ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1998. Серия 1. Том 5, № 4, 30–37

УДК 519.6

О ЗАДАЧАХ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ*)

В. А. Емеличев, О. А. Янушкевич

Статья является продолжением исследований, начатых в [2] и посвященных вопросам разрешимости проблемы нахождения всех лексикографических оптимумов многокритериальной (векторной) задачи оптимизации в классе алгоритмов линейной свертки критериев. Опираясь на комбинаторную технику доказательств, авторы получили новые достаточные условия такой разрешимости в терминах понятий, сходных с оптимумом Джоффриона.

Пусть на множестве (допустимых) решений X определен векторный критерий

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbf{R}^n, \quad n \geqslant 2,$$

компоненты которого — частные критерии — будем считать минимизируемыми, т. е. для любого i из $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$

$$f_i(x) \to \min_X .$$

Будем использовать обычную терминологию векторной оптимизации [1, 10]. Напомним, что множество оптимумов Парето или эффективных решений задается равенством

$$P(X, f) = \{x \in X \mid \pi(x) = \varnothing\},$$

где

$$\pi(x) = \{x' \in X \mid f(x) > f(x')\}.$$

В задаче лексикографической оптимизации частные критерии упорядочены (пронумерованы) по важности. При этом возникает понятие лексикографического оптимума.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (гранты Ф95–70 и МП96–35), а также Международной Соросовской программы образования в области точных наук (грант «Соросовский профессор» для первого автора).

Пусть S_n — множество всех $n!$ перестановок чисел $1, 2, \dots, n$. Для каждой перестановки $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S_n$ в критериальном пространстве $\mathbf{R}^n$ вводится отношение лексикографического порядка векторов $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$:

$$y \prec_s y'$$

тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

1) $y = y'$;

2) существует $j \in N_n$ такое, что при каждом i из N_{j-1} выполняются соотношения $y_{s_j} < y'_{s_j}$ и $y_{s_i} = y'_{s_i}$.

Здесь и далее будем считать, что $N_0 = \varnothing$.

Множество

$$L(X, f) = \bigcup_{s \in S_n} L(X, f, s), \tag{1}$$

где $L(X, f, s) = \{x \in X \mid f(x) \prec_s f(x')$ при любом $x' \in X$ называется *лексикографическим*, а его элементы — *лексикографическими оптимумами*. Легко видеть, что $L(X, f) \subseteq P(X, f)$.

В дальнейшем будем предполагать, что непустое множество решений X и векторный критерий $f(x)$ таковы, что лексикографическое множество $L(X, f)$ непусто.

Будем говорить, что задача нахождения лексикографического множества $L(X, f)$ разрешима с помощью алгоритма линейной свертки критериев, если для любого $x^o \in L(X, f)$ существует $\lambda \in \Lambda_n$ такое, что $\Phi(x^o, \lambda) = \min\{\Phi(x, \lambda) \mid x \in X\}$, т. е. $L(X, f) \subseteq \Lambda(X, f)$, где

$$\Lambda(X, f) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_n} \Lambda(X, f, \lambda),$$

$$\Lambda_n = \Big\{\lambda \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0 \text{ при любом } i \in N_n\Big\},$$

$$\Lambda(X, f, \lambda) = \arg\min\{\Phi(x, \lambda) \mid x \in X\}, \quad \Phi(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x).$$

Пусть $n = 2$, $X = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = (1 - x)^2$. Нетрудно убедиться, что $1 \in L(X, f) \setminus \Lambda(X, f)$, т. е. в этом случае задача нахождения множества $L(X, f)$ не разрешима с помощью алгоритма линейной свертки критериев.

Возникает вопрос: какие условия должны выполняться, чтобы задача нахождения лексикографического множества $L(X, f)$ была разрешима в классе указанных алгоритмов?

Следуя [12] (см. также [1, 10]), введем множество $G(X,f)$ оптимумов Джоффриона или собственно эффективных решений: x^o из $P(X,f)$ принадлежит множеству $G(X,f)$ тогда и только тогда, когда существует такое $\Theta > 0$, что при любых $x \in X$ и $i \in N_n$ имеется $j \in N_n$ такое, что

$$\delta_i(x^o,x) > 0 \Longrightarrow \delta_i(x^o,x) + \Theta\delta_j(x^o,x) \leqslant 0.$$

Здесь $\delta_i(x^o,x) = f_i(x^o) - f_i(x)$ при любом $i \in N_n$.

