ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1998. Серия 1. Том 5, № 4, 45–60

УДК 519.8

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ АЛГОРИТМА ЖАДНОГО СПУСКА ДЛЯ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ СУПЕРМОДУЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ*)

В. П. Ильев

Рассматривается задача минимизации невозрастающей супермодулярной функции, частным случаем которой является задача о p-медиане на минимум. Как и задача о p-медиане, рассматриваемая задача является NP-трудной. Для приближенного решения этой задачи рассматривается вариант жадного алгоритма, являющийся дискретным аналогом алгоритма наискорейшего спуска. В терминах некоторых характеристик целевой функции и параметров допустимой области получена достижимая гарантированная оценка погрешности этого алгоритма.

Введение

Рассматривается следующая задача комбинаторной оптимизации: найти

$$\min_{X \subseteq I, |X|=p} f(X), \tag{1}$$

где I — конечное множество мощности n, p — натуральное число, $p < n$, а $f : 2^I \to R_+$ — супермодулярная функция, т. е. для любых $X, Y \subseteq I$

$$f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \geqslant f(X) + f(Y).$$

Будем также считать, что функция f — невозрастающая и $f(I) = 0$.

Частным случаем задачи (1) является классическая задача о p-медиане с целевой функцией

$$f(X) = \sum_{j \in J} \min_{i \in X} c_{ij}, \tag{2}$$

где $C = (c_{ij})$ — неотрицательная матрица размера $n \times m$ с множеством индексов I для строк и множеством индексов J для столбцов. Легко

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00771).

видеть, что после доопределения

$$f(\varnothing) = \max_{\substack{X,Y \subseteq I \\ X \cap Y = \varnothing}} \{f(X) + f(Y) - f(X \cup Y)\}$$

невозрастающая функция (2) становится супермодулярной.

Как и задача о p-медиане, задача (1) является NP-трудной. В качестве метода приближенного решения этой задачи рассмотрим следующий вариант жадного алгоритма, являющийся дискретным аналогом алгоритма наискорейшего спуска.

Алгоритм A (алгоритм жадного спуска).

Шаг 0. Полагается $A_0 := I$. Переход к шагу 1.

Шаг i ($i \geqslant 1$). Выбирается $a_i \in A_{i-1}$ такое, что

$$f(A_{i-1} \setminus \{a_i\}) = \min_{a \in A_{i-1}} f(A_{i-1} \setminus \{a\}).$$

Полагается $A_i := A_{i-1} \setminus \{a_i\}$. Если $i = n - p$, то алгоритм заканчивает работу. В противном случае переход к шагу $i + 1$.

Конец.

Для аналогичных задач максимизации, решаемых алгоритмами наискорейшего подъема, известны следующие результаты. В [2] получена следующая оценка погрешности алгоритма жадного подъема для задачи о p-медиане на максимум, не зависящая от размерности n задачи:

$$\frac{f(Gr)}{f(Opt)} \geqslant 1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p > \frac{e-1}{e} \approx 0,63,$$

где Opt — оптимальное решение, а Gr — решение, полученное жадным алгоритмом.

В [3] этот результат обобщен для задачи нахождения

$$\max_{X \subseteq I, |X| \leqslant p} f(X), \tag{3}$$

где $f : 2^I \to R_+$ — неубывающая субмодулярная функция такая, что $f(\varnothing) = 0$.

В статье [1] для задачи (3) оценка была уточнена с учетом дополнительной информации о целевой функции:

$$\frac{f(Gr)}{f(Opt)} \geqslant \frac{1}{c}\left[1 - \left(\frac{p-c}{p}\right)^p\right],$$

где $c \in [0, 1]$ — характеристика неубывающей субмодулярной функции f, описывающая замедление ее роста, величина c определяется следующим образом:

$$c = \max_{\substack{x \in I \\ f(\{x\}) > f(\varnothing)}} \frac{(f(\{x\}) - f(\varnothing)) - (f(I) - f(I \setminus \{x\}))}{f(\{x\}) - f(\varnothing)},$$

причем $c = 0$ тогда и только тогда, когда f аддитивна (при $f(\varnothing) = 0$).

К сожалению, в случае минимизации супермодулярных функций ситуация иная. Для задачи (1) как алгоритм жадного подъема, так и алгоритм жадного спуска могут давать сколь угодно плохие решения. Это подтверждается следующим примером.

Пример 1. Рассмотрим задачу о p-медиане с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 1 & u & u & 0 \\ u & u & 0 & 1+v \\ u & 0 & u & 1+v \\ 0 & u & 1+v & u \end{pmatrix}, \quad u \geqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant \frac{u-1}{2}.$$

Здесь $I = \{1,2,3,4\}$, $J = \{1,2,3,4\}$, $n = 4$, $p = 2$. Построим функцию f в соответствии с (2):

$f(\{1\}) = 2u + 1,\ f(\{2\}) = 2u + v + 1,$

$f(\{3\}) = 2u + v + 1,\ f(\{4\}) = 2u + v + 1,$

$f(\{1,2\}) = u + 1, f(\{1,3\}) = u + 1, f(\{1,4\}) = u + v + 1,$

$f(\{2,3\}) = u + v + 1, f(\{2,4\}) = u + v + 1, f(\{3,4\}) = 2 + 2v,$

$f(\{1,2,3\}) = 1, f(\{1,2,4\}) = u, f(\{1,3,4\}) = v+1, f(\{2,3,4\}) = v+1,$

$f(\{1,2,3,4\}) = f(I) = 0.$

После доопределения $f(\varnothing) = 4u$ невозрастающая функция f становится супермодулярной.

Легко видеть, что при $v > 0$ как алгоритм жадного подъема, так и алгоритм жадного спуска находит либо множество $\{1,2\}$, либо множество $\{1,3\}$, а оптимальным решением является множество $\{3,4\}$. В любом случае

$$\frac{f(Gr)}{f(Opt)} = \frac{u+1}{2+2v},$$

и это отношение неограниченно возрастает при фиксированном v и $u \to +\infty$.

