ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 1998. Серия 2. Том 5, № 1, 12–18

УДК 519.8

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВЫБОРА ЦИКЛИЧЕСКОГО МАРШРУТА И ЗАГРУЗКИ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА*)

Э. Х. Гимади, Н. И. Глебов, А. И. Сердюков

Исследуется задача выбора такого простого циклического маршрута и такого плана загрузки транспортного средства, когда максимизируется прибыль от купли и продажи загруженных товаров различных видов во всех заданных пунктах обхода. Произведено сведе́ние этой задачи к задаче коммивояжера с матрицей расстояний, удовлетворяющей неравенству треугольника. Предложены полиномиальные алгоритмы решения исходной задачи с гарантированной погрешностью для ряда типов загрузки. Выделены классы задач, когда описанные алгоритмы позволяют получить либо точные, либо асимптотически точные решения.

В рассматриваемой задаче предполагается, что транспортное средство ограниченной вместимости (грузоподъемности) $A > 0$ должно осуществить простой циклический обход вершин (пунктов) полного n-вершинного графа G_n. При перемещении из пункта i в пункт j (по дуге (i,j) в графе G_n) имеется возможность закупить товары в пункте i и загрузить ими транспортное средство (с учетом его вместимости), а затем продать эти товары в пункте j. Считаются известными величины a_r и d_{ri}, где a_r — вес одной единицы товара типа r, а d_{ri} — стоимость единицы товара r-го типа в i-м пункте, $1 \leqslant r \leqslant m$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Под прибылью, получаемой при перемещении по дуге (i,j), будем понимать разницу между суммарной стоимостью товаров, проданных в пункте j и приобретенных в пункте i.

Для формулировки задачи оптимального выбора маршрута и загрузки транспортного средства введем в рассмотрение переменные x_{ri}, равные количеству единиц товара r-го типа, приобретенного в i-м пункте, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant r \leqslant m$. Будем также считать заданным

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01591).

подмножество X множества неотрицательных вещественных чисел R_+, представляющего собой множество возможных значений переменных x_{ri}.

Задача 1. Требуется найти такой циклический обход заданных пунктов и такой допустимый план (x_{ri}) закупки товаров и загрузки ими транспортного средства в каждом пункте обхода, чтобы суммарная прибыль, получаемая в результате купли и продажи товаров, была максимальной.

Обозначим через $F(\pi)$ максимальную суммарную прибыль, получаемую при фиксированном обходе $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$, где π — перестановка чисел $1, \dots, n$.

Нетрудно видеть, что $F(\pi)$ складывается из величин прибылей c_{ij}, получаемых при перемещении по дуге (i, j), $i = \pi_k$ и $j = \pi_{k+1}$, где $k = 1, \dots, n$, а $\pi_{n+1} = \pi_1$. Очевидно, что c_{ij} является оптимальным значением целевой функции в следующей задаче о ранце.

Найти максимум функции

$$\sum_{r=1}^{m} (d_{rj} \dot{-} d_{ri}) x_{ri} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{r=1}^{m} a_r x_{ri} \leqslant A, \tag{2}$$

$$x_{ri} \in X, \ r = 1, \dots, m, \tag{3}$$

где $(b \dot{-} a) = \max(0, b - a)$.

Таким образом, задача 1 заключается в максимизации функции

$$F(\pi) = \sum_{k=1}^{n} c_{\pi_k \pi_{k+1}} \tag{4}$$

по всем перестановкам $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ чисел $1, \dots, n$, где $\pi_{n+1} = \pi_1$.

Другими словами, задача 1 есть не что иное, как задача коммивояжера на максимум для специальных матриц $C = (c_{ij})$, элементы которых определяются результатами решения задач (1)–(3).

Известно, что задача коммивояжера на максимум в общей постановке, так же как и обычная задача коммивояжера (на минимум), NP-трудна [6, 11]. Известен ряд работ, посвященных построению приближенных эффективных алгоритмов с оценками для решения задачи коммивояжера на максимум [1, 3–5, 7–10]. Поставленная выше задача 1 в случаях $X \subset Z_+$ и $X = \{0, 1\}$ является NP-трудной, поскольку NP-трудными являются соответствующие задачи о ранце (1)–(3) [6]. Отметим, что в случае $a_r \in Z_+$ для решения задач о ранце имеются псевдополиномиальные алгоритмы (см., например, [2]).

Перейдем теперь к рассмотрению свойств матрицы C.

Утверждение 1. *Элементы матрицы C удовлетворяют неравенству треугольника, т. е. для любых i, s, j из $\{1, \dots, n\}$*

$$c_{ij} \leqslant c_{is} + c_{sj}.$$

Действительно, обозначив через (x_r^1), (x_r^2), (x_r^3) оптимальные векторы загрузки при перемещении транспортного средства по дугам (i, j), (i, s), (s, j) соответственно, имеем

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} (d_{rj} \dot{-} d_{ri}) x_r^1 \leqslant \sum