ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1998. Серия 1. Том 5, № 4, 61–70

УДК 519.174

О ЦИКЛИЧЕСКИХ $\langle m, n\rangle$-НУМЕРАЦИЯХ*)

А. Л. Пережогин

Слово называется циклическим, если в нем каждая буква встречается четное число раз. Циклическое слово X в n-буквенном алфавите называется циклическим $\langle m, n\rangle$-словом, если в любом подслове слова X имеется буква, входящая в это подслово нечетное число раз, а в любом подслове слова X длины m все буквы различны. Такие слова порождают $\langle m, n\rangle$-нумерации двоичных наборов [1]. Для всех натуральных n и m, $m < n$, построено циклическое $\langle m, n\rangle$-слово X длины $l = m2^{n-\lceil m/2\rceil}$ и для полученной $\langle m, n\rangle$-нумерации дан алгоритм нахождения по номеру соответствующего двоичного набора.

Введение

Рассматривается задача, которая была поставлена и исследовалась в [1]. Она была сформулирована в следующем виде: для некоторых n и m, $m < n$, построить такое обратимое отображение f начального отрезка натурального ряда $\{1, 2, \dots, 2^n\}$ в множество $I^n = \{0,1\}^n$ двоичных наборов длины n, что равенство

$$\rho(f(i), f(j)) = |i - j|$$

выполняется для всех таких i, $j \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$, что $|i - j| \leqslant m$, где ρ — метрика Хемминга на I^n. Такие отображения были названы $\langle m, n\rangle$-*нумерациями*. Эта задача была сведена к задаче отыскания слов длины $2^n - 1$ в n-буквенном алфавите с некоторыми запретами на подслова. В настоящей статье такие слова будут называться $\langle m, n\rangle$-*словами*. В [1] были построены циклические $\langle m, n\rangle$-слова длины 2^n для всех n и $m \leqslant n/2 + 1$, кроме $n = 4$ и $m = 3$, и доказано существование циклических $\langle m_i, n_i\rangle$-слов длины 2^{n_i} для последовательности некоторых значений m_i, n_i. В частности, при $m_i = 7 \cdot 2^i + 1$, $n_i = 11 \cdot 2^i$, $i \geqslant 0$. Следовательно, при этих значениях параметров задача была решена полностью.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01800) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (код проекта 473).

© 1998 Пережогин А. Л.

В [4] была сформулирована следующая задача. При заданном максимальном значении порога $m = n-1$ построить $\langle n-1, n\rangle$-слово наибольшей длины. В этой же работе дана индуктивная конструкция, с помощью которой порождаются циклические $\langle n-1, n\rangle$-слова длины $(n-1)2^{\lceil n/2\rceil}$.

В [6] был приведен другой метод построения циклических $\langle m, n\rangle$-слов, основанный на использовании некоторых фактов теории линейной алгебры. В [3] с помощью этого метода были построены циклические $\langle m, n\rangle$-слова длины $m2^{n-\lceil m/2\rceil}$.

В настоящей статье дана прямая конструкция циклического $\langle n-1, n\rangle$-слова длины $(n-1)2^{\lceil n/2\rceil}$ и получено ее обобщение на случай произвольного порога. Для порожденной этим словом нумерации показано, как по номеру i найти соответствующий ему двоичный набор. Также доказано, что если в циклическом $\langle m, n\rangle$-слове длины l каждая из $\lceil m/2\rceil$ фиксированных букв встречается $\lceil l/m\rceil$ раз, то $l \leqslant m2^{n-\lceil m/2\rceil}$. При $m = n-1$ этот факт был доказан в [4]. Заметим, что все построенные в [3] циклические $\langle m, n\rangle$-слова обладают таким свойством.

§ 1. Определения

Подсловом длины i, $0 \leqslant i \leqslant l$, слова $X = x_1\, x_2 \dots x_l$ называется слово Y, состоящее из любых i последовательных букв слова X, т. е. $Y = x_j\, x_{j+1}\, \dots\, x_{j+i-1}$ для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant l-i+1$. В случае $j = 1$ слово Y называется *префиксом* слова X. Префикс длины i слова X обозначается через $h_i(X)$.

