ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1998. Серия 1. Том 5, № 4, 71–80

УДК 519.71+519.1

ОБ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НАДЕЖНОСТИ

А. А. Черняк

Доказано, что при каждом фиксированном $k \geqslant 2$ задача вычисления надежности является NP-трудной даже в классе k-униформных бинарных систем, в которых каждый элемент содержится не более чем в четырех минимальных путях, а вероятность отказа каждого элемента равна 1/2. Доказано, что задачи вычисления надежности и коэффициентов полиномов надежности эффективно разрешимы в классе бинарных систем с регулярными (пороговыми) структурными функциями и с произвольными вероятностями отказов своих элементов.

Введение

Пусть $T = \{s_1, \ldots, s_n\}$ — множество элементов, каждый из которых подвержен случайному отказу с вероятностью $1 - p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$; $\mathscr{P} = \{P_1, \ldots, P_m\}$ — множество таких подмножеств из T (называемых *минимальными путями*), что $P_i \nsubseteq P_j$ при $i \neq j$ и каждый элемент из T принадлежит хотя бы одному минимальному пути. Пара $[T, \mathscr{P}]$ называется *когерентной бинарной* (или монотонной) *системой*, а ее надежность $h([T, \mathscr{P}], \overline{p})$ (где $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$) определяется как вероятность присутствия в системе хотя бы одного минимального пути, состоящего из исправных элементов. Если $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/2$, то система называется *однородной*. Если длины всех минимальных путей одинаковы, то система называется *униформной*. В случае, когда длины всех таких путей равны k, система называется *k-униформной*. *Плотностью* системы называется число l, равное наибольшему количеству минимальных путей, имеющих непустое пересечение. Через (k, l) обозначим класс k-униформных однородных систем, плотность которых не превосходит l.

Когерентная бинарная система служит универсальной моделью для анализа надежности сложных систем различного вида [3, 4]. Проблема вычисления надежности бинарных систем является алгоритмически трудной: в [7, 8] показано, что она NP-трудна в классах (k, ∞) при $k \geqslant 2$, т. е. в классах k-униформных систем произвольной плотности (в классе

$(1, \infty)$ эта задача вырождается в тривиальную). Задача определения алгоритмической сложности соответствующей проблемы для униформных систем ограниченной плотности оставалась открытой. В данной статье доказано, что проблема вычисления надежности является NP-трудной даже в классе $(k, 4)$ при любом фиксированном $k \geqslant 2$.

Ввиду полученных результатов о сложности вычисления надежности из классов (k, l) важной становится задача определения достаточно представительных классов бинарных систем, надежность которых полиномиально вычислима [9, 10]. Наиболее известным классом среди таких систем являются регулярные системы, играющие важную роль в пороговой логике, теории матроидов, целочисленном программировании (см., например, [11–13]). В [7] получен полиномиальный алгоритм определения надежности таких систем. Алгоритм опирается на эффективные процедуры определения оценок надежности более общих бинарных систем, называемых *шелленговыми.*

В данной статье получено усиление результатов из [7] посредством рассмотрения таких собственных свойств регулярных систем, которые не наследуются от более широких классов. Такой подход позволил раскрыть комбинаторную структуру векторов отказовых и работоспособных состояний регулярной системы, а также получить эффективный алгоритм с временной сложностью $O(m + n|\mathscr{P}^*|)$, вычисляющий надежность и полином надежности такой системы.

1. Униформные системы ограниченной плотности

Пусть h_i — число i-элементных подмножеств в T, в каждом из которых содержится хотя бы один минимальный путь однородной системы $[T, \mathscr{P}]$. Тогда выражение

$$\sum_{i=1}^{n} h_i p^i (1-p)^{n-i},$$

равное величине $h([T, \mathscr{P}], p)$, называется *полиномом надежности* системы $[T, \mathscr{P}]$ с коэффициентами h_i.

Выполняющим набором для булевой функции F, существенно зависящей от переменных $x_1, \dots, x_k$, назовем бинарный вектор $z = (z_1, \dots, z_k)$ такой, что $F(z) = 1$.

Ленточной конъюнкцией длины r и степени s с корневой переменной $x_{r+1,0}$ назовем конъюнкцию вида

$$L_{r,s} = \bigwedge_{i=1}^{r} (x_{i0} \vee x_{i1} \vee \ldots \vee x_{is} \vee x_{i+1,0}).$$

Обозначим через a_r и b_r число таких выполняющих наборов $z = (z_{10}, z_{11}, \dots, z_{rs}, z_{r+1,0})$ для $L_{r,s}$, что $z_{r+1,0} = 1$ и $z_{r+1,0} = 0$ соответственно. Очевидно, что $a_1 = 2^{s+1}$ и $b_1 = 2^{s+1} - 1$.

