ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 1998. Серия 2. Том 5, № 1, 3–11

УДК 519.176

О ЗАДАЧАХ ЦЕЛЕСООБРАЗНОГО ТОВАРООБМЕНА*)

Э. Х. Гимади, Н. И. Глебов, В. В. Залюбовский

Предлагаются математические модели нахождения планов целесообразного товарообмена и погашения взаимных долгов предприятий с помощью товарообменных операций. Рассмотрена возможность учета затрат на транспортировку продукции. Решение возникающих при этом оптимизационных задач основано на сведении их к хорошо известной задаче о циркуляции минимальной стоимости. Приводится информация о программном продукте, в котором реализованы предлагаемые модели.

Введение

В работе [1] были предложены две математические модели погашения взаимных долгов предприятий, в которых рассматривались оптимизационные задачи нахождения схем денежных взаимозачетов с учетом важности и допустимых объемов долгов, а также с использованием дополнительных кредитных ресурсов. Однако в силу недостатка оборотных средств и ряда других причин при реальных расчетах между предприятиями доля денежных платежей нередко составляет менее 10% от общей суммы. Остальной объем платежей приходится на товарообменные (бартерные) операции и операции с различными видами ценных бумаг и их суррогатов.

Очевидно, что подобные платежные инструменты обладают существенно меньшей универсальностью, что на фоне отсутствия централизованных систем снабжения и торговли, а также неразвитости рынка ценных бумаг порождает серьезные трудности в организации поставок сырья и сбыта продукции для отдельно взятого предприятия. Каждое предприятие, как правило, хорошо знает потенциальных поставщиков необходимого ему сырья и оборудования, а также непосредственных покупателей своей продукции. Но такой информации зачастую бывает

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01591).

недостаточно для организации устойчивых товарообменных операций в условиях нехватки оборотных средств. Одним из возможных выходов из сложившейся ситуации представляется возможность нахождения схем целесообразного товарообмена на основе комплексного анализа ресурсных потребностей и производственных возможностей соответствующей совокупности предприятий.

В настоящей работе предлагаются математические модели погашения долгов предприятий с использованием товарообменных операций. Как и в [1], в качестве базовой математической модели, к которой осуществляется сведение рассматриваемых в работе задач целесообразного товарообмена, использована задача о циркуляции минимальной стоимости.

1. Базовая математическая модель

Пусть имеется ориентированный граф $G = (V, U)$ с множеством вершин V и множеством дуг $U \subset V \times V$.

Для непересекающихся подмножеств X и Y из V через (X, Y) обозначим множество всех дуг графа G, ведущих из $x \in X$ в $y \in Y$.

Для любой функции w, определенной на множестве U, обозначим через $\mathrm{div}_w(x)$ дивергенцию функции w в вершине $x \in V$, вычисляемую по формуле

$$\mathrm{div}_w(x) = \sum_{u \in A(x)} w(u) - \sum_{u \in B(x)} w(u),$$

где $A(x)$, $B(x)$ — множества дуг в графе G, выходящих из вершины x и входящих в вершину x соответственно.

Функцию f, определенную на множестве U, называют циркуляционным потоком, или *циркуляцией*, если $\mathrm{div}_f(v) = 0$ для всякого $v \in V$.

Задача о циркуляции минимальной стоимости (далее ЗЦМС) на графе $G = (V, U)$ может быть записана в следующем виде.

Минимизировать

$$\sum_{u \in U} c(u) f(u) \tag{1}$$

при выполнении следующих ограничений:

$$\mathrm{div}_f(v) = 0, \; v \in V, \tag{2}$$

$$\check{a}(u) \leqslant f(u) \leqslant \hat{a}(u), \; u \in U, \tag{3}$$

где $c(u)$ — цена прохождения единичного потока по дуге u; $\check{a}(u)$ и $\hat{a}(u)$ — ограничения снизу и сверху на величину потока по дуге $u \in U$.

Эффективные методы решения ЗЦМС имеются, например, в [2–3].

2. Задача целесообразного товарообмена

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ — множество предприятий, $R = \{1, \dots, m\}$ — множество типов товаров (ресурсов), выпускаемых и/или потребляемых предприятиями из множества N. В дальнейшем мы не будем различать понятия «товар» и «ресурс», так как один и тот же продукт (услуга) может быть для одного предприятия потребляемым ресурсом, а для другого — производимым товаром.