Однако привлечение дополнительной информации о целевой функции делает возможным получение гарантированной оценки погрешности алгоритма жадного спуска.

Основной целью настоящей работы является получение гарантированных оценок погрешности алгоритма A для задачи минимизации (1) в терминах характеристики целевой функции и параметров допустимой области.

§ 1. Некоторые свойства супермодулярных функций

Пусть I — конечное множество, $f : 2^I \to R_+$ — невозрастающая супермодулярная функция. Кроме того, будем полагать, что $f(I) = 0$.

Если $X \subseteq I$ и $x \in X$, то введем обозначение:

$$d_x(X) = f(X \setminus \{x\}) - f(X) \geqslant 0.$$

Утверждение 1. *$d_x(X) \geqslant d_x(Y)$ для любых множеств X, Y таких, что $X \subseteq Y \subseteq I$, и любого элемента $x \in X$.*

Справедливость утверждения следует из супермодулярности функции f и соотношения

$$\begin{aligned} d_x(X) = f(X \setminus \{x\}) - f(X) &= f((Y \setminus \{x\}) \cap X) - f(X) \\ &\geqslant f(Y \setminus \{x\}) + f(X) - f((Y \setminus \{x\}) \cup X) - f(X) \\ &= f(Y \setminus \{x\}) - f(Y) = d_x(Y). \end{aligned}$$

Введем следующую величину s, аналогичную величине c и характеризующую замедление убывания функции f:

$$s = \max_{\substack{x \in I \\ d_x(\{x\}) > 0}} \frac{d_x(\{x\}) - d_x(I)}{d_x(\{x\})}$$

и назовем ее *крутизной* функции f. Легко видеть, что $s \in [0, 1]$.

Замечание 1. Далее наряду с s будет удобно рассматривать характеристику $t = \frac{s}{1-s}$. Величина t, так же как и крутизна s, характеризует замедление убывания функции f и изменяется в пределах от 0 до $+\infty$ ($t = +\infty \Leftrightarrow s = 1$). Величину t также будем называть *крутизной* функции f.

Следующее утверждение показывает, что функция крутизны $s = t = 0$ является невозрастающим аналогом аддитивной функции.

Утверждение 2. *$s = 0$ тогда и только тогда, когда функция $\bar{f}(X) = f(\varnothing) - f(X)$ аддитивна (при $f(I) = 0$).*

Доказательство. Необходимость. При $s = 0$ для всякого $x \in I$ такого, что $d_x(\{x\}) > 0$, имеем $d_x(\{x\}) = d_x(I)$. Отсюда следует, что $d_x(\{x\}) = d_x(X)$ для любых $X \subseteq I$ и $x \in X$, так как по утверждению 1 $d_x(\{x\}) \geqslant d_x(X) \geqslant d_x(I)$. Но

$$d_x(\{x\}) = f(\varnothing) - f(\{x\}) = \bar{f}(\{x\}),$$
$$d_x(X) = f(X \setminus \{x\}) - f(X) = \bar{f}(X) - \bar{f}(X \setminus \{x\}).$$

Поэтому $\bar{f}(\{x\}) = \bar{f}(X) - \bar{f}(X \setminus \{x\})$. Несложно проверить, что это же равенство справедливо и для таких $x \in I$, что $d_x(\{x\}) = 0$.

Итак, $\bar{f}(X) = \bar{f}(X \setminus \{x\}) + \bar{f}(\{x\})$ для любых $X \subseteq I$ и $x \in X$, т. е. функция $\bar{f}$ аддитивна.

Достаточность. Если функция $\bar{f}$ аддитивна, то $\bar{f}(\{x\}) = \bar{f}(I) - \bar{f}(I \setminus \{x\})$ при любом $x \in I$. Отсюда следует, что $d_x(\{x\}) = d_x(I)$. Поэтому $s = 0$. Утверждение доказано.

Утверждение 3. *При каждом* $x \in I$ *справедливо неравенство* $(1-s)d_x(\{x\}) \leqslant d_x(I)$.

Доказательство. Из определения крутизны следует, что

$$s \geqslant \frac{d_x(\{x\}) - d_x(I)}{d_x(\{x\})}$$

для любого $x \in I$ ($d_x(\{x\}) > 0$). Следовательно, $sd_x(\{x\}) \geqslant d_x(\{x\}) - d_x(I)$, т. е. $(1-s)d_x(\{x\}) \leqslant d_x(I)$.

В случае $d_x(\{x\}) = 0$ неравенство очевидно.

Введем следующие обозначения:

$A = I \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$, $\overline{A} = I \setminus A = \{a_1, \dots, a_k\}$,

$B = I \setminus \{b_1, \dots, b_l\}$, $\overline{B} = I \setminus B = \{b_1, \dots, b_l\}$,

$A_j = I \setminus \{a_1, \dots, a_j\}$, $\overline{A}_j = I \setminus A_j = \{a_1, \dots, a_j\}$ $(j = 1, \dots, k)$,

$B_j = I \setminus \{b_1, \dots, b_j\}$, $\overline{B}_j = I \setminus B_j = \{b_1, \dots, b_j\}$ $(j = 1, \dots, l)$,

$A_0 = I$, $\overline{A}_0 = \varnothing$, $B_0 = I$, $\overline{B}_0 = \varnothing$.

Утверждение 4. $f(A) = \sum\limits_{a_j \in \overline{A}} d_{a_j}(A_{j-1})$.