Предложение 1. *При любом $r \geqslant 2$ выполняются следующие рекуррентные соотношения:*

$$a_r = 2^s(a_{r-1} + b_{r-1}), \quad b_r = 2^s(a_{r-1} + b_{r-1}) - b_{r-1}, \tag{1}$$

причем $a_i/b_i \neq a_j/b_j$ при любых $i \neq j$.

Доказательство. Пусть $z = (z_{10}, z_{11}, \dots, z_{r-1,s}, z_{r0})$ — выполняющий набор для $L_{r-1,s}$. Обозначим через $\mathscr{L}(z)$ множество выполняющих наборов для $L_{r,s}$, первые $sr + r - s$ компонент которых составляют z. Если $z_{r0} = z_{r+1,0} = 0$, то необходимо $z_{r1} \vee \ldots \vee z_{rs} = 1$. Поэтому $|\mathscr{L}(z)| = 2^s - 1$. В любом из остальных трех случаев $|\mathscr{L}(z)| = 2^s$. Теперь соотношения (1) следуют из попарной непересекаемости множеств $\mathscr{L}(z)$ при различных z.

Если $s = 0$, то a_r и b_r являются последовательными числами Фибоначчи и, следовательно, взаимно просты [1, с. 122]. Если же $s \neq 0$, то все b_r нечетные. Поэтому если a_{r-1} и b_{r-1} взаимно просты, то таковыми будут числа $(a_{r-1} + b_{r-1})2^s$ и b_{r-1} и, следовательно, числа a_r и b_r. Предложение 1 доказано.

Задачу определения надежности в классе (k, l) обозначим через BINAR$(k; l; p)$, где p — вероятность правильной работы элементов.

Теорема 1. BINAR$(s + 2; 4; 1/2)$ *является* NP-*трудной задачей при любом фиксированном целом $s \geqslant 0$.*

Доказательство. Известна следующая NP-трудная задача (сокращенно 3-НЕЗ) [5, с. 242]:

Вход: неориентированный кубический граф G без кратных ребер с множеством вершин $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Выход: число независимости графа G.

С каждой вершиной v_i графа G свяжем булеву переменную x_i, а с каждым ребром $e = x_p x_q$ графа G — дизъюнкцию $c_e = x_p \vee x_q$. Положим $F = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m$. Пусть $U = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ и в бинарном векторе $z = (z_1, \dots, z_n)$ компоненты $z_{i_1}, \dots, z_{i_k}$ равны 0, а остальные компоненты являются единичными. Непосредственно проверяется, что U является независимым множеством в G, если и только если z является выполняющим набором для функции F. Если через h_l обозначить число выполняющих наборов для F, содержащих l единичных компонент, то наименьшее l такое, что $h_l \neq 0$, определяет число независимости графа G, равное $n - l$.

Итак, показана полиномиальная сводимость задачи 3-НЕЗ к следующей перечислительной задаче (сокращенно 3-МВ).

Вход: множество $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ булевых переменных и конъюнкция $F = c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_m$ 2-элементных дизъюнкций $c_e = x_p \vee x_q$, причем каждая переменная содержится точно в трех дизъюнкциях.

Выход: числа h_l, $l = 0, 1, \dots, n$.

Определим новую функцию $F_{r\kappa}$, индуцированную функцией F, следующим образом. Каждую дизъюнкцию $c_e = x_p \vee x_q$ заменим дизъюнкцией

$$M_e = x_p \vee y_{e1} \vee \dots \vee y_{es} \vee x_q,$$

$e = 1, \dots, m$. Обозначим через $L_r(x_p)$ ленточную конъюнкцию длины r и степени s с корневой переменной x_p, а через $N_k(y_{ei})$ ленточную конъюнкцию длины k и степени s с корневой переменной y_{ei} (если $s = 0$, то полагается $N_k(y_{ei}) \equiv 1$). При этом все ленточные конъюнкции не пересекаются по переменным и не содержат переменных из X, отличных от корневых переменных. Положим

$$N_e = \bigwedge_{i=1}^{s} N_k(y_{ei}),$$

$$F_{rk} = \bigwedge_{e=1}^{m} (M_e \wedge N_e) \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} L_r(x_i) \Big).$$

Обозначим через Z_{uv} множество бинарных n-векторов веса u (т. е. содержащих u единичных компонент), доставляющих значение нуль в точности v 2-элементным дизъюнкциям функции F. Каждому вектору $z \in Z_{uv}$ поставим в соответствие множество $\mathscr{L}(z)$ таких выполняющих наборов для функции F_{rk}, что компоненты, соответствующие переменным из X, образуют вектор z.