Для каждого предприятия $i \in N$ и товара $r \in R$ заданы величины $s_i^r \geqslant 0$ и $p_i^r \geqslant 0$, равные соответственно объему спроса и предложения (исчисляемых в стоимостном выражении). Без уменьшения общности можно считать, что $s_i^r p_i^r = 0$ для любых $i \in N$ и $r \in R$. Содержательный смысл этого условия заключается в том, что никакое предприятие не может являться одновременно поставщиком и покупателем одного и того же товара.

Под схемой (планом) товарообмена будем понимать совокупность величин $f_{ij}^r \geqslant 0$, $i, j \in N$, $r \in R$. При этом значение f_{ij}^r равно объему (в стоимостном выражении) товара r, передаваемого предприятием i предприятию j. Далее будем полагать, что $f_{ij}^r f_{ji}^r = 0$, т. е. отсутствуют встречные поставки одного и того же товара между парой предприятий.

Задача нахождения целесообразного товарообмена (далее ЗЦТ) может быть сформулирована следующим образом: при заданных величинах s_i^r и p_i^r найти такую схему товарообмена (f_{ij}^r), которая максимизировала бы суммарный объем товарообменных операций:

$$\sum_{(i,j)\in N\times N} \sum_{r\in R} f_{ij}^r \tag{4}$$

при выполнении следующих условий:

• суммарный объем товара r, передаваемый предприятием i, не должен превосходить его возможностей, т. е. при любых $r \in R$, $i \in N$

$$\sum_{j\in N} f_{ij}^r \leqslant p_i^r; \tag{5}$$

• суммарный объем товара r, получаемый предприятием j, не должен превосходить потребностей последнего, т. е. при любых $r \in R$, $j \in N$

$$\sum_{i\in N} f_{ij}^r \leqslant s_j^r; \tag{6}$$

• суммарный объем товаров, приобретенных предприятием, равен суммарному объему реализованных этим предприятием товаров, т. е. при любом $i \in N$

$$\sum_{r\in R} \sum_{j\in N} f_{ji}^r = \sum_{r\in R} \sum_{j\in N} f_{ij}^r. \tag{7}$$

Справедливо следующее

Утверждение 1. *ЗЦТ* (4)–(7) *сводится к ЗЦМС* (1)–(3).

Доказательство. По исходным данным ЗЦТ построим некоторый взвешенный ориентированный граф и покажем, что из решения ЗЦМС на этом графе можно получить решение ЗЦТ.

Рассмотрим граф G с множеством вершин $V = N \cup R$ и множеством дуг U, определяемым по следующим правилам.

1. Дуга $u = (i, r)$, идущая от вершины, соответствующей предприятию $i \in N$, к вершине, соответствующей товару $r \in R$, существует тогда и только тогда, когда $p_i^r > 0$ (т. е. предприятие i предлагает для реализации товар r). При этом для дуги u полагаем $\check{a}(u) = 0$, $\hat{a}(u) = p_i^r$ и $c(u) = -1/2$.

2. Дуга $u = (r, i)$, идущая от вершины, соответствующей товару $r \in R$, к вершине, соответствующей предприятию $i \in N$, существует тогда и только тогда, когда $s_i^r > 0$ (т. е. предприятию i требуется товар r). При этом для дуги u полагаем $\check{a}(u) = 0$, $\hat{a}(u) = s_i^r$ и $c(u) = -1/2$.

Покажем, что любая циркуляция в построенном нами графе соответствует некоторому допустимому плану товарообмена. Пусть $f(u)$ — некоторая циркуляция в G. Определим по ней значения величин f_{ij}^r. Известно, что любая циркуляция может быть представлена в виде суммы элементарных (циклических) циркуляций. Обозначим через $Q_1, Q_2, \dots, Q_T$ циклы, соответствующие элементарным циркуляциям, сумма которых равна циркуляции f. Каждому такому циклу соответствует положительная величина q_t, равная величине потока, проходящего по циклу Q_t. (Заметим, что разложение циркуляции на элементарные может быть неоднозначным, но нас устраивает *любое* из них.) Определим множество индексов $F_{ij}^r \subset \{1, 2, \dots, T\}$ $(i, j \in N;\ t \in T)$ по следующему правилу:

$$t \in F_{ij}^r \iff \text{цикл } Q_t \text{ содержит фрагмент вида } (i, r, j).$$