Доказательство. Так как $f(A_0) = f(I) = 0$, то

$$\begin{aligned} f(A) &= f(A_k) = f(A_{k-1} \setminus \{a_k\}) = f(A_{k-1} \setminus \{a_k\}) - f(A_{k-1}) + f(A_{k-1}) \\ &= d_{a_k}(A_{k-1}) + f(A_{k-1}) = \ldots = d_{a_1}(A_0) + d_{a_2}(A_1) + \ldots + d_{a_k}(A_{k-1}) \\ &\qquad + f(A_0) = \sum_{a_j \in \overline{A}} d_{a_j}(A_{j-1}), \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Утверждение 5.

$$f(A \cap B) = f(B) + \sum_{a_j \in \overline{A} \setminus \overline{B}} d_{a_j}(B \cap A_{j-1}) = f(A) + \sum_{b_j \in \overline{B} \setminus \overline{A}} d_{b_j}(A \cap B_{j-1}).$$

Доказательство. Докажем первое равенство.

$$\begin{aligned} f(A \cap B) &= f(B \cap A_k) = f((B \cap A_{k-1}) \setminus \{a_k\}) \\ &= \begin{cases} f(B \cap A_{k-1}), & \text{если } a_k \notin B, \\ f(B \cap A_{k-1}) + d_{a_k}(B \cap A_{k-1}), & \text{если } a_k \in B \setminus A. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогично

$$f(B \cap A_{k-1}) = \begin{cases} f(B \cap A_{k-2}), & \text{если } a_{k-1} \notin B; \\ f(B \cap A_{k-2}) + d_{a_{k-1}}(B \cap A_{k-2}), & \text{если } a_{k-1} \in B \setminus A, \end{cases}$$

и так далее. В итоге получаем

$$f(A \cap B) = f(B \cap A_0) + \sum_{a_j \in \overline{A} \setminus \overline{B}} d_{a_j}(B \cap A_{j-1})$$

$$= f(B) + \sum_{a_j \in \overline{A} \setminus \overline{B}} d_{a_j}(B \cap A_{j-1}).$$

Второе равенство доказывается аналогично.

Утверждение 6.

$$(1-s)f(B) \geqslant (1-s) \sum_{b \in \overline{B} \setminus \overline{A}} d_b(A) + (1-s) \sum_{a_j \in \overline{A} \cap \overline{B}} d_{a_j}(A_{j-1})$$

$$- s \sum_{a_j \in \overline{A} \setminus \overline{B}} d_{a_j}(A_{j-1}).$$

Доказательство. По утверждению 5 имеем

$$(1-s)f(B) = (1-s)f(A) + (1-s) \sum_{b_j \in \overline{B} \setminus \overline{A}} d_{b_j}(A \cap B_{j-1})$$

$$- (1-s) \sum_{a_j \in \overline{A} \setminus \overline{B}} d_{a_j}(B \cap A_{j-1}).$$

В силу утверждений 1 и 3 при любом $a_j \in \overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A$ имеем

$$(1-s)d_{a_j}(B \cap A_{j-1}) \leqslant (1-s)d_{a_j}(\{a_j\}) \leqslant d_{a_j}(I) \leqslant d_{a_j}(A_{j-1}).$$

Поэтому

$$(1-s) \cdot \sum_{a_j \in \overline{A} \setminus \overline{B}} d_{a_j}(B \cap A_{j-1}) \leqslant \sum_{a_j \in \overline{A} \setminus \overline{B}} d_{a_j}(A_{j-1}).$$

Отсюда с учетом утверждения 4 получаем

$$(1-s)f(B) \geqslant (1-s)f(A) + (1-s) \sum_{b_j \in \overline{B} \setminus \overline{A}} d_{b_j}(A \cap B_{j-1})$$

$$- \sum_{a_j \in \overline{A} \setminus \overline{B}} d_{a_j}(A_{j-1}) = (1-s) \left[f(A) - \sum_{a_j \in \overline{A} \setminus \overline{B}} d_{a_j}(A_{j-1}) \right]$$

$$+ (1-s) \sum_{b_j \in \overline{B} \setminus \overline{A}} d_{b_j}(A \cap B_{j-1}) - s \sum_{a_j \in \overline{A} \setminus \overline{B}} d_{a_j}(A_{j-1})$$

$$= (1-s) \sum_{a_j \in \overline{A} \cap \overline{B}} d_{a_j}(A_{j-1}) + (1-s) \sum_{b_j \in \overline{B} \setminus \overline{A}} d_{b_j}(A \cap B_{j-1})$$

$$- s \sum_{a_j \in \overline{A} \setminus \overline{B}} d_{a_j}(A_{j-1}).$$

Последнее равенство верно в силу утверждения 4. По утверждению 1 при любом $b_j \in \overline{B} \setminus \overline{A}$ имеем $d_{b_j}(A \cap B_{j-1}) \geqslant d_{b_j}(A)$. Поэтому

$$(1-s) \sum_{b_j \in \overline{B} \setminus \overline{A}} d_{b_j}(A \cap B_{j-1}) \geqslant (1-s) \sum_{b \in \overline{B} \setminus \overline{A}} d_b(A).$$

Следовательно,

$$(1-s) f(B) \geqslant (1-s) \sum_{b \in \overline{B} \setminus \overline{A}} d_b(A) + (1-s) \sum_{a_j \in \overline{A} \cap \overline{B}} d_{a_j}(A_{j-1}) - s \sum_{a_j \in \overline{A} \setminus \overline{B}} d_{a_j}(A_{j-1}).$$

Утверждение 6 доказано.

§ 2. Оценки погрешности алгоритма A

Вернемся к оптимизационной задаче (1): найти

$$\min_{X \subseteq I, |X| = p} f(X),$$

где $f : 2^I \to R_+$ — невозрастающая супермодулярная функция, $f(I) = 0$, I — конечное множество мощности n и p — фиксированное натуральное число, $p < n$. Обозначим $q = n - p > 0$.