Если $z_p = 1$, то z индуцирует a_r выполняющих наборов для ленточной конъюнкции $L_r(x_p)$. Если же $z_p = 0$, то число таких наборов для $L_r(x_p)$ равно b_r.

Если $z_p \vee z_q = 1$, то $M_e = 1$ и z индуцирует $(a_k + b_k)^s$ выполняющих наборов для N_e. Если же $z_p = z_q = 0$, то хотя бы одна из переменных y_{ei} должна принимать значение 1, т. е. z индуцирует $(a_k + b_k)^s - b_k^s$ выполняющих наборов для $M_e \wedge N_e$ (отметим, что ситуация $z_p = z_q = 0$ возможна только при $s \neq 0$).

Поэтому

$$|\mathscr{L}(z)| = a_r^u b_r^{n-u} \Big((a_k + b_k)^s \Big)^{m-v} \Big((a_k + b_k)^s - b_k^s \Big)^v$$

$$= b_r^n (a_k + b_k)^{sm} \Big(\frac{a_r}{b_r} \Big)^u \left(1 - \Big(\frac{b_k}{a_k + b_k} \Big)^s \right)^v.$$

Кроме того, $\mathscr{L}(z)$ образуют разбиение множества всех выполняющих наборов для функции F_{rk} при $u = 0, \ldots, n$, $v = 0, \ldots, m$. Введем обозначения: $t_{uv} = |Z_{uv}|$, f_{rk} — число всех выполняющих наборов для F_{rk},

$$c_r = \frac{a_r}{b_r}, \quad d_k = 1 - \left(\frac{b_k}{a_k + b_k}\right)^s, \quad q_{rk} = \frac{f_{rk}}{b_r^n (a_k + b_k)^{sm}}.$$

Тогда

$$q_{rk} = \sum_{u=0}^{n} \sum_{v=0}^{m} t_{uv} d_k^v c_r^u = \sum_{u=0}^{n} t'_{uk} c_r^u. \tag{2}$$

С функцией F_{rk} свяжем бинарную систему $[T_{rk}, \mathscr{P}_{rk}]$: элементами T_{rk} являются переменные функции F_{rk}, а каждый минимальный путь из $\mathscr{P}_{rk}$ соответствует s-элементной дизъюнкции из F_{rk}, состоящей из переменных этого минимального пути. Очевидно, что $[T_{rk}, \mathscr{P}_{rk}] \in (s + 2, 4)$. Положим $w = |T_{rk}|$, g_i — число выполняющих наборов для F_{rk}, содержащих по i единичных компонент. Очевидно, g_i равно числу $(w-i)$-элементных подмножеств в T_{rk}, не содержащих ни одного минимального пути. Поэтому

$$1 - h([T_{rk}, \mathscr{P}_{rk}], p) = \sum_{i=0}^{w} g_i p^{w-i} (1-p)^i,$$

откуда

$$1 - h([T_{rk}, \mathscr{P}_{rk}], 1/2) = \left(\sum_{i=0}^{v} g_i\right) \Big/ 2^w = f_{rk}/2^w.$$

Таким образом, имея величины $h(T_{rk}, \mathscr{P}_{rk}])$ и учитывая предложение 1, за время, полиномиально зависящее от m и n, можно определить величины q_{rk}, c_r и d_k, $1 \leqslant r \leqslant n+1$, $l \leqslant k \leqslant m+1$.

Рассмотрим $m + 1$ систем линейных уравнений

$$q_{rk} = \sum_{u=0}^{n} t'_{uk} c_r^u, \ r = 1, \ldots, n+1,$$

$1 \leqslant k \leqslant m + 1$, с коэффициентами c_r^u, составляющими в силу предложения 1 матрицу Вандермонда. Согласно [2] любую такую систему можно решить за время, полиномиально зависящее от m и n. По этой же причине за полиномиальное время можно решить $n + 1$ систем линейных уравнений

$$t'_{uk} = \sum_{v=0}^{m} t_{uv} d_k^v, \ k = 1, \ldots, m+1,$$

$0 \leqslant u \leqslant n$. Но $h_l = t_{l0}$, что означает полиномиальную сводимость по Тьюрингу задачи 3-МВ к BINAR$(s + 2; 4; 1/2)$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Из предложения 1 нетрудно вывести полиномиальную разрешимость задачи BINAR$(2; 2; 1/2)$. Алгоритмическая сложность задачи BINAR$(k; 3; p)$ остается пока открытой.