Слово X в алфавите $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ называется $\langle m, n\rangle$-словом, $m < n$, если

(i) в каждом подслове длины m слова X все буквы различны;

(ii) в каждое подслово слова X некоторая буква входит нечетное число раз.

Если X — слово в алфавите A_n, то двоичный набор $S(X) = (s_1(X), s_2(X), \dots, s_n(X))$ называется *набором четности* для X, где

$$s_i(X) = \begin{cases} 0, & \text{если буква } a_i \text{ входит в } X \text{ четное число раз,} \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что если $X = YZ$, то $S(X) = S(Y) \oplus S(Z)$, где $\oplus$ — операция покомпонентного сложения по модулю 2.

Слово X называется *циклическим*, если $S(X) = \overline{0} = (0, 0, \dots, 0)$. Будем считать, что циклическое слово записано по окружности, т. е. за последней буквой слова X следует его первая буква. Слово Y называется *подсловом* циклического слова X, если для некоторого представления слова $X = X_1\, X_2\, X_3$ либо $Y = X_2$, либо $Y = X_3\, X_1$.

Циклическое слово $X = x_1\ x_2\ \ldots\ x_l$ называется *циклическим $\langle m,n\rangle$-словом*, если X удовлетворяет условию (i), а слово $x_1\ x_2\ \ldots\ x_{l-1}$ удовлетворяет условию (ii).

Обозначим через $s(m,n)$ длину максимального $\langle m,n\rangle$-слова, а через $c(m,n)$ длину максимального циклического $\langle m,n\rangle$-слова.

Для любого циклического $\langle m,n\rangle$-слова $X = x_1\ x_2 \ldots x_l$ отображение, которое каждому $j \in \{1,2,\ldots,l\}$ ставит в соответствие набор четности $S(x_1\ x_2\ \ldots\ x_j)$, является циклической $\langle m,n\rangle$-нумерацией [1]. В [2, 4] такое отображение названо m-изометрическим вложением начального отрезка натурального ряда $\{1,2,\ldots,l\}$ в n-мерный гиперкуб. Соответствующий список двоичных наборов $\overline{0}$, $S(x_1)$, $S(x_1\ x_2), \ldots, S(x_1\ x_2 \ldots x_l)$ называют также циклическим $\langle m,n\rangle$-кодом [6].

Заметим, что $\langle 2,n\rangle$-словам (циклическим $\langle 2,n\rangle$-словам) соответствуют гамильтоновы цепи (циклы) в гиперкубе, иногда называемые кодами Грея (циклическими кодами Грея). Такие слова ниже будут называться 1-цепями (1-циклами) [2].

Обозначим $g(n) = (n-1)2^{\lceil n/2\rceil}$.

В § 2 дана конструкция циклического $\langle n-1,n\rangle$-слова, в § 3 построена циклическая $\langle n-1,n\rangle$-нумерация, порожденная этим словом. Обобщение этих результатов на случай произвольного m приведено в § 4. В § 5 дана верхняя оценка для длины циклического $\langle m,n\rangle$-слова, обладающего некоторыми ограничениями.

§ 2. Конструкция циклических $\langle n-1,n\rangle$-слов

Для любого i, $0 \leqslant i < 2^{(n-1)/2}$, рассмотрим слово $X_i^n = x_i^n(1)\,x_i^n(2)\ldots x_i^n((n-1)/2)$ в алфавите $A_n \backslash A_{(n-1)/2} = \{b_1, b_2, \ldots, b_{(n+1)/2}\}$, построенное следующим образом. Пусть $(\sigma^i_{(n-1)/2}, \sigma^i_{(n-3)/2}, \sigma^i_{(n-5)/2}, \ldots, \sigma^i_1)$ — двоичное представление номера i и $\sigma^i_{(n+1)/2} = 1$. Полагаем

$$x_i^n(j) = \begin{cases} b_j, & \text{если } \sigma^i_j = 0, \\ b_{p(j)} & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{1}$$

где $p(j)$ равно такому l, что $l > j$, $\sigma^i_{j+1} = \sigma^i_{j+2} = \ldots = \sigma^i_{l-1} = 0$, $\sigma^i_l = 1$.

