ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1998. Серия 1. Том 5, № 4, 18–24

УДК 519.1

# РЕБЕРНАЯ И ТОТАЛЬНАЯ РАСКРАСКА ИНТЕРВАЛЬНЫХ ГРАФОВ*)

*В. А. Бояршинов*

Реберной раскраской графа называется приписывание ребрам графа цветов таким образом, что смежные ребра получают разные цвета. Наименьшее число цветов, в которые можно раскрасить ребра графа $G$, называется хроматическим индексом графа $G$ и обозначается через $\chi'(G)$. Говорят, что $G$ принадлежит классу 1, если $\chi'(G) = \Delta(G)$, где $\Delta(G)$ — степень графа $G$; иначе $G$ принадлежит классу 2. Тотальной раскраской графа называется приписывание вершинам и ребрам графа цветов таким образом, чтобы смежные или инцидентные элементы получили разные цвета. Наименьшее число цветов, в которые можно тотально раскрасить граф $G$, называется тотальным хроматическим числом $G$ и обозначается через $\chi_{\mathrm{T}}(G)$. Говорят, что $G$ принадлежит типу 1, если $\chi_{\mathrm{T}}(G) = \Delta(G) + 1$; $G$ принадлежит типу 2, если $\chi_{\mathrm{T}}(G) = \Delta(G) + 2$. В данной работе рассматривается проблема классификации интервальных графов. Доказано, что любой интервальный граф с нечетной максимальной степенью вершин принадлежит классу 1 и его ребра могут быть раскрашены в минимальное число цветов алгоритмом, временная сложность которого не превосходит $O(|V_G| + |E_G| + (\Delta(G))^2)$. Затем показано, что для интервальных графов выполняется предположение Бехзада и Визинга о том, что $\chi_T(G) \leqslant \Delta(G) + 2$. Кроме того, доказано, что любой интервальный граф с четной максимальной степенью вершин принадлежит типу 1 и его элементы могут быть раскрашены в минимальное число цветов алгоритмом, временная сложность которого не превышает $O(|V_G| + |E_G| + (\Delta(G))^2)$.

## 1. Основные факты и определения

Все не определяемые здесь понятия могут быть найдены в [3].

*Реберной раскраской* графа называется приписывание ребрам графа цветов таким образом, что смежные ребра получают разные цвета. Наименьшее число цветов, в которые можно раскрасить ребра графа $G$, называется *хроматическим индексом* графа $G$ и обозначается через $\chi'(G)$. Максимальная степень вершин графа $G$ обозначается через $\Delta(G)$.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98–01–00748).

Известно, что в общем случае задача реберной раскраски графа является NP-полной [7].

Классическим в этой области является следующий результат.

**Теорема Визинга** [1]. *Хроматический индекс любого графа $G$ равен либо $\Delta(G)$, либо $\Delta(G)+1$.*

Естественным образом встает проблема классификации графов: говорят, что $G$ принадлежит *классу 1*, если $\chi'(G) = \Delta(G)$; иначе $G$ принадлежит *классу 2*.

Проблема классификации графов решена для некоторых частных видов графов (полных, двудольных, плоских графов максимальной степени не меньше 8, а также графов большой по сравнению с числом вершин максимальной степени). Известны полиномиальные алгоритмы раскраски ребер в таких графах в минимальное число цветов [6].

Граф $G$ называется *$\rho$-критическим*, если $\Delta(G) = \rho$, $G$ принадлежит классу 2 и после удаления произвольного ребра из $G$ получается граф с меньшим хроматическим индексом. Свойства критических графов изучались многими авторами [5, 6]. В настоящее время основным достижением в данном направлении является лемма Визинга о смежности.

**Лемма** (Визинг, [6]). *Пусть $G$ — $\rho$-критический граф, $v$ и $w$ — смежные вершины в $G$ и $\deg(v) = k$. Тогда*

(1) *если $k < \rho$, то вершина $w$ смежна по крайней мере с $\rho - k + 1$ вершинами степени $\rho$;*

(2) *если $k = r$, то $w$ смежна по крайней мере с двумя вершинами степени $\rho$.*

*Тотальной раскраской* графа называется приписывание вершинам и ребрам графа цветов таким образом, что смежные или инцидентные элементы получают разные цвета. Наименьшее число цветов, в которое можно тотально раскрасить граф $G$, называется его *тотальным хроматическим числом* и обозначается через $\chi_{\mathrm{T}}(G)$.

Известно, что в общем случае задача тотальной раскраски графа является NP-полной [14].