2. Регулярные бинарные системы

Бинарный n-вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ называется *характеристическим вектором* подмножества $A \subseteq T$, если

$$(x_i = 1) \iff (s_i \in A).$$

При этом $ind(x)$ будет обозначать множество $\{i \mid x_i = 1\}$.

Пусть $\Omega = \{\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_m\}$ — множество характеристических векторов минимальных путей системы $[T, \mathscr{P}]$. Положим

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geqslant \overline{u}_i \text{ для некоторого } \overline{u}_i \in \Omega; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция f называется *структурной функцией* системы $[T, \Omega]$ (всюду ниже символ Ω будет использоваться вместо $\mathscr{P}$). Вектор x называется *вектором исправного* (отказового) *состояния* системы $[T, \Omega]$, если $f(x) = 1$ ($f(x) = 0$). Для краткости такие вектора будем называть РВ и ОВ соответственно.

Скажем, что x является левым сдвигом вектора y (или y является правым сдвигом вектора x), если

$$ind(x) = \{i_1, \dots, i_r\},\ ind(y) = \{j_1, \dots, j_r\} \text{ и } i_1 \leqslant j_1, \dots, i_r \leqslant j_r.$$

Система $[T, \Omega]$ называется *регулярной,* если множество всех РВ замкнуто относительно левых сдвигов.

Введем обозначения: e_i — характеристический вектор одноэлементного множества $\{s_i\}$; $\oplus$ — операция булева сложения;

$$x^* = x - e_{m(x)}; \quad m(x) = \begin{cases} \max\{i \mid i \in ind(x)\}, & \text{если } ind(x) \neq \varnothing; \\ 0, & \text{если } ind(x) = \varnothing; \end{cases}$$

$$j(x \oplus y) = \min\{i \mid i \in ind(x \oplus y)\};$$

$$sh(x) = \begin{cases} x^* + e_{m(x)+1}, & \text{если } m(x) \neq n; \\ x^* - e_{m(x^*)} + e_{m(x^*)+1}, & \text{если } m(x) = n \text{ и } x \neq e_n; \end{cases}$$

$$(x; y) = \{z : \ x \ll z \ll y\}; \ [x; y] = (x; y) \cup \{x, y\};$$

$$t(x) = \begin{cases} \max\{i \mid x_i = 1, \quad ind(x, i) < m(x) - i\}, & \\ 0, & \text{если таких } i \text{ не существует.} \end{cases}$$

Вектор x^* называется производной вектора x.

Для данного вектора x обозначим через $\Phi(x)$ вектор y из Ω такой, что $x = y^*$ и y имеет максимально возможную величину $m(y)$. $\Phi(x)$ будет называться *первообразной величиной* вектора x.

Позиционным представлением вектора x называется n-вектор, компонентами которого являются элементы множества $ind(x)$, упорядоченные по возрастанию и дополненные в конце нулями. Положим, что линейный порядок $\ll$ на множестве бинарных n-векторов индуцируется лексикографическим порядком их позиционных представлений.

Через Ω^* обозначим множество всех производных векторов из Ω, упорядоченное строго по возрастанию относительно порядка $\ll$. Добавим так называемый фиктивный вектор d, следующий за всеми бинарными n-векторами (фиктивный вектор будет считаться ОВ).

Для вектора вероятностей $\overline{p} = (p_1, \dots, p_n)$ обозначим через $\Pr(x \mid i \leqslant k)$ произведение $\prod\limits_{i=1}^{k} \Pr(x_i)$, где

$$\Pr(x_i) = \begin{cases} p_i, & \text{если } x_i = 1, \\ 1 - p_i, & \text{если } x_i = 0. \end{cases}$$

$\Pr(x \mid i \leqslant n)$ называется *вероятностным весом* вектора x. Надежность $h\,([T,\Omega], \overline{p})$ системы $[T,\Omega]$ есть сумма вероятностных весов всех РВ функции f.

Теорема 2. *Пусть* $[T,\Omega]$ — *регулярная система,* v *и* w — *два последовательных вектора из* $\Omega^* \cup \{d\}$, $u = \Phi(v)$. *Тогда все векторы сегмента* $A = (v, sh(u))$ *являются* РВ, *а все векторы сегмента* $B = [sh(u), w]$ *являются* ОВ. *Кроме того,* $u \in A$.