Как отмечалось в [2], из теоремы Джоффриона ($\Lambda(X,f) \subseteq G(X,f)$) вытекает следующее утверждение:

$$L(X,f) \subseteq \Lambda(X,f) \Longrightarrow L(X,f) \subseteq G(X,f), \tag{2}$$

т. е. необходимым условием разрешимости рассматриваемой задачи является выполнение включения $L(X,f) \subseteq G(X,f)$.

Установлению достаточных условий разрешимости предпошлем вспомогательные понятия и две леммы.

Зафиксировав перестановку $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S_n$, введем множество $U(X,f,s)$: элемент x^o из $P(X,f)$ принадлежит множеству $U(X,f,s)$ тогда и только тогда, когда существует такое $\Theta > 0$, что при любых $x \in X$ и $i = 2,3,\dots,n$ имеется $j \in N_{i-1}$ такое, что

$$\delta_{s_i}(x^o,x) > 0 \Longrightarrow \delta_{s_i}(x^o,x) + \Theta\delta_{s_j}(x^o,x) \leqslant 0.$$

Методом от противного легко доказать, что при любом $s \in S_n$

$$U(X,f,s) \subseteq L(X,f,s). \tag{3}$$

Введем обозначение

$$U(X,f) = \bigcup_{s \in S_n} U(X,f,s).$$

Тогда, пользуясь (3) и (1), убеждаемся в справедливости следующей леммы.

Лемма 1. $U(X,f) \subseteq L(X,f)$.

Лемма 2. $U(X,f) \subseteq \Lambda(X,f)$.

Доказательство. Пусть $x^o \in U(X,f)$. Не нарушая общности, можно считать, что $x^o \in U(X,f,s)$, где $s = 1,2,\dots,n$. Тогда, введя множество индексов $I(x^o,x) = \{i \in N_n \mid \delta_i(x^o,x) > 0\}$, легко убедиться в справедливости следующего факта: существует такое $\Theta > 0$, что при любых $x \in X$ и $i \in I(x^o,x)$ существует $j(i) \in N_{i-1}$ такое, что

$$\delta_i(x^o,x) + \Theta\delta_{j(i)}(x^o,x) \leqslant 0. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что в качестве вектора $\lambda \in \Lambda_n$, удовлетворяющего неравенствам

$$\Phi(x^o, \lambda) \leqslant \Phi(x, \lambda)$$

при любом $x \in X$ (они свидетельствуют о том, что $x^o \in \Lambda(X, f)$), можно взять вектор λ^o с компонентами

$$\lambda_i^o = \frac{(n-i)!\Theta^{n-i}}{\beta} \text{ при } i \in N_n, \quad \beta = \sum_{i=1}^{n} (n-i)!\Theta^{n-i}.$$

Действительно, учитывая (4) и очевидные соотношения

$$\begin{gathered} \delta_{j(i)}(x^o, x) \leqslant 0 \text{ при любом } i \in I(x^o, x); \\ j(i) = k \Longrightarrow i \geqslant k+1 \quad (k < n); \\ |\{i \in I(x^o, x) \mid j(i) = k\}| \leqslant n - k, \end{gathered}$$

убеждаемся в справедливости следующих неравенств. При любом $x \in X$

$$\begin{aligned} &\Phi(x^o, \lambda^o) - \Phi(x, \lambda^o) \\ &\leqslant \frac{1}{\beta}\Bigg(\sum_{i \in N_n \setminus I(x^o, x)} (n-i)!\Theta^{n-i}\delta_i(x^o, x) - \sum_{i \in I(x^o, x)} (n-i)!\Theta^{n-i+1}\delta_{j(i)}(x^o, x)\Bigg) \\ &\qquad = \frac{1}{\beta}\Bigg(\sum_{i \in N_n \setminus I(x^o, x)} (n-i)!\Theta^{n-i}\delta_i(x^o, x) \\ &\qquad\quad - \sum_{k \in N_n \setminus I(x^o, x)} \sum_{\substack{i \in I(x^o, x) \\ j(i) = k}} (n-i)!\Theta^{n-i+1}\delta_{j(i)}(x^o, x)\Bigg) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Из лемм 1 и 2 следует