Пусть n — нечетное, $n \geqslant 3$. Рассмотрим слово

$$T^n = W_0^n\ W_1^n \ldots W^n_{2(n-1)/2-1} W_0^n\ W_1^n \ldots W^n_{2(n-1)/2-1} \tag{2}$$

в алфавите A_n, где $W_i^n = a_1\ x_i^n(1)\ a_2\ x_i^n(2) \ldots a_{(n-1)/2}\ x_i^n((n-1)/2)$, $0 \leqslant i < 2^{(n-1)/2}$. Заметим, что слово T^n имеет длину $g(n)$.

Теорема 1. *Слово T^n является циклическим $\langle n-1,n\rangle$-словом.*

Доказательство. Из (1) следует, что если $x_i^n(j) = x_{i+1}^n(k)$, где $x^n_{2(n-1)/2}(k) = x_0^n(k)$, то $k \geqslant j$. Следовательно, слово T^n удовлетворяет

свойству (i). Покажем, что слово $h_{g(n)-1}(T^n)$ удовлетворяет свойству (ii).

Предположим противное. Пусть существует подслово M слова $h_{g(n)-1}(T^n)$ такое, что $S(M) = \overline{0}$. Так как $s_1(M) = s_2(M) = \ldots = s_{(n-1)/2}(M) = 0$, то для некоторого $t \in \{1, 2, \ldots, (n-1)/2\}$ справедливо одно из двух равенств: либо

$$S(M) = S\left(x_i^n(t)\ x_i^n(t+1) \ldots x_i^n\left(\frac{n-1}{2}\right)\right) \oplus S(X_{i+1}^n\ X_{i+2}^n \ldots X_{j-1}^n) \oplus S(x_j^n(1)\ x_j^n(2)\ \ldots\ x_j^n(t-1)) = \overline{0},$$

где $i, j \in \{0, 1, \ldots, 2^{(n-1)/2} - 1\}$, $j > i$, и число $(j - i)$ — четное, либо

$$S(M) = S\left(x_i^n(t)\ x_i^n(t+1) \ldots x_i^n\left(\frac{n-1}{2}\right)\right) \oplus S(X_{i+1}^n\ X_{i+2}^n \ldots X_{2^{(n-1)/2}-1}^n\ X_0^n\ X_1^n \ldots X_{j-1}^n) \oplus S(x_j^n(1)\ x_j^n(2) \ldots x_j^n(t-1)) = \overline{0},$$

где $i, j \in \{0, 1, \ldots, 2^{(n-1)/2} - 1\}$, $j > i$, и число $(j - i)$ — четное.

Рассмотрим первый случай. Число j единственным способом можно представить в виде

$$j = i + 2^r(2f + 1). \tag{3}$$

Покажем, что в слове M буква b_r встречается нечетное число раз.

Из (3) следует, что

$$(\sigma_r^i,\ \sigma_{r-1}^i, \ldots, \sigma_1^i) = (\sigma_r^j,\ \sigma_{r-1}^j, \ldots, \sigma_1^j)$$

и множество наборов

$$\begin{gathered}(\sigma_r^i,\ \sigma_{r-1}^i, \ldots, \sigma_1^i),\\ (\sigma_r^{i+1},\ \sigma_{r-1}^{i+1}, \ldots, \sigma_1^{i+1}),\\ \ldots\\ (\sigma_r^{j-1},\ \sigma_{r-1}^{j-1}, \ldots, \sigma_1^{j-1})\end{gathered}$$

является множеством всех двоичных наборов длины r. Согласно (1) при $k \in \{i, i+1, \ldots, j-1\}$ слово X_k^n не содержит буквы b_r тогда и только тогда, когда $(\sigma_r^k,\ \sigma_{r-1}^k, \ldots, \sigma_1^k) = (1, 0, 0, \ldots, 0)$. Следовательно, только одно из слов

$$X_i^n,\ X_{i+1}^n, \ldots, X_{j-1}^n$$

не содержит буквы b_r, а в остальные слова буква b_r входит по одному разу. Ясно, что если в слове X_i^n имеется буква b_r, то она есть и в слове

X_j^n, причем длины максимальных префиксов, не содержащих этой буквы, данных слов совпадают. Следовательно, в слове M буква b_r встречается $j-i-1$ раз, т. е. нечетное число раз. Противоречие с цикличностью слова M.