Доказательство. Вначале сформулируем и докажем три свойства, касающихся порядка $\ll$.

Свойство 1. Пусть $k = j(x \oplus y)$. Тогда $x \ll y$, если и только если

$$x_k = 1,\ y_k = 0 \text{ и } m(y) > k$$

или

$$x_k = 0,\ y_k = 1 \text{ и } m(x) < k.$$

Это свойство следует из определения порядка $\ll$.

Свойство 2. Если вектор x является РВ, а вектор x^* является ОВ, то $x \in \Omega$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. существует такой вектор y, являющийся РВ, что $y < x$. Тогда $m(y) = m(x)$, ибо в противном случае $y \leqslant x^*$. Отсюда следует, что $y_i = 0$ и $x_i = 1$ для некоторого $i < m(x)$. В этом случае $z = y^* + e_i \leqslant x^*$. Но z является левым сдвигом y, т. е. z является РВ, что противоречит последнему неравенству.

Свойство 3. Пусть $x = z^*$ и $x \ll y \ll z$. Тогда $m(x) < j(x \oplus y) < m(z)$.

Доказательство. Предположим, что $k = j(x \oplus y) \geqslant m(z)$. Если $k = m(z)$, то $y_k = 1$ (ввиду $x_{m(z)} = 0$). Отсюда следует, что $j(y \oplus z) > m(z)$ и $y_{j(y \oplus z)} = 1$. Но в этом случае $m(z) > j(y \oplus z)$ (свойство 1, примененное к $y \ll z$). Противоречие. Если $k > m(z)$, то $y_{m(z)} = 0$. Отсюда следует, что $j(y \oplus z) = m(z)$. Но в этом случае по свойству 1

$$m(y) \geqslant k > j(y \oplus z) > m(y),$$

что невозможно.

Предположим, что $k \leqslant m(x)$. Тогда $x_k = 1$, $y_k = 0$, $m(y) > k$ (по свойству 1, примененному к $x \ll y$), $z_k = 1$ и $j(y \oplus z) = k$. Следовательно, по свойству 1, примененному к $y \ll z$, $m(y) < k$. Противоречие.

Теперь перейдем к доказательству основного утверждения. Рассмотрим произвольный вектор x из $(v; w)$. Пусть $k = j(v \oplus x)$. Вначале предположим, что $x \in A$ и $x \neq u$. Если $m(u) = n$, то $(u; sh(u)) = \varnothing$, т. е. $x \in (v, u)$. Если $m(u) \neq n$, то $(sh(u))^* = u^* = v$. В любом случае по свойству 3 $m(v) < k \leqslant m(u)$, что влечет $ind(v) \cup \{k\} \subseteq ind(x)$.

Зададим теперь вектор y так, что $ind(y) = ind(v) \cup \{k\}$. Тогда y или совпадает с u, или является его левым сдвигом. Ввиду регулярности $[T, \Omega]$ y является РВ. Следовательно, x также РВ, ибо $y \leqslant x$.

Рассмотрим вектор $sh(u)$. Если $m(u) = n$, то $sh(u)$ является правым сдвигом v, т. е. $sh(u)$ есть ОВ. Пусть $m(u) < n$. Тогда $m(sh(u)) > m(u)$ и $(sh(u))^* = v$. Отсюда, по определению первообразной, $sh(u) \notin \Omega$. По свойству 2 имеем: $sh(u)$ является ОВ.

Так как сегмент A, как доказано выше, состоит из РВ, то $w \notin A$, $u \in A$.

Предположим теперь, что $x \in B$ и x является РВ. Обозначим через y вектор, являющийся РВ, такой, что y получается из x последовательностью операций $*$ и y^* есть ОВ (возможно, $y = x$). По свойству 2 $y \in \Omega$, $y^* \in \Omega^*$. Кроме того, $y^* \ll y \ll x \ll w$ (свойство 1). Если $v_k = 0$, то $m(v) < k$ (по свойству 1, примененному к $v \ll x$). Но тогда либо $v = y^*$ и в этом случае y^* есть правый сдвиг вектора $sh(u)$, являющегося ОВ, что невозможно, либо $v \ll y^*$ (свойство 1) и в этом случае $y^* \in (v; w)$, что противоречит предположению теоремы. Таким образом, $v_k = 1$ и для некоторого r

$$x_r = 1,\ x_i = 0,\ i = k, k+1, \dots, r-1 \quad \text{(свойство 1)}.$$

Если $m(y) = r$, то $z = y^* + e_k \leqslant v$ и вектор z есть левый сдвиг вектора y, являющегося РВ. Следовательно, v является РВ, что невозможно. Если $m(y) > r$, то

$$y_r^* = 1,\ j(y^* \oplus v) = k,\ y_k^* = 0.$$

По свойству 1 $v \ll y^*$, т. е. $y^* \in (v; w)$. Это противоречит предположению теоремы.