В процессе работы алгоритма A последовательно находятся множества $A_0 = I, A_1, \ldots, A_q = Gr$, где $A_i = A_{i-1} \setminus \{a_i\}$ и $a_i \in A_{i-1}$ — такой элемент, выбранный на шаге i, что

$$d_i = d_{a_i}(A_{i-1}) = \min_{a \in A_{i-1}} d_a(A_{i-1}) \quad (i = 1, \ldots, q). \tag{4}$$

Обозначим через Opt некоторое оптимальное решение задачи (1), и пусть $\overline{Opt} = I \setminus Opt$.

Лемма 1. *При любом $i = 1, \ldots, q$ справедливо неравенство*

$$(1-s) f(Opt) \geqslant (1-s)(q-k) d_i + (1-s) \sum_{j : a_j \in \overline{A}_{i-1} \cap \overline{Opt}} d_j - s \sum_{j : a_j \in \overline{A}_{i-1} \setminus \overline{Opt}} d_j,$$

где $k = |\overline{A}_{i-1} \cap \overline{Opt}|$.

Доказательство. По утверждению 6 при $A = A_{i-1}$ и $B = Opt$ имеем

$$(1-s) f(Opt) \geqslant (1-s) \sum_{b \in \overline{Opt} \setminus \overline{A}_{i-1}} d_b(A_{i-1})$$
$$+ (1-s) \sum_{a_j \in \overline{A}_{i-1} \cap \overline{Opt}} d_{a_j}(A_{j-1}) - s \sum_{a_j \in \overline{A}_{i-1} \setminus \overline{Opt}} d_{a_j}(A_{j-1}).$$

Так как при любом $b \in \overline{Opt} \setminus \overline{A}_{i-1}$ в силу (4) выполняется неравенство $d_b(A_{i-1}) \geqslant d_{a_{i-1}}(A_{i-1}) = d_i$, то

$$\sum_{b \in \overline{Opt} \setminus \overline{A}_{i-1}} d_b(A_{i-1}) \geqslant |\overline{Opt} \setminus \overline{A}_{i-1}| d_i = |\overline{Opt} \setminus (\overline{A}_{i-1} \cap \overline{Opt})| d_i$$

$$= (|\overline{Opt}| - |\overline{A}_{i-1} \cap \overline{Opt}|) d_i = (q-k) d_i.$$

Отсюда следует справедливость леммы 1.

Следствие 1. *Для любой функции f крутизны $s < 1$, т. е. такой f, что $d_x(I) > 0$ при любом $x \in I$, справедливо неравенство*

$$f(Opt) \geqslant (q-k) d_i + \sum_{j : a_j \in \overline{A}_{i-1} \cap \overline{Opt}} d_j - t \sum_{j : a_j \in \overline{A}_{i-1} \setminus \overline{Opt}} d_j \ (i = 1, \dots, q),$$

где $k = |\overline{A}_{i-1} \cap \overline{Opt}|$, $t = \frac{s}{1-s} \geqslant 0$.

Обозначим $l = |\overline{Gr} \cap \overline{Opt}|$. Будем считать, что $l < q$, так как $Gr = Opt$ при $l = q$ и этот случай мы не рассматриваем.

Пусть $\overline{Gr} \cap \overline{Opt} = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_l}\}$, где $1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_l < q$, т. е. $a_{i_1}, \dots, a_{i_l}$ — элементы, выбранные алгоритмом A на шагах $i_1, \dots, i_l$.

При каждом r, $0 \leqslant r \leqslant l$, рассмотрим задачу линейного программирования: найти максимум функции

$$F(x) = \sum_{i=1}^{q} x_i$$

при ограничениях

$$A(i_1, \dots, i_r) x \leqslant e, \qquad (5)$$
$$x \geqslant 0,$$

где $x \in R^q$, $e \in R^q$ — вектор, все компоненты которого равны 1, а $A(i_1, \dots, i_r)$ — квадратная матрица порядка q, имеющая следующий вид:

$$\begin{bmatrix}
q & & & & & & & & & & \\
-t & \ddots & & & & & & & & & \\
\vdots & & q & & & & \mathbf{0} & & & & \\
-t & \dots & -t & q & & & & & & & \\
-t & \dots & -t & 1 & q-1 & & & & & & \\
-t & \dots & -t & 1 & -t & \ddots & & & & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & q-r+1 & & & & \\
 & & & & & & 1 & q-r & & & \\
 & & & & & & 1 & -t & \ddots & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & q-r & \\
-t & \dots & -t & 1 & -t & \dots & 1 & -t & \dots & -t & q-r
\end{bmatrix}.$$

Столбцы, содержащие 1, имеют номера $i_1, \dots, i_r$. Задачу (5) с матрицей $A(i_1, \dots, i_r)$ обозначим $Z(i_1, \dots, i_r)$. Через $F(i_1, \dots, i_r)$ обозначим оптимальное значение целевой функции задачи $Z(i_1, \dots, i_r)$.

Лемма 2. $f(Gr) \leqslant F(i_1, \dots, i_l) f(Opt)$.

Доказательство. Введем обозначения:

$$L = \{i_1, \dots, i_l\}, \quad J_i = \{1, \dots, i\} \quad (i = 1, \dots, q).$$

Положим $\overline{x}_i = \frac{d_i}{f(Opt)}$ $(i = 1, \dots, q)$. Заметим, что вектор $\overline{x} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_q)$ является допустимым решением задачи (5), так как по следствию 1 при любом i, $i_k < i \leqslant i_{k+1}$, справедливо соотношение

$$(q-k)\overline{x}_i + \sum_{j \in J_{i-1} \cap L} x_j - t \sum_{j \in J_{i-1} \setminus L} x_j$$
$$= \frac{1}{f(Opt)} \left[(q-k) d_i + \sum_{j \in J_{i-1} \cap L} d_j - t \sum_{j \in J_{i-1} \setminus L} d_j \right] \leqslant \frac{1}{f(Opt)} f(Opt) = 1,$$