Теперь мы можем определить величины f_{ij}^r, воспользовавшись формулой

$$f_{ij}^r = \sum_{t \in F_{ij}^r} q_t.$$

Нетрудно проверить, что полученные таким образом значения f_{ij}^r удовлетворяют всем ограничениям ЗЦТ. Кроме того, величина функционала ЗЦМС на любой циркуляции равна значению функционала (4) ЗЦТ на соответствующем плане товарообмена, взятому с противоположным знаком.

Так же просто доказывается, что любому допустимому решению (f_{ij}^r) ЗЦТ можно поставить в соответствие циркуляцию f в графе G

со значением функционала, равным по абсолютной величине суммарному объему товарообменных операций. Для этого достаточно положить

$$f(i,r) = \sum_{j \in N} f_{ij}^r \text{ и } f(r,j) = \sum_{i \in N} f_{ij}^r.$$

На основании изложенного выше можно сделать вывод о том, что оптимальному решению ЗЦМС будет соответствовать оптимальное решение ЗЦТ. Утверждение 1 доказано.

Замечание 1. Число вершин в графе G, построенном при доказательстве утверждения 1, равно $n+m$, а число дуг не превосходит величины nm.

3. Задача погашения долгов с использованием товарообменных операций

Предположим, что в дополнение к исходным данным ЗЦТ, описанной в предыдущем разделе, для каждой пары предприятий $(i,j) \in N \times N$ задана величина $d_{ij} \geqslant 0$, характеризующая задолженность предприятия i предприятию j. Без уменьшения общности можно считать, что $d_{ij} \cdot d_{ji} = 0$ для любых $i, j \in N$.

Наряду с величинами $f_{ij}^r \geqslant 0$ $(i,j \in N,\ r \in R)$, равными объему (в стоимостном выражении) товара r, передаваемого предприятием i предприятию j, введем в рассмотрение величины $f_{ij} \geqslant 0$, i, $j \in N$. При этом значение f_{ij} определим как величину долга, который предприятие i *зачитывает* предприятию j.

Под планом (схемой) товарообмена, допустимом в рамках задачи погашения долгов, будем понимать совокупность величин (f_{ij}^r, f_{ij}), удовлетворяющую следующим условиям:

• суммарный объем товара r, передаваемый предприятием i, не должен превосходить его возможностей, т. е. при любых $r \in R$, $i \in N$

$$\sum_{j \in N} f_{ij}^r \leqslant p_i^r; \tag{8}$$

• суммарный объем товара r, получаемый предприятием j, не должен превосходить потребностей последнего, т. е. при любых $r \in R$, $j \in N$

$$\sum_{i \in N} f_{ij}^r \leqslant s_j^r; \tag{9}$$

• сумма объемов товаров, приобретенных предприятием, и долгов, зачтенных его кредиторами, равна сумме объемов реализованных этим предприятием товаров и долгов, зачтенных его дебиторам, т. е. при любом $i \in N$

$$\sum_{r\in R}\sum_{j\in N} f_{ji}^r + \sum_{j\in N} f_{ji} = \sum_{r\in R}\sum_{j\in N} f_{ij}^r + \sum_{j\in N} f_{ij}; \tag{10}$$

• величина долга, зачитываемая предприятием i предприятию j, не должна превосходить величины задолженности предприятия j предприятию i, т. е. для любых $i \in N,\ j \in N$

$$f_{ij} \leqslant d_{ji}. \tag{11}$$

Пусть также заданы неотрицательные величины $\alpha, \beta \geqslant 0$, смысл которых будет пояснен позднее.

Задача максимального погашения долгов с использованием товарообменных операций (далее ЗПД) может быть сформулирована следующим образом: при заданных величинах α, β, s_i^r, p_i^r и d_{ij} найти такую схему товарообмена (f_{ij}^r, f_{ij}), которая максимизировала бы взвешенную сумму объема товарообменных операций и зачетов:

$$\alpha \sum_{r\in R}\sum_{i\in N}\sum_{j\in N} f_{ij}^r + \beta \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} f_{ij} \tag{12}$$

при выполнении ограничений (8)–(11).