**Гипотеза Бехзада** [4] **и Визинга** [2] **о тотальной раскраске**: для любого графа $G$ выполняется неравенство $\chi_T(G) \leqslant \Delta(G) + 2$.

В настоящее время предположение о тотальной раскраске графов доказано для некоторых частных классов графов (полных $r$-дольных, графов с большой относительно числа вершин максимальной степени, графов со степенью вершин, не превышающей 5, плоских графов максимальной степени, не меньшей 8) [8, 9, 15].

Говорят, что $G$ принадлежит *типу* 1, если $\chi_{\mathrm{T}}(G) = \Delta(G)+1$; $G$ принадлежит *типу* 2, если $\chi_{\mathrm{T}}(G) = \Delta(G)+2$.

Полностью проблему классификации графов удалось решить, например, для графов $G$ таких, что $\Delta(G) \geqslant |V_G| - 2$, двудольных графов и некоторых частных видов регулярных графов [15].

Граф называется *интервальным*, если он допускает представление конечными замкнутыми интервалами на действительной оси и вершины графа смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им интервалы пересекаются.

Широко известным характеристическим свойством интервальных графов является следующее [10, 11]: граф $G$ является интервальным тогда и только тогда, когда множество его максимальных клик $\{K_i\}_{i\in I}$ может быть линейно упорядочено таким образом, что для любой вершины $v$ графа $G$ выполняется условие

$$\text{если } v \in K_i, v \in K_j \text{ и } i < j, \text{ то } v \in K_l,\ l = i, i+1, \ldots, j.$$

Произвольную фиксированную таким образом упорядоченную последовательность максимальных клик в дальнейшем будем называть *характеристической последовательностью максимальных клик.*

Пусть $G$ — интервальный граф, $\{K_i\}_{i\in I}$ — его характеристическая последовательность максимальных клик. *Кластером* $KL(v)$, *индуцированным вершиной* $v$, будем называть множество максимальных клик, содержащих вершину $v$, т. е. $KL(v) = \{K_i \mid i \in I,\ v \in K_i\}$.

Непосредственно из определений следует, что кластер, индуцированный любой вершиной графа, является отрезком характеристической последовательности максимальных клик.

## 2. Основные результаты

Основными результатами являются теоремы 1–3. При их доказательстве используются следующие вспомогательные факты.

**Лемма 1.** [6]. *Пусть $K_n$ — полный $n$-вершинный граф. Тогда*

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n, & \text{если } n = 2m+1; \\ n-1, & \text{если } n = 2m. \end{cases}$$

**Лемма 2** [15]. *Пусть $K_n$ — полный $n$-вершинный граф. Тогда*

$$\chi_T(K_n) = \begin{cases} n, & \text{если } n = 2m+1; \\ n+1, & \text{если } n = 2m. \end{cases}$$

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — интервальный граф с $\Delta(G) = 2m+1$. Тогда $G$ может быть раскрашен в $2m+1$ цвет алгоритмом сложности $O(|V(G)| + |E(G)| + (\Delta(G))^2)$.*

Доказательство. Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_N$ — произвольная фиксированная характеристическая последовательность максимальных клик графа $G$. Без ограничения общности можно считать, что существует вершина $v' \in K_1$ такая, что $\deg(v') = \Delta(G) = 2m + 1$ (в противном случае можно добавить необходимое количество фиктивных вершин в $K_1$). Так как любое ребро графа принадлежит хотя бы одной максимальной клике, то реберная раскраска графа $G$ эквивалентна раскраске ребер всех максимальных клик графа $G$, удовлетворяющей следующим требованиям:

1) если ребро графа принадлежит нескольким кликам, то во всех кликах оно имеет один и тот же цвет;

2) любые два ребра, инцидентные одной вершине, имеют разные цвета.

В дальнейшем будем пользоваться следующим обозначением:

$$\mathrm{Trans}\ (r, r+1) = \{v \mid v \in K_r \cap K_{r+1}\}.$$

Окраску ребер всех максимальных клик, удовлетворяющую указанным выше свойствам, можно получить с помощью следующего алгоритма.

**Алгоритм.**

**Шаг 0.** Берется клика на $2m + 2$ вершинах.

Вершины клики нумеруются произвольным образом.

Ребра клики красятся в $2m + 1$ цвет (см. лемму 3.1).

Создается матрица $A = (a_{ij})$ размера $(2m + 2) \times (2m + 2)$.

Матрица $A$ заполняется по правилу: если ребро $(i, j)$ окрашено в цвет $c$, то $a_{ij} := c, c \in \{1, 2, \ldots, 2m + 1\}$.