Ниже приводится алгоритм R_REG, вычисляющий надежность $h([T,\Omega],\overline{p})$ регулярной системы $[T,\Omega]$ и коэффициенты h_i полинома надежности.

Алгоритм R_REG.

Шаг 1. Для данной регулярной системы $[T,\Omega]$ образовать множество Ω^* первых производных векторов из Ω и упорядочить его по возрастанию относительно $\ll$.

Шаг 2. $h := 0$;
for $i = 1,\dots,n$ *do* $h_i := 0$;
while $\Omega^* \neq \varnothing$ *do*
  $v := \min\{x \mid x \in \Omega^*\}$;
  $u := \Phi(v)$;
  $h := h + \Pr(v \mid i \leqslant m(v)) - \Pr(v \mid i \leqslant m(u))$;
  for $t = |ind(v)| + 1,\dots,n$ *do*
    $k := t - |ind(v)|$;
    $s := n - m(v)$;
    $l := n - m(u)$;
    $h_t := h_t + \binom{s}{k} - \binom{l}{k}$;
  $\Omega^* = \Omega^* \setminus \{v\}$.

Конец.

Следствие 1. *Алгоритм* R_REG *вычисляет надежность и полином надежности регулярной системы* $[T,\Omega]$ *за время* $O(m + n|\Omega^*|)$.

Доказательство. Время выполнения шага 1 алгоритма равно $O(m+n|\Omega^*|)$ [6]. Время выполнения шага 2 равно $O(n|\Omega^*|)$. Далее, величина $\Pr(v \mid i \leqslant m(v))$ есть сумма вероятностных весов всех векторов из сегмента $[v, sh(v))$. Величина $\Pr(v \mid i \leqslant m(u))$ есть сумма вероятностных весов всех векторов из сегмента $\{v\} \cup [sh(u), sh(v))$ (отметим, что если $m(u) = n$, то $sh(u) = sh(v)$ и $[sh(u), sh(v)) = \varnothing$). Следовательно, разность между этими величинами есть сумма вероятностных весов всех векторов из сегмента $(v, sh(u))$. Остальное следует из теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Айгнер М.** Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982.
2. **Ахо А., Хопхрофт Д., Ульман Д.** Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979.
3. **Байхельт Ф., Франкен П.** Надежность и техническое обслуживание: математический подход. М.: Радио и связь, 1988.

4. **Барлоу Р., Прошан Ф.** Статистическая теория надежности и испытания на безопасность. М.: Наука, 1985.
5. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
6. **Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.** Комбинаторные алгоритмы: теория и практика. М.: Мир, 1980.
7. **Ball M. O., Provan J. S.** Disjoint products and efficient computation of reliability // Oper. Res. 1988. V. 36, N 5. P. 703–715.
8. **Chernyak A. A., Chernyak Zh. A.** Note on complexity of computing the domination of binary systems // Discrete Appl. Math. 1997. V. 73, N 3. P. 289–295.
9. **Colbourn Ch. J.** The combinatorics of network reliability. N. Y.: The Clarendon Press; Oxford Univ. Press, 1987.
10. **Colbourn Ch. J.** Combinatorial aspects of network reliability // Topological network design. Ann. Oper. Res. 1991. V. 33, N. 1–4. P. 3–15.
11. **Peled U. N., Simeone B.** Polynomial-time algorithms for regular set-covering and threshold synthesis // Discrete Appl. Math. 1985. V. 12, N. 1. P. 57–69.
12. **Provan J. S., Ball M. O.** Efficient recognition of matroids and 2-monotonic systems // Applications of Discrete Mathematics. Philadelphia, PA: SIAM, 1988. P. 122–134.
13. **Sheng C. L.** Threshold logic. N. Y.: Acad. Press, 1969.

Адрес автора:

Белорусский
государственный университет,
мех.-мат. факультет,
пр. Фр. Скорины, 4,
220050 Минск, Беларусь

Статья поступила
4 июня 1997 г.,
переработанный вариант —
18 февраля 1998 г.