Коэффициенты α и β отражают степень важности (приоритет) товарообменных и зачетных операций соответственно. В частности, положив $\alpha = 0$, получим задачу нахождения максимального погашения задолженностей с использованием товарообменных операций. Случай $\beta = 0$ соответствует задаче максимизации суммарного объема товарообменных операций. (Заметим, что даже в этом случае ЗПД не эквивалентна рассмотренной ранее ЗЦТ, так как наличие дополнительных связей, соответствующих долговым отношениям, расширяет множество допустимых вариантов товарообмена.)

Утверждение 2. *ЗПД* (8)–(12) *сводится к ЗЦМС* (1)–(3).

Доказательство. По исходным данным ЗПД построим некоторый взвешенный ориентированный граф такой, что из решения ЗЦМС на этом графе можно получить решение ЗПД.

Рассмотрим граф $G = (V, U)$ с множеством вершин $V = N \cup R$ и множеством дуг U, состоящим из трех непересекающихся подмножеств $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$. Множества U_1 и U_2 определяются так же, как в доказательстве утверждения 1: $U_1 = \{u = (i, r) \mid i \in N, r \in R, p_i^r > 0\}$, $U_2 = \{u = (r, i) \mid i \in N, r \in R, s_i^r > 0\}$. Множество U_3 состоит из дуг, соединяющих вершины, соответствующие предприятиям, которые связаны отношением задолженности: $U_3 = \{u = (i,j) \mid i \in N, j \in N, d_{ji} > 0\}$. При этом для всякой дуги $u \in U$ полагаем $\check{a}(u) = 0$,

$$\hat{a}(u) = \begin{cases} p_i^r, & u = (i,r) \in U_1, \\ s_i^r, & u = (r,i) \in U_2, \\ d_{ji}, & u = (i,j) \in U_3; \end{cases}$$

$$c(u) = \begin{cases} -\alpha/2, & u \in U_1 \cup U_2, \\ -\beta, & u \in U_3. \end{cases}$$

Далее, как и в доказательстве утверждения 1, можно показать, что любая циркуляция в графе G соответствует некоторому плану товарообмена задачи ЗПД. В то же время любому допустимому решению ЗПД можно поставить в соответствие циркуляцию в графе G. При этом на соответствующих решениях рассматриваемых задач значения функционалов по абсолютной величине совпадают. Отсюда следует, что оптимальному решению ЗЦМС на графе G будет соответствовать оптимальное решение ЗПД. Утверждение 2 доказано.

Замечание 2. Число вершин в графе G, построенном при доказательстве утверждения 2, равно $n + m$, а число дуг не превосходит величины $n(m + n)$.

4. Учет транспортных затрат

Одним из наиболее существенных недостатков рассмотренных выше моделей является отсутствие учета затрат на транспортировку товара. Реальные транспортные затраты при существующих тарифах могут существенно повлиять на процесс формирования рациональной схемы товарообмена.

Рассмотрим модификацию модели, позволяющую принимать во внимание расходы на транспортировку товара, на примере задачи целесообразного товарообмена.

Пусть для каждой пары предприятий $(i,j) \in E$ заданы неотрицательные числа $t_{ij}^r \geqslant 0,\ r = 1, \ldots, M$, отражающие удельный вес затрат на транспортировку товара r от предприятия i к предприятию j. Тогда можно сформулировать *задачу нахождения целесообразного товарообмена с учетом транспортных затрат* (ЗЦТТЗ): в условиях ограничений (5)–(7) найти схему товарообмена (f_{ij}^r), минимизирующую следующий функционал:

$$\sum_{(i,j)\in N\times N} \sum_{r\in R} (1 - t_{ij}^r) f_{ij}^r. \tag{13}$$

Имеет место

Утверждение 3. *ЗЦТТЗ* (5)–(7), (13) *сводится к ЗЦМС* (1)–(3).

Доказательство. Построим по исходным данным ЗЦТТЗ взвешенный ориентированный граф $G = (V, U)$ такой, что из решения ЗЦМС на этом графе можно получить решение исходной задачи.