где $k = 0, 1, \dots, l$, $i_0 = 0$, $i_{l+1} = q$. Поэтому $F(\overline{x}) \leqslant F(i_1, \dots, i_l)$. Подставляя вектор $\overline{x}$ в целевую функцию задачи (5), получаем

$$F(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{q} \overline{x}_j = \frac{1}{f(Opt)} \sum_{j=1}^{q} d_j = \frac{1}{f(Opt)} \sum_{a_j \in \overline{A}_q} d_{a_j}(A_{j-1}).$$

Но в силу утверждения 4 $\sum\limits_{a_j \in \overline{A}_q} d_{a_j}(A_{j-1}) = f(A_q)$, откуда $F(\overline{x}) = f(A_q)/f(Opt) = f(Gr)/f(Opt)$. Поэтому

$$\frac{f(Gr)}{f(Opt)} = F(\overline{x}) \leqslant F(i_1, \dots, i_l).$$

Лемма 2 доказана.

Чтобы оценить сверху величину $F(i_1, \dots, i_l)$, исследуем некоторые свойства задач (5).

Лемма 3.

$$F(i_1, \dots, i_r) \leqslant \sum_{k=0}^{r} \frac{\max(0, h_{i_{k+1}}) + h_{i_{k+1}-1} + \dots + h_{i_k+1}}{q-k}, \tag{6}$$

где $i_{r+1} = q$ *и* $i_0 = 0$, *величины* h_i *определяются рекуррентно*

$$h_q = 1, \quad h_{q-1} = 1 + \frac{t}{q-r},$$

а для $k = r, r-1, \dots, 0$ (*последние два равенства не рассматриваются для* $k = 0$)

$$h_{i_{k+1}-2} = h_{i_{k+1}-1}\Big(1 + \tfrac{t}{q-k}\Big),$$

$$h_{i_{k+1}-3} = h_{i_{k+1}-2}\Big(1 + \tfrac{t}{q-k}\Big),$$

$$\dots$$

$$h_{i_k+1} = h_{i_k+2}\Big(1 + \tfrac{t}{q-k}\Big),$$

$$h_{i_k} = h_{i_{k+1}} - \tfrac{\max(0, h_{i_{k+1}}) + h_{i_{k+1}-1} + \dots + h_{i_k+1}}{q-k},$$

$$h_{i_k-1} = h_{i_k+1}\Big(1 + \tfrac{t}{q-k}\Big) + \max(0, h_{i_k})\tfrac{t}{q-k+1}.$$

Доказательство. Обозначим $R = \{i_1, \dots, i_r\}$, $J_i = \{1, \dots, i\}$ $(i = 1, \dots, q)$. Из ограничений задачи (5) при любом i, $i_k < i \leqslant i_{k+1}$, следует, что

$$0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{q-k}\Big(1 + t\sum_{j \in J_{i-1}\setminus R} x_j - \sum_{j \in J_{i-1}\cap R} x_j\Big), \tag{7}$$

где $k = 0, 1, \dots, r$, $i_0 = 0$, $i_{r+1} = q$.

Пользуясь неравенствами (7), будем последовательно заменять переменные $x_q, x_{q-1}, \dots, x_1$ их оценками через переменные с меньшими индексами. Для любого допустимого решения x задачи $Z(i_1, \dots, i_r)$ имеем

$$F(x) = \sum_{j=1}^{q} x_j \leqslant \sum_{j=1}^{q-1} x_j + \frac{1}{q-r}\Big(1 + t\sum_{j \in J_{q-1}\setminus R} x_j - \sum_{j \in J_{q-1}\cap R} x_j\Big)$$
$$= \frac{1}{q-r} + h_{q-1}\sum_{j \in J_{q-1}\setminus R} x_j + \Big(1 - \frac{1}{q-r}\Big)\sum_{j \in J_{q-1}\cap R} x_j,$$

где $h_{q-1} = 1 + \frac{t}{q-r}$. Так как $h_{q-1} \geqslant 1$ при любом $t \geqslant 0$, то

$$F(x) \leqslant \frac{1}{q-r} + h_{q-1}\sum_{j \in J_{q-2}\setminus R} x_j - \Big(1 - \frac{1}{q-r}\Big)\sum_{j \in J_{q-2}\cap R} x_j$$
$$+ h_{q-1}\frac{1}{q-r} + \Big(1 + t\sum_{j \in J_{q-2}\setminus R} x_j - \sum_{j \in J_{q-2}\cap R} x_j\Big)$$
$$= \frac{1 + h_{q-1}}{q-r} + h_{q-2}\sum_{j \in J_{q-2}\setminus R} x_j + \Big(1 - \frac{1 + h_{q-1}}{q-r}\Big)\sum_{j \in J_{q-2}\cap R} x_j,$$

где $h_{q-2} = h_{q-1}(1 + \frac{t}{q-r}) \geqslant 1$ при любом $t \geqslant 0$. Аналогично получаем, что величины $h_{q-3} = h_{q-2}(1 + \frac{t}{q-r}), \dots, h_{i_r+1} = h_{i_r+2}(1 + \frac{t}{q-r})$ не меньше 1 при $t \geqslant 0$. Поэтому

$$F(x) \leqslant \frac{1 + h_{q-1} + \ldots + h_{i_r+1}}{q-r} + h_{i_r+1}\Big(1 + \frac{t}{q-r}\Big) \sum_{j \in J_{i_r} \setminus R} x_j$$

$$+ h_{i_r} \sum_{j \in J_{i_r} \cap R} x_j = \frac{1 + h_{q-1} + \ldots + h_{i_r+1}}{q-r}$$

$$+ h_{i_r+1}\Big(1 + \frac{t}{q-r}\Big) \sum_{j \in J_{i_r-1} \setminus R} x_j + h_{i_r} \sum_{j \in J_{i_r-1} \cap R} x_j + h_{i_r} x_{i_r},$$

где $h_{i_r} = 1 - \frac{1+h_{q-1}+\ldots+h_{i_r+1}}{q-r}$.