Во втором случае вместо (3) имеем

$$j+2^{(n-1)/2}=i+2^r(2f+1).$$

Проводя аналогичные рассуждения, получаем то же противоречие. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *При любом n, $n\geqslant 3$,*

$$c(n-1,n)\geqslant (n-1)2^{\lceil n/2\rceil}. \tag{4}$$

Доказательство. Для нечетных n неравенство (4) прямо следует из теоремы 1. Пусть n — четное и $n\geqslant 4$. Рассмотрим слово T^{n-1} из (2). Нетрудно видеть, что слово

$$T^n=W_0^{n-1}nW_1^{n-1}n\dots W_{2^{(n-2)/2}-1}^{n-1}nW_0^{n-1}nW_1^{n-1}n\dots W_{2^{(n-2)/2}-1}^{n-1}n$$

является циклическим $\langle n-1,n\rangle$-словом и имеет длину $(n-1)2^{n/2}$. Следовательно, верна оценка (4).

Замечание. Слово T^n можно получить из слова T^{n-2} с помощью индукционной конструкции, описанной в [4] при доказательстве теоремы 2. При этом определение явного вида слова T^n сложно. Теорема 1 и следствие 1 раскрывают структуру построенного циклического $\langle n-1,n\rangle$-слова. Используя это, ниже для порожденной словом T^n циклической $\langle n-1,n\rangle$-нумерации мы приводим алгоритм нахождения двоичного набора по его номеру.

§ 3. Порожденная циклическая $\langle n-1,n\rangle$-нумерация

Представим слово T^n в следующем виде: $T^n=t_1\ t_2\ \dots\ t_{g(n)}$. Так как T^n является циклическим $\langle n-1,n\rangle$-словом, то отображение, которое каждому i ставит в соответствие двоичный набор $S(t_1\ t_2\dots t_i)$, является циклической $\langle n-1,n\rangle$-нумерацией [1]. Ниже приведен алгоритм нахождения набора $S(t_1\ t_2\dots t_i)$ по двоичному представлению номера i.

Предварительно докажем одну лемму. Пусть

$$\chi(j)=\begin{cases}\overline{0}, & \text{если } j \text{ четно,}\\ \overline{1} & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Определим индукцией по j следующую последовательность слов в алфавите $\{b_1,b_2,\dots,b_{(n+1)/2}\}$:

$$Z_1=b_1,\quad Z_j=Z_{j-1}\ b_j\ Z_{j-1},\quad 2\leqslant j\leqslant (n+1)/2. \tag{5}$$

Пусть $\overline{Z}_{(n+1)/2}=b_{(n+1)/2}\ Z_{(n+1)/2}=z_0\ z_1\dots z_{2^{(n+1)/2}-1}$. Тогда $\overline{Z}_{(n+1)/2}$ является 1-циклом, которому соответствует стандартный (иначе: двоично отраженный) код Грея [5].

Лемма 1. *Пусть* $i = (n-1)i_1 + i_2$, *где* $0 \leqslant i_2 < n-1$. *Тогда*

$$S(t_1\ t_2 \dots\ t_i) = S(z_0\ z_1 \dots z_{i_1-1}) \oplus \chi(i_1) \oplus S(h_{i_2}(W^n_{i_1})).$$

Доказательство. Покажем, что при любом j, $0 \leqslant j < 2^{(n-1)/2}$, верно равенство

$$S(W^n_j) = \bar{1} \oplus S(z_j). \tag{6}$$

Из (1) следует, что если $\sigma^j_k = 1$ и $\sigma^j_{k-1} = \sigma^j_{k-2} = \dots = \sigma^j_1 = 0$, то в слове W^n_j нет буквы b_k. В частности, в слове W^n_0 нет буквы $b_{(n+1)/2} = z_0$, т. е. $S(W^n_0) = \bar{1} \oplus S(z_0)$.