Теорема 1. *Для того чтобы задача нахождения лексикографического множества $L(X, f)$ была разрешима с помощью алгоритма линейной свертки критериев, достаточно выполнения равенства $L(X, f) = U(X, f)$.*

Введем еще одно подмножество $V(X, f)$ множества Парето $P(X, f)$: x^o из $P(X, f)$ принадлежит множеству $V(X, f)$ тогда и только тогда, когда существует такое $\Theta > 0$, что при любых $x \in X$, $i \in N_n$ и $j \in N_n$ справедлива импликация

$$(\delta_i(x^o, x) > 0 \ \& \ \delta_j(x^o, x) < 0) \Longrightarrow \delta_i(x^o, x) + \Theta\delta_j(x^o, x) \leqslant 0.$$

Из определений множеств $L(X, f), U(X, f)$ и $V(X, f)$ следует, что

$$L(X, f) \cap V(X, f) \subseteq U(X, f).$$

Отсюда и из (2), леммы 1 и теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Справедлива цепочка импликаций*

$$L(X,f) \subseteq V(X,f) \Longrightarrow L(X,f) = U(X,f)$$
$$\Longrightarrow L(X,f) \subseteq \Lambda(X,f) \Longrightarrow L(X,f) \subseteq G(X,f).$$

Отметим, что импликация $L(X,f) \subseteq V(X,f) \Longrightarrow L(X,f) = \Lambda(X,f)$ ранее была доказана в [2] с помощью аппарата выпуклого анализа, в частности, с использованием теорем Страшевича и Каратеодори.

Утверждения, обратные импликациям теоремы 2, вообще говоря, неверны. Приведем соответствующие примеры.

Пример 1. Пусть $n = 3$, $X = [0,1] \cup \{2\}$,

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in [0,1], \\ 0, & \text{если } x = 2, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \in [0,1], \\ -1, & \text{если } x = 2, \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0,1], \\ 1, & \text{если } x = 2. \end{cases}$$

Легко видеть, что $L(X,f) = U(X,f) = \{0,2\}$.

Однако $0 \notin V(X,f)$, поскольку

$$\frac{\Delta_2(0,x)}{\Delta_1(x,0)} = \frac{1}{x} \to \infty \quad \text{при } x \to 0.$$

Поэтому импликация

$$L(X,f) = U(X,f) \Longrightarrow L(X,f) \subseteq V(X,f)$$

неверна.

Пример 2. Пусть $n = 3$, $X = [0,1] \cup \{2,3\}$,

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in [0,1], \\ 0, & \text{если } x = 2, \\ 4, & \text{если } x = 3, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \in [0,1], \\ 1, & \text{если } x = 2, \\ -2, & \text{если } x = 3, \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0,1], \\ -1, & \text{если } x = 2, \\ -2, & \text{если } x = 3. \end{cases}$$

Легко видеть, что $L(X,f) = \{0,2,3\}$.

Далее, пусть $\lambda = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Тогда при любом $x \in (0,1]$ очевидны соотношения

$$\Phi(x,\lambda) = \frac{1}{3}x^2 > 0 = \Phi(0,\lambda) = \Phi(2,\lambda) = \Phi(3,\lambda),$$

из которых следует, что $L(X,f) \subseteq \Lambda(X,f)$. Однако $0 \notin U(X,f)$, поскольку

$$\frac{\Delta_2(0,x)}{\Delta_1(x,0)} = \frac{1}{x} \to \infty \quad \text{при } x \to 0.$$

Следовательно, импликация

$$L(X,f) \subseteq \Lambda(X,f) \Longrightarrow L(X,f) = U(X,f)$$

неверна.

Ложность импликации

$$L(X,f) \subseteq G(X,f) \Longrightarrow L(X,f) \subseteq \Lambda(X,f)$$

установлена в [2].

Так как в приведенных примерах количество критериев может быть увеличено на любое число без изменений множеств, которые в них фигурируют, то при $n \geqslant 3$ необходимое условие не является достаточным, а достаточные условия не являются необходимыми. Следовательно, при $n \geqslant 3$ существуют многокритериальные задачи такие, что $G(X,f) \neq U(X,f)$ и (или) $G(X,f) \neq V(X,f)$.