**Шаг 1.** Вершины из $KL(v')$ нумеруются произвольным образом.

Ребра из $KL(v')$ красятся по правилу: если $a_{ij} = c$, то цвет ребра, соединяющего вершины $i$ и $j$, полагается равным $c$.

**Шаг i.** Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_r$ — клики, ребра которых уже окрашены. Подсчитывается $\mathrm{Trans}\ (r, r+1)$.

Среди вершин из $\mathrm{Trans}\ (r, r + 1)$ выбирается вершина $v^*$, являющаяся самой первой вершиной из $\mathrm{Trans}\ (r, r + 1)$, встречающейся при просмотре последовательности максимальных клик слева направо.

Рассматривается кластер $KL(v^*)$. Некоторые его вершины уже были занумерованы на предыдущих шагах алгоритма. Поскольку $\deg(v^*) \leqslant 2m+1$, имеем $|KL(v^*)| \leqslant 2m+2$. Поэтому остальные вершины из $KL(v^*)$ можно занумеровать таким образом, чтобы номер любой вершины из $KL(v^*)$ не превышал $2m + 2$ и никакие две вершины не имели одинаковых номеров.

После завершения нумерации каждому неокрашенному ребру из $KL(v^*)$, соединяющему вершины с номерами $i$ и $j$, приписывается цвет $c$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} = c$.

**Конец.**

Корректность алгоритма. Доказательство проводим по индукции.

Правильность раскраски ребер первого кластера на шаге 1 следует из того, что мы фактически построили изоморфное вложение первого кластера в окрашенную клику на $2m + 2$ вершинах. Предположим теперь, что на первых $i$ шагах алгоритма построена корректная частичная окраска ребер графа. Пусть $K_1, K_2, \dots, K_r$ – клики, ребра которых были окрашены на первых $i$ шагах. Пусть $K_l, K_{l+1}, \dots, K_r, K_{r+1}, \dots, K_{r+c}$ — кластер, индуцированный вершиной $v^* \in \mathrm{Trans}\,(r, r+1)$, выбранной на $(i+1)$-м шаге алгоритма.

Предположим, что после раскраски ребер из $KL(v^*)$ получилась некорректная частичная раскраска графа, т. е. существуют два ребра $e_1 = (a, b), e_2 = (b, c)$, окрашенные в один и тот же цвет.

По предположению индукции окраска ребер из клик $K_1, K_2, \dots, K_r$ была корректной. Поэтому хотя бы одно ребро из $\{e_1, e_2\}$ не лежит в кликах $K_1, K_2, \dots, K_r$. Без ограничения общности можно считать, что ребро $e_2$ обрабатывалось впервые на $(i + 1)$-м шаге алгоритма. Поскольку вершина $b$ принадлежит хотя бы одной из клик $K_r, \dots, K_{r+c}$, то из способа выбора вершины $v^*$ следует, что вершина $a$, а значит, и ребро $e_1$ обязаны лежать в $KL(v^*)$. Все вершины из $KL(v^*)$ на $(i+1)$-м шаге получили различные номера. Предположим, что $N(a) = i, N(b) = j$ и $N(c) = k$. Из работы алгоритма следует, что ребра $(i, j), (j, k)$ в правильно раскрашенной клике получили одинаковые номера, что противоречит начальному условию правильности раскраски клики.

Временнáя сложность. Все множества $\mathrm{Trans}\,(i, i + 1)$, а также вершины $v^*$ могут быть найдены еще при построении характеристической последовательности максимальных клик. Построение последовательности максимальных клик осуществляется за $O(|V_G| + |E_G|)$ шагов [10, 11]. Окраска клики с $\Delta(G) + 1$ вершинами и заполнение матрицы $A$ с информацией об окраске потребует $O((\Delta(G))^2)$ шагов.

Так как каждая вершина получает единственный номер и каждое ребро окрашивается только один раз, то из сказанного следует, что временная сложность алгоритма не превышает $O(|V_G| + |E_G| + (\Delta(G))^2)$. Теорема доказана.

В случае интервального графа с четной максимальной степенью аналогичная теорема не справедлива, поскольку в качестве контрпримера можно взять полный граф с нечетным числом вершин.

Приведенные ниже теоремы доказываются аналогично теореме 1 с использованием леммы 2.