Пусть $j > 0$. В [2] показано, что если $i = 2^q(2j+1)$, то $z_i = b_{q+1}$. Следовательно, в слове W^n_i нет буквы z_i, т. е. справедливо (6). Тогда

$$\begin{aligned} S(t_1\ t_2 \dots t_i) &= S(W^n_0\ W^n_1 \dots W^n_{i_1-1}) \oplus S(h_{i_2}(W^n_{i_1})) \\ &= S(z_0\ z_1 \dots z_{i_1-1}) \oplus \chi(i_1) \oplus S(h_{i_2}(W^n_{i_1})). \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Пусть a — произвольная буква алфавита A_n. Если $a = a_j$, то через e_a обозначим двоичный вектор длины n, у которого единственная единица стоит в j-й позиции.

Для описания алгоритма введем следующую функцию. Пусть

$$lr_j(\sigma_k, \sigma_{k-1}, \dots, \sigma_1) = \begin{cases} (0,0,\dots,0), & \text{если } \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_j = 0, \\ e_{b_{j_1}} + e_{b_{j_2}}, & \text{если } \sigma_{j_1} = \sigma_{j_2} = 1,\ \ j_1 \leqslant j < j_2, \\ & \sigma_{l_1+1} = \sigma_{l_1+2} = \dots = \sigma_{j_2} = 0 \end{cases}$$

для любого двоичного набора $(\sigma_k, \sigma_{k-1}, \dots, \sigma_1)$ такого, что $\sigma_k = 1$.

Алгоритм 1. (Нахождение $S(t_1\ t_2 \dots t_i)$.)

1. $i_1 := \lfloor i/(n-1) \rfloor$.
2. $i_2 := i \pmod{(n-1)}$.
3. $i_3 := \lfloor i_2/2 \rfloor$.
4. $i_4 := i_2 \pmod 2$.
5. $S_1 := S(z_0\ z_1\ \dots\ z_{i_1-1})$.
6. Вычислить $\chi(i_1)$.
7. $S_2 := e_{a_1} \oplus e_{a_2} \oplus \dots \oplus e_{a_{i_3+i_4}}$.
8. $S_3 := e_{b_1} \oplus e_{b_2} \oplus \dots \oplus e_{b_{i_3}}$.
9. $S_4 := lr_{i_3}(1,\ \sigma^{i_1}_{(n-1)/2},\ \sigma^{i_1}_{(n-3)/2},\ \sigma^{i_1}_{(n-5)/2}, \dots, \sigma^{i_1}_1)$.
10. $S(t_1\ t_2 \dots t_i) := S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_4 \oplus \chi(i_1)$.

Конец.

Способ нахождения $S(z_0\ z_1 \dots z_{i_1-1})$ известен [5]. Операции 5–9 можно проводить параллельно, причем сложность каждой из них линейна по n.

§ 4. Конструкция циклических $\langle m, n\rangle$-слов

Лемма 2. *При любых m и n справедливо неравенство*

$$c(m, n+1) \geqslant 2c(m,n). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть слово X является циклическим $\langle m,n\rangle$-словом. Выделим произвольную букву x в X. Пусть $X = X_1\ x\ X_2$. Тогда легко убедиться, что слово

$$X_1\ a_{n+1}\ X_2\ X_1\ a_{n+1}\ X_2$$

является циклическим $\langle m, n+1\rangle$-словом. Следовательно, верно неравенство (7).

