triangulated 3-polytopes with restricted minimal weight of faces // Discrete Math. (to appear).

6. **Horňák M., Jendrol' S.** Unavoidable sets of face types for planar maps // Discuss. Math. Graph Theory. 1996. V. 16, N 2. P. 207–218.

7. **Kotzig A.** On the theory of Euler polyhedra // Mat.-Fyz. Casopis. 1963. V. 13, N 1. P. 20–34.

8. **Kotzig A.** Extremal polyhedral graphs // Proc. Second International Conference on Combinatorial Mathematics. N. Y.: New York Acad. Sci., 1978. P. 569–570. (Annals of the New York Academy of Science; V. 319).

9. **Lebesgue H.** Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. T. 19. P. 27–43.

Адреса авторов:

О. В. Бородин
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: brdnoleg@math.nsc.ru
Д. В. Лопарев
Новосибирский
государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090 Новосибирск, Россия

Статья поступила
17 июня 1998 г.,
переработанный вариант —
2 октября 1998 г.