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — интервальный граф с $\Delta(G) = 2m$. Тогда $G$ может быть тотально раскрашен в $2m + 1$ цвет алгоритмом сложности $O(|V(G)| + |E(G)| + (\Delta(G))^2)$.*

В случае интервального графа с нечетной максимальной степенью аналогичная теорема неверна. В качестве примера интервального графа с нечетной максимальной степенью, принадлежащего второму типу, можно взять полный граф с четным числом вершин. Таким образом, при $\Delta(G) = 2m + 1$ даже один кластер не обязательно принадлежит первому типу.

**Теорема 3.** *Пусть $G$ — произвольный интервальный граф. Тогда*

$$\chi_T(G) \leqslant \Delta(G) + 2.$$

Из теоремы 3 следует, что предположение о тотальной раскраске верно для всех интервальных графов.

## Заключение

Как уже упоминалось выше, в случае раскраски ребер графа $G$ с четной максимальной степенью $\Delta(G) = 2m$ даже один кластер не обязательно принадлежит первому классу. В то же время известен критерий принадлежности кластера первому классу.

**Теорема 4** [12, 13]. *Пусть $G$ — граф нечетного порядка $2s + 1$, содержащий вершину, смежную со всеми остальными вершинами графа. Тогда $G$ принадлежит первому классу тогда и только тогда, когда $G$ имеет не более $2s^2$ ребер.*

Понятно, что необходимым условием принадлежности графа первому классу является принадлежность первому классу всех кластеров, индуцированных вершинами степени $\Delta(G)$. Кажется правдоподобным, что это условие является также достаточным.

Гипотеза. Пусть $G$ — интервальный граф с максимальной степенью вершин, равной $2m$. Тогда $G$ принадлежит второму классу тогда и только тогда, когда в $G$ существует вершина $v^*$ такая, что $\deg(v^*) = 2m$ и $KL(v^*)$ принадлежит второму классу.

Выражаю искреннюю признательность В. А. Евстигнееву, А. В. Косточке и Л. С. Мельникову за конструктивное обсуждение этого результата, полезные замечания, а также помощь, оказанную при написании настоящей статьи.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Визинг В. Г.** Об оценке хроматического класса р-графа // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1964. Вып. 3. С. 3–24.
2. **Визинг В. Г.** Некоторые нерешенные задачи в теории графов // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23, вып. 6. С. 117–134.
3. **Зыков А. А.** Теория конечных графов. I. Новосибирск: Наука, 1969.
4. **Behzad M.** The total chromatic number of a graph: a survey // Combinatorial Mathematics and its Applications (Proc. Conf. Oxford, 1969). N. Y.: Acad. Press, 1971. P. 1–9.
5. **Chetwynd A. G., Hilton A. J. W., Hoffman D. G.** On the Δ-subgraph of graphs which are critical with respect to the chromatic index // J. Combin. Theory. Ser. B. 1989. V. 46, N 2. P. 240–245.
6. **Fiorini S., Wilson R. J.** Edge-colourings of graphs. London: Pitman, 1977.
7. **Holyer I.** The NP-completeness of some edge-partition problems // SIAM J. Comput. 1981. V. 10, N 4. P. 713–717.
8. **Kostochka A. V.** The total coloring of a multigraph with maximal degree 4 // Discrete Math. 1977. V. 17, N 1. P. 161–163.
9. **Kostochka A. V.** The total chromatic number of any multigraph with maximum degree five is at most seven // Discrete Math. 1996. V. 162, N 2. P. 199–214.
10. **Ma T.-H.** Algorithms on special classes of graphs and partially ordered sets. PhD thesis. Republic of China, Nankang, Taipei: Inst. of Inform. Sci., 1993.
11. **Ma T.-H., Hsu W.-L.** Fast and simple algorithms for recognizing chordal comparability graphs and interval orders. Republic of China, Nankang, Taipei: Internal Report. Inst. of Inform. Sci., 1991.
12. **Plantholt M.** The chomatic index of graphs with a spanning star // J. Graph Theory. 1981. V. 5, N 1. P. 45–53.
13. **Plantholt M. J.** The chromatic index of graphs with large maximum degree // Discrete Math. 1983. V. 47, N 1. P. 91–96.
14. **Sanchez-Arroyo A.** Determining the total colouring number is NP-hard // Discrete Math. 1989. V. 78, N 2. P. 315–319.
15. **Yap H. P.** Total colouring of graphs. Berlin: Springer–Verl., 1996. (Lecture Notes in Math.; V. 1623).


Адрес автора:

Институт систем
информатики СО РАН,
пр. Лаврентьева, 6,
630090 Новосибирск, Россия

Статья поступила
18 марта 1998 г.,
переработанный вариант —
18 сентября 1998 г.