Теорема 2. *При любых n и m справедливо неравенство*

$$c(m,n) \geqslant m2^{n-\lceil m/2\rceil}.$$

Доказательство. При $m = n-1$ эта оценка совпадает с (4), а при $m = n-k-1$ и $k > 0$ по лемме 2 имеем

$$\begin{aligned} c(m,n) = c(m, m+1+k) &\geqslant 2^k c(m, m+1) \\ &\geqslant 2^{n-m-1} m 2^{\lceil (m+1)/2\rceil} = m2^{n-(m+1-\lceil (m+1)/2\rceil)} = m2^{n-\lceil m/2\rceil}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Обозначим $l(m,n) = m2^{n-\lceil m/2\rceil}$. Покажем, как построить слово $F^{m,n} = f_1\ f_2 \dots f_{l(m,n)}$, являющееся циклическим $\langle m,n\rangle$-словом, и дадим алгоритм нахождения $S(f_1\ f_2\ \dots\ f_j)$.

Пусть $n = m+1+k$, $T^{m+1} = \widetilde{T}^{m+1} a$ и $y_1\ y_2\ \dots\ y_{2^k}$ — стандартный 1-цикл в алфавите $\{a_{m+2},\ a_{m+3}, \dots , a_{m+1+k}\}$, задаваемый последовательностью из (5). Тогда нетрудно видеть, что слово

$$F^{m,n} = f_1\ f_2 \dots f_{l(m,n)} = \widetilde{T}^{m+1}\ y_1\ \widetilde{T}^{m+1}\ y_2 \dots \widetilde{T}^{m+1}\ y_{2^k} \tag{8}$$

является циклическим $\langle m,n\rangle$-словом.

Алгоритм 2. (Нахождение $S(f_1\ f_2 \dots f_j)$.)

1. $j_1 := \lfloor j/(m2^{\lceil (m+1)/2\rceil})\rfloor$.
2. $j_2 := j \pmod{m2^{\lceil (m+1)/2\rceil}}$.
3. $j_3 := j_1 \pmod 2$.
4. $S_1 := S(y_1\ y_2 \dots y_{j_1})$.
5. $S_2 := S(t_1\ t_2 \dots t_{j_2})$.
6. $S(f_1\ f_2 \dots f_j) := S_1 \oplus S_2 \oplus i_3 e_a$.

Конец.

Как уже отмечалось, способ вычисления S_1 можно найти в [5]. Двоичный набор S_2 получаем с помощью алгоритма 1.

§ 6. Одна верхняя оценка

Обозначим через P_m^n множество циклических $\langle m, n\rangle$-слов $X = X_1\ X_2 \dots X_l$ таких, что длины слов $X_1,\ X_2, \dots, X_l$ равны m и существует подмножество индексов $I_X = \{j_1,\ j_2, \dots, j_{\lceil m/2\rceil}\} \subset \{1,\ 2, \dots, m\}$ таких, что при любых $1 \leqslant i \leqslant l$ и $1 \leqslant k \leqslant \lceil m/2\rceil$ j_k-я буква слова X_i равна a_k.

Заметим, что слово $F^{m,n}$ из (8) принадлежит множеству P_m^n и имеет длину $m2^{n-\lceil m/2\rceil}$. Следующая теорема показывает, что в этом множестве нет более длинных слов.

Теорема 3. *Число букв в любом слове максимальной длины из множества P_m^n равно $m2^{n-\lceil m/2\rceil}$.*

Доказательство. Предположим, что m четно. Рассмотрим отображение φ такое, что для любого набора $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$$\varphi(V) = (v_1, v_2, \dots, v_{m/2}).$$

Так как X является циклическим $\langle m, n\rangle$-словом, то в списке двоичных наборов

$$\Theta = \{W_1, W_2, \dots, W_l\} = \{S(x_1), S(x_1 x_2), \dots, S(x_1\ x_2 \dots x_l)\}$$