Отметим несколько частных случаев полученных результатов.

Наряду с множеством векторных оценок

$$Y = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

введем также множество эффективных векторных оценок

$$P(Y) = P(f(X)) = \{f(x) \mid x \in P(X,f)\}.$$

Множество $P(Y)$ называется *внешне устойчивым* [10], если для любого $y \in Y \setminus P(Y)$ существует $y^o \in P(Y)$ такое, что $y^o \geqslant y$.

В [2] показано, что если множество $P(Y)$ конечно и внешне устойчиво, то задача нахождения множества $L(X,f)$ разрешима с помощью алгоритма линейной свертки критериев.

Замечание. Как свидетельствуют многочисленные примеры (см., например [3–9, 11]), для разрешимости задачи нахождения множества оптимумов Парето $P(X,f)$ с помощью алгоритма линейной свертки критериев недостаточно не только условий внешней устойчивости и конечности множества $P(Y)$, но даже конечности множества X.

Теорема 3. *Если множество эффективных векторных оценок $P(Y)$ внешне устойчиво и всякий оптимум Парето является лексикографическим оптимумом, то*

$$P(X,f) = G(X,f) = V(X,f) = U(X,f) = L(X,f) = \Lambda(X,f).$$

Доказательство следует из теоремы 2, конечности множества $f(L(X,f))$ и равенства $V(X,f) = P(X,f)$, справедливость которого при выполнении условий теоремы доказана в [2].

Так как в случае двух критериев ($n = 2$) справедливо равенство $V(X,f) = G(X,f)$, то из теоремы 2 вытекает

Теорема 4. *В случае двух критериев ($f(x) = (f_1(x), f_2(x))$) следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $L(X,f) \subseteq \Lambda(X,f)$,

(ii) $L(X,f) = U(X,f)$,

(iii) $L(X,f) \subseteq G(X,f) = V(X,f)$.

Авторы выражают признательность проф. В. В. Гороховику за полезные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н.** Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М.: Наука, 1986.
2. **Емеличев В. А., Гирлих Э., Янушкевич О. А.** Лексикографические оптимумы многокритериальной задачи // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1997. Т. 4, № 2. С. 3–14.
3. **Емеличев В. А., Кравцов М. К.** О задачах векторной дискретной оптимизации на системах подмножеств, неразрешимых с помощью алгоритмов линейной свертки // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34, № 7. С. 1082–1094.
4. **Емеличев В. А., Кравцов М. К.** О неразрешимости векторных задач дискретной оптимизации на системах подмножеств в классе алгоритмов линейной свертки критериев // Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 1. С. 9–11.
5. **Емеличев В. А., Кравцов М. К., Янушкевич О. А.** Разрешимость векторной траекторной задачи на «узкие места» с помощью алгоритма линейной свертки критериев // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40, № 4. С. 29–33.
6. **Емеличев В. А., Перепелица В. А.** Многокритериальные задачи об остовах графа // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298, № 3. С. 544–547.
7. **Емеличев В. А., Перепелица В. А.** О некоторых алгоритмических проблемах многокритериальной оптимизации на графах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 2. С. 171–183.

8. **Емеличев В. А., Перепелица В. А.** Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискрет. математика. 1994. Т. 6, вып. 1. С. 3–33.
9. **Меламед И. И., Сигал И. Х.** Исследование линейной свертки критериев в многокритериальном дискретном программировании // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35, № 8. С. 1260–1270.
10. **Подиновский В. В., Ногин В. Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
11. **Emelichev V. A., Perepeliza V. A.** Complexity of vector optimization problems on graphs // Optimization. 1991. V. 22, N 6. P. 903–918.
12. **Geoffrion A. M.** Proper efficiency and the theory of vector maximization // J. Math. Anal. Appl. 1968. V. 22, N 3. P. 618–630.

Адреса авторов:

В. А. Емеличев
Белорусский
государственный университет,
пр. Скорины, 4,
220050 Минск, Беларусь.
E-mail: eva@mmf.bsu.minsk.by

О. А. Янушкевич
Институт технической
кибернетики НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 6,
220012 Минск, Беларусь.
E-mail: gladky@newman.basnet.minsk.by

Статья поступила
15 августа 1997 г.