Множество V вершин графа G состоит из трех непересекающихся множеств: $V = N \cup X \cup Y$. Множества X и Y при этом определяются следующим образом:

$$X = \{x_i^r \mid p_i^r > 0,\ i \in N,\ r \in R\}, \quad Y = \{y_i^r \mid s_i^r > 0,\ i \in N,\ r \in R\}.$$

Множество дуг U графа G также состоит из трех непересекающихся множеств: $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$.

Множество U_1 состоит из дуг вида (i, x_i^r), $i \in N, r \in R$, соединяющих вершины множеств N и X. При этом для дуги $u = (i, x_i^r)$ полагаем $\check{a}(u) = 0$, $\hat{a}(u) = p_i^r$, $c(u) = 0$.

Дуги множества U_2 соединяют элементы множеств X и Y и имеют вид (x_i^r, y_j^r), $i, j \in N$, $r \in R$. При этом полагаем $\check{a}(u) = 0$, $\hat{a}(u) = \min\{p_i^r, s_i^r\}$, $c(u) = 1 - t_{ij}^r$.

Множество U_3 состоит из дуг вида (y_i^r, i), $i \in N, r \in R$, соединяющих вершины множеств Y и N. При этом для дуги $u = (y_i^r, i)$ полагаем $\check{a}(u) = 0$, $\hat{a}(u) = s_i^r$, $c(u) = 0$.

Теперь, как и в доказательстве утверждения 1, можно показать, что любая циркуляция в графе G соответствует некоторому плану товарообмена задачи ЗЦТТЗ. В то же время любому допустимому решению ЗЦТТЗ можно поставить в соответствие циркуляцию в графе G. При этом на соответствующих решениях рассматриваемых задач значения функционалов по абсолютной величине совпадают. Отсюда следует, что оптимальному решению ЗЦМС на графе G будет соответствовать оптимальное решение ЗЦТТЗ. Утверждение 3 доказано.

Замечание 3. Число вершин в графе G, построенном при доказательстве утверждения 3, оценивается величиной $O(nm)$, а число дуг — $O(mn^2)$.

Аналогичным образом можно учесть транспортные затраты в задаче погашения долгов предприятий с использованием товарообменных операций. При этом целевая функция задачи примет вид

$$\alpha \sum_{r \in R} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} (1 - t_{ij}^r) f_{ij}^r + \beta \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} f_{ij}.$$

При доказательстве сводимости получаемой задачи к ЗЦМС может быть использован граф G из доказательства утверждения 3. При этом необходимо модифицировать значения $c(u)$ для дуг из множества U_2, положив $c(u) = -\alpha(1 - t^r_{ij})$ для всех $u = (x^r_i, y^r_j) \in U_2$. Кроме того, множество дуг U графа G необходимо дополнить множеством

$$U_4 = \{u = (i,j) \mid i,j \in N, d_{ji} > 0\}.$$

При этом для всякой $u = (i,j) \in U_4$ полагаем $\check{a}(u) = 0$, $\hat{a}(u) = d_{ji}$, $c(u) = -\beta$.

Заключение

На основе предложенных моделей авторами создан программный продукт, позволяющий решать реальные задачи погашения взаимных долгов предприятий с использованием товарообменных операций на персональных компьютерах. В силу того, что процессы сведения к задаче ЗЦМС в рассмотренных выше моделях, равно как и последующего восстановления решений исходных задач, являются конструктивными, пользователю предоставлена возможность ввода необходимой информации в естественном виде.

Существующая версия позволяет получать решения задач, содержащих информацию о десятках тысяч клиентов при числе связей между ними, исчисляемых миллионами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Залюбовский В. В.** О некоторых задачах погашения взаимных долгов предприятий // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1997. Сер. 2. Т. 4, № 1. С. 30–39.
2. **Goldberg A. V., Tarjan R. E.** Finding minimum-cost circulations by cancelling negative cycles // J. Assoc. Comput. Mach. 1989. V. 36, N 4. P. 873–886.
3. **Goldberg A. V., Tarjan R. E.** Finding minimum-cost circulations by successive approximation // Math. Oper. Res. 1990. V. 15, N 3. P. 430–466.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
25 мая 1998 г.