все наборы различны. Рассмотрим список наборов

$$\varphi(\Theta) = \{\varphi(W_1), \varphi(W_2), \dots, \varphi(W_l)\}.$$

Если $i \in \{1, 2, \dots, m\}\backslash I_X$, то при всех k, $0 \leqslant k \leqslant l/m - 1$,

$$\varphi(W_{km+i}) = \varphi(W_{km+i-1}). \tag{9}$$

Так как $X \in P_m^n$, то при любом $i \in \{1, 2, \dots, l/(2m)\}$ в слове $X_{2i-1}X_{2i}$ каждая буква из $\{a_1, a_2, \dots, a_{m/2}\}$ встречается дважды. Поэтому

$$\begin{gathered}\varphi(W_i) = \varphi(W_{i-(2n-2)}) \text{ при } i \in \{2n-2, 2n-1, \dots, l\},\\ \varphi(W_i) = \varphi(W_{i-(2n-2)+l}) \text{ при } i \in \{1, 2, \dots, 2n-3\}.\end{gathered} \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что в списке $\varphi(\Theta)$ имеется не более m различных наборов. Так как в списке Θ все наборы различны, а для любого набора $U \in I^{m/2}$ имеется $2^{n-m/2}$ различных наборов U' таких, что $\varphi(U') = U$, то $l \leqslant m2^{n-m/2}$.

Пусть m — нечетное. В этом случае либо в множестве I_X есть два соседних индекса, т. е. для некоторых $k', k'' \in \{1, 2, \dots, (m+1)/2\}$ справедливо $j_{k'} = j_{k''} + 1$, либо $I_X = \{1, 3, 5, \dots, m\}$. Если в первом случае в слове X все подслова вида $a_{k'}\ a_{k''}$, а во втором — вида $a_m\ a_1$ заменить

на новую букву, то с точностью до переименования букв получим слово X' из множества P^{n-1}_{m-1}. Следовательно,

$$l \leqslant \frac{m}{m-1}(m-1)2^{n-1-(m-1)/2} = m2^{n-(m+1)/2}.$$

Таким образом, при произвольном m имеем $l \leqslant m2^{n-\lceil m/2\rceil}$. Но слово $F^{m,n}$ из множества P^n_m имеет длину $m2^{n-\lceil m/2\rceil}$. Теорема 3 доказана.

Приведем таблицу точных значений и нижних оценок функций $c(n-1,n)$ и $s(n-1,n)$, найденных с помощью вычислительной машины.

n	3	4	5	6	7	8	9
$c(n-1,n)$	8	12	32	40	100	$\geqslant 200$	$\geqslant 256$
$s(n-1,n)$	7	13	31	49	113	$\geqslant 221$	$\geqslant 397$

Заметим, что $c(n-1,n) = g(n)$ при $n \leqslant 6$. Но уже для $n = 7$ имеем $g(7) = 96 < c(6,7)$. Это означает, что, используя методы, описанные в [3] и в настоящей статье, уже при $n = 7$ не удается получить оптимального результата.

Более того, $g(8) = 112$, тогда как $c(7,8) \geqslant 200$. Заметим, что для четных $n \geqslant 8$ с помощью индукционной конструкции, использованной в [4] при доказательстве теоремы 1, можно получить следующую нижнюю оценку для $c(n-1,n)$:

$$c(n-1,n) \geqslant (3/2)g(n).$$

Эта оценка получена с помощью циклического $\langle 7,8\rangle$-слова длины 168.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Евдокимов А. А.** О нумерации подмножеств конечного множества // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980. Вып. 34. С. 8–26.

2. **Евдокимов А. А.** Вложение цепей и циклов в гиперкуб. I // Методы дискретного анализа в решении экстремальных задач: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. Вып. 50. С. 10–25.

3. **Зантен А. Я., ван.** Сохраняющие расстояния циклические коды на линейном базисе // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1998. Т. 5, № 4. С. 38–44.

4. **Пережогин А. Л.** О локально изометрическом кодировании натуральных чисел // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 4. С. 69–76.

5. **Bitner J. R., Ehrlish G., Reingold E. M.** Efficient generation of the binary reflected Gray code and its applications // Comm. Assoc. Comput. Mach. 1976. V. 19, N 9. P. 517–521.

6. **Zanten A. J.,van.** On the construction of distance-preserving codes // Algebraic and Combinatorial Coding Theory. Proc. of the Fifth Intern. Workshop of the ACCT. Unicorn, Shumen (Bulg.), 1996. P. 302–306.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: pereal@math.nsc.ru

Статья поступила
3 августа 1998 г.