Так как

$$h_{i_r} x_{i_r} \leqslant \begin{cases} 0, & \text{если } h_{i_r} \leqslant 0, \\ h_{i_r} \frac{1}{q-r+1}\Big(1 + t \sum\limits_{j \in J_{i_r-1} \setminus R} x_j - \sum\limits_{j \in J_{i_r-1} \cap R} x_j\Big), & \text{если } h_{i_r} > 0, \end{cases}$$

то

$$F(x) \leqslant \frac{1 + h_{q-1} + \ldots + h_{i_r+1}}{q-r} + h_{i_r+1}\Big(1 + \frac{t}{q-r}\Big) \sum_{j \in J_{i_r-1} \setminus R} x_j$$

$$+ h_{i_r} \sum_{j \in J_{i_r-1} \cap R} x_j + \frac{\max(0, h_{i_r})}{q-r+1}\Big(1 + t \sum_{j \in J_{i_r-1} \setminus R} x_j - \sum_{j \in J_{i_r-1} \cap R} x_j\Big)$$

$$= \Big(\frac{1 + h_{q-1} + \ldots + h_{i_r+1}}{q-r} + \frac{\max(0, h_{i_r})}{q-r+1}\Big)$$

$$+ h_{i_r-1} \sum_{j \in J_{i_r-1} \setminus R} x_j + \Big(h_{i_r} - \frac{\max(0, h_{i_r})}{q-r+1}\Big) \sum_{j \in J_{i_r-1} \cap R} x_j,$$

где $h_{i_r-1} = h_{i_r+1}(1 + \frac{t}{q-r}) + \frac{\max(0,h_{i_r})t}{q-r+1}$. Поскольку $h_{i_r-1} \geqslant 1$ при любом $t \geqslant 0$, то

$$F(x) \leqslant \Big(\frac{1 + h_{q-1} + \ldots + h_{i_r+1}}{q-r} + \frac{\max(0, h_{i_r})}{q-r+1}\Big)$$

$$+ h_{i_r-1} \sum_{j \in J_{i_r-2} \setminus R} x_j + \Big(h_{i_r} - \frac{\max(0, h_{i_r})}{q-r+1}\Big) \sum_{j \in J_{i_r-2} \cap R} x_j$$

$$+ h_{i_r-1} \frac{1}{q-r+1}\Big(1 + t \sum_{j \in J_{i_r-2} \setminus R} x_j - \sum_{j \in J_{i_r-2} \cap R} x_j\Big)$$

$$= \Big(\frac{1 + h_{q-1} + \ldots + h_{i_r+1}}{q-r} + \frac{\max(0, h_{i_r}) + h_{i_r-1}}{q-r+1}\Big)$$

$$+ h_{i_r-2} \sum_{j \in J_{i_r-2} \setminus R} x_j + \Big(h_{i_r} - \frac{\max(0, h_{i_r}) + h_{i_r-1})}{q-r+1}\Big) \sum_{j \in J_{i_r-2} \cap R} x_j,$$

где $h_{i_r-2} = h_{i_r-1}(1+\frac{t}{q-r+1}) \geqslant 1$ при любом $t \geqslant 0$.

Аналогично последовательно получаем, что величины $h_{i_r-3} = h_{i_r-2}(1+\frac{t}{q-r+1}), \ldots, h_{i_{r-1}+1} = h_{i_{r-1}+2}(1+\frac{t}{q-r+1})$ не меньше 1 при любом $t \geqslant 0$. Поэтому

$$F(x) \leqslant \Big(\frac{1+h_{q-1}+\ldots+h_{i_r+1}}{q-r} + \frac{\max(0,h_{i_r})+h_{i_r-1}+\ldots+h_{i_{r-1}+1}}{q-r+1}\Big) + h_{i_{r-1}+1}\Big(1+\frac{t}{q-r+1}\Big)\sum_{j\in J_{i_{r-1}}\setminus R} x_j + h_{i_{r-1}} \sum_{j\in J_{i_{r-1}}\cap R} x_j,$$

где $h_{i_{r-1}} = h_{i_r} - \frac{\max(0,h_{i_r})+h_{i_r-1}+\ldots+h_{i_{r-1}+1}}{q-r+1}$ вновь может иметь произвольный знак.

Продолжая этот процесс, получаем

$$F(x) \leqslant \Big(\frac{1+h_{q-1}+\ldots+h_{i_r+1}}{q-r} + \frac{\max(0,h_{i_r})+h_{i_r-1}+\ldots+h_{i_{r-1}+1}}{q-r+1}\Big) + \cdots + \frac{\max(0,h_{i_1})+h_{i_1-1}+\ldots+h_1}{q}.$$

Полагая $h_q = 1$ и учитывая, что $\max(0,h_q) = h_q = 1$, получаем, что для любого допустимого решения x задачи $Z(i_1,\ldots,i_r)$

$$F(x) \leqslant \sum_{k=0}^{r} \frac{\max(0,h_{i_{k+1}})+h_{i_{k+1}-1}+\ldots+h_{i_k+1}}{q-k},$$

где $i_{r+1} = q$ и $i_0 = 0$. Отсюда следуют неравенство (6) и утверждение леммы 3.

Из лемм 2 и 3 непосредственно вытекает следующая оценка погрешности алгоритма жадного спуска для задачи (1) в терминах задачи $Z(i_1,\ldots,i_l)$.

Теорема 1. *Пусть Opt — оптимальное решение задачи (1), а Gr — решение, полученное алгоритмом жадного спуска. Тогда*

$$\frac{f(Gr)}{f(Opt)} \leqslant \sum_{k=0}^{l} \frac{\max(0,h_{i_{k+1}})+h_{i_{k+1}-1}+\ldots+h_{i_k+1}}{q-k},$$

где $i_{l+1} = q$, $i_0 = 0$, а при $r = l$ величины h_i определяются так же, как в лемме 3.

Лемма 4. *Существует оптимальное решение $x^* = (x_1,\ldots,x_q)$ задачи $Z(i_1,\ldots,i_r)$ такое, что*

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\Big(1-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\Big) \text{ при } i \notin R = \{i_1,\ldots,i_r\}$$

и

$$x_i = 0 \text{ или } x_i = \frac{1}{a_{ii}}\Big(1 - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\Big) \text{ при } i \in R = \{i_1, \dots, i_r\},$$

где a_{ij} — элементы матрицы линейных ограничений $A(i_1, \dots, i_r)$.

Доказательство. В доказательстве леммы 3 при построении оценки (6) значение очередной (исключаемой) переменной x_i мы полагали равным 0 или $\frac{1}{a_{ii}}\Big(1 - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\Big)$ в зависимости от знака коэффициента h_i, причем неравенство $h_i \leqslant 0$ возможно только для $i \in R$. Поэтому равенство в (6) будет достигаться на векторе x^* указанного вида.

Следствие 2. *При $r = 0$ оптимальное решение x^* задачи $Z(\varnothing)$ имеет вид*

$$x^* = \Big(\frac{1}{q}, \frac{t+q}{q^2}, \dots, \frac{(t+q)^{q-1}}{q^q}\Big).$$

Далее в доказательстве леммы 5 будет использовано следующее известное

Утверждение 7. *Пусть k, m — натуральные числа, $k \leqslant m$. Тогда при любом $t \geqslant 0$*

$$\Big(\frac{t+m+1}{m+1}\Big)^{k+1} \geqslant \Big(\frac{t+m}{m}\Big)^k.$$

Рассмотрим две задачи линейного программирования $Z(i_1, \dots, i_r)$ и $Z(i_1, \dots, i_{r-1})$. Через $F(i_1, \dots, i_r)$ и $F(i_1, \dots, i_{r-1})$ обозначим оптимальные значения целевых функций этих задач соответственно.

Лемма 5. *$F(i_1, \dots, i_r) \leqslant F(i_1, \dots, i_{r-1})$ при каждом $r = 1, \dots, q-1$.*

Доказательство. В силу леммы 4 компонента x_{i_r} в оптимальном решении задачи $Z(i_1, \dots, i_r)$ может быть положительна, а может быть равна 0. Рассмотрим оба случая.

1. Если $x_{i_r} > 0$, то в силу леммы 4 оптимальное решение задачи $Z(i_1, \dots, i_r)$ имеет вид

$$x^* = \left(x_1, \dots, x_{i_r - 1}, x_{i_r}, x_{i_r}, x_{i_r}\frac{t+q-r}{q-r}, \dots, x_{i_r}\Big(\frac{t+q-r}{q-r}\Big)^{k-1}\right),$$

где $k \leqslant q-r$. Рассмотрим вектор x, первые i_r компонент которого такие же, как в векторе x^*, а компоненты с (i_r+1)-й по q-ю имеют вид

$$x_{i_r}\frac{t+q-r+1}{q-r+1}, x_{i_r}\Big(\frac{t+q-r+1}{q-r+1}\Big)^2, \dots, x_{i_r}\Big(\frac{t+q-r+1}{q-r+1}\Big)^k.$$

Несложно проверить, что x — допустимое решение задачи $Z(i_1, \dots, i_{r-1})$. Докажем, что $F(x^*) \leqslant F(x)$. Обозначим $m = q - r$. Тогда

$$F(x) - F(x^*) = x_{i_r}\Big(\frac{t+m+1}{m+1} - 1\Big) + x_{i_r}\bigg(\Big(\frac{t+m+1}{m+1}\Big)^2 - \frac{t+m}{m}\bigg) + x_{i_r}\bigg(\Big(\frac{t+m+1}{m+1}\Big)^k - \Big(\frac{t+m}{m}\Big)^{k-1}\bigg).$$

В силу утверждения 7 при $k \leqslant m = q - r$ каждое слагаемое неотрицательно. Следовательно, $F(x) - F(x^*) \geqslant 0$.

2. Если $x_{i_r} = 0$, то по лемме 4 оптимальное решение задачи $Z(i_1, \dots, i_r)$ имеет вид

$$x^* = \bigg(x_1, \dots, x_{i_r-1}, 0, x_{i_r+1}, x_{i_r+1}\frac{t+q-r}{q-r}, \dots, x_{i_r+1}\Big(\frac{t+q-r}{q-r}\Big)^{k-1}\bigg),$$

где $k \leqslant q - r$, а

$$x_{i_r+1} = \begin{cases} x_{i_r-1}\frac{t+q-r+1}{q-r}, & \text{если } x_{i_r-1} > 0, \\ x_{i_r-l}\frac{t+q-r+l}{q-r}, & \text{если } x_{i_r-1} = \ldots = x_{i_r-l+1} = 0,\ x_{i_r-l} > 0, \\ \frac{1}{q-r}, & \text{если } x_{i_r-1} = \ldots = x_1 = 0. \end{cases}$$

В любом случае вектор x^* имеет вид

$$x^* = \bigg(x_1, \dots, x_{i_r-1}, 0, \frac{y}{q-r}, \frac{y}{q-r}\cdot\frac{t+q-r}{q-r}, \dots, \frac{y}{q-r}\Big(\frac{t+q-r}{q-r}\Big)^{k-1}\bigg),$$

где $y > 0$. Рассмотрим вектор x, первые $i_r - 1$ компонент которого такие же, как в векторе x^*, а компоненты с i_r-й по q-ю имеют вид

$$\frac{y}{q-r+1}, \frac{y}{q-r+1}\cdot\frac{t+q-r+1}{q-r+1}, \dots, \frac{y}{q-r+1}\Big(\frac{t+q-r+1}{q-r+1}\Big)^k,$$

который является допустимым решением задачи $Z(i_1, \dots, i_{r-1})$. Докажем, что $F(x^*) \leqslant F(x)$. Обозначим $m = q - r$. Тогда $F(x) - F(x^*) = S_{k+1} - S_k$, где

$$S_k = \frac{y}{m} + \frac{y}{m}\cdot\frac{t+m}{m} + \ldots + \frac{y}{m}\Big(\frac{t+m}{m}\Big)^{k-1} = \frac{y}{t}\bigg[\Big(\frac{t+m}{m}\Big)^k - 1\bigg],$$

$$S_{k+1} = \frac{y}{m+1} + \frac{y}{m+1}\cdot\frac{t+m+1}{m+1} + \ldots + \frac{y}{m+1}\Big(\frac{t+m+1}{m+1}\Big)^k = \frac{y}{t}\bigg[\Big(\frac{t+m+1}{m+1}\Big)^{k+1} - 1\bigg].$$

Поэтому при $k \leqslant m = q - r$ в силу утверждения 7

$$F(x) - F(x^*) = S_{k+1} - S_k = \frac{y}{t}\bigg[\Big(\frac{t+m+1}{m+1}\Big)^{k+1} - \Big(\frac{t+m}{m}\Big)^k\bigg] \geqslant 0.$$

Итак, в любом случае $F(i_1,\ldots,i_r) = F(x^*) \leqslant F(x) \leqslant F(i_1,\ldots,i_{r-1})$. Лемма 5 доказана.

Теперь сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 2. *Для любой невозрастающей супермодулярной целевой функции задачи* (1) *крутизны* $t \geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$\frac{f(Gr)}{f(Opt)} \leqslant \frac{1}{t}\bigg[\Big(\frac{q+t}{q}\Big)^q - 1\bigg], \tag{8}$$

где Opt *— оптимальное решение задачи* (1), *а* Gr *— решение, полученное алгоритмом* A.

Доказательство. Пусть $\overline{Gr} \cap \overline{Opt} = \{a_{i_1},\ldots,a_{i_l}\}$. По лемме 2 имеем $f(Gr)/f(Opt) \leqslant F(i_1,\ldots,i_l)$.

Применив l раз лемму 5, получим $f(Gr)/f(Opt) \leqslant F(\varnothing)$. А в силу следствия 2

$$F(\varnothing) = \frac{1}{q} + \frac{t+q}{q^2} + \ldots + \frac{(t+q)^{q-1}}{q^q} = \frac{1}{t}\bigg[\Big(\frac{q+t}{q}\Big)^q - 1\bigg].$$

Отсюда и получается оценка (8).

Следствие 3. *Если целевая функция задачи минимизации* (1) *имеет крутизну* $t = 0$ (*т. е. является невозрастающим аналогом аддитивной функции при* $f(I) = 0$), *то алгоритм* A *находит точное решение задачи* (1).

Из теоремы 2 может быть получена оценка погрешности жадного алгоритма в терминах только целевой функции.

Следствие 4. $f(Gr)/f(Opt) \leqslant (e^t - 1)/t$, *где* e *— основание натурального логарифма.*

Доказательство. Обозначим $x = \frac{q}{t}$. Тогда

$$\Big(\frac{q+t}{q}\Big)^q = \Big(\frac{\frac{q}{t}+1}{\frac{q}{t}}\Big)^q = \Big(\frac{x+1}{x}\Big)^{xt} = \bigg[\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x\bigg]^t \leqslant e^t.$$

Отсюда получаем

$$\frac{f(Gr)}{f(Opt)} \leqslant \frac{\left(\frac{q+t}{q}\right)^q - 1}{t} \leqslant \frac{e^t - 1}{t}.$$

Утверждение 8. *Оценка* (8) *достижима для любого* $t \geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим задачу (1) минимизации невозрастающей супермодулярной функции, приведенную в примере 1, где $n = 4$, $p = 2$ и $q = n - p = 2$. Алгоритм A находит либо множество $\{1,2\}$, либо множество $\{1,3\}$, а оптимальным решением является множество $\{3,4\}$. В любом случае

$$\frac{f(Gr)}{f(Opt)} = \frac{u+1}{2+2v},$$

а крутизна задается следующим образом:

$$s = \max_{\substack{x \in I \\ d_x(\{x\})>0}} \frac{d_x(\{x\}) - d_x(I)}{d_x(\{x\})} = \frac{2u-2}{2u-1}, \quad t = \frac{s}{1-s} = 2(u-1).$$

Очевидно, что при любых $u \geqslant 1$ и $0 \leqslant v < 1$

$$\frac{f(Gr)}{f(Opt)} \leqslant \frac{1}{t}\left[\left(\frac{q+t}{q}\right)^q - 1\right] = \frac{u+1}{2},$$

а при $v = 0$ это неравенство обращается в равенство. Отметим, что при $u \geqslant 1$ крутизна $t = 2(u-1)$ принимает всевозможные значения от 0 до $+\infty$. Утверждение 8 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Conforti M., Cornuéjols G.** Submodular set functions, matroids and the greedy algorithm: tight worst-case bounds and some generalizations of the Rado-Edmonds theorem // Discrete Appl. Math. 1984. V. 7, N 3. P. 251–274.
2. **Cornuéjols G., Fisher M. L., Nemhauser G. L.** Location of bank accounts to optimize float: an analytic study of exact and approximate algorithms // Management Sci. 1976/77. V. 23, N 8. P. 789–810.
3. **Nemhauser G. L., Wolsey L. A., Fisher M. L.** An analysis of approximations for maximizing submodular set functions. I // Math. Programming. 1978. V. 14, N 3. P. 265–294.

Адрес автора:

Омский
государственный университет,
а/я 8501,
644070 Омск, Россия.
E-mail: iljev@iitam.omsk.net.ru

Статья поступила
11 февраля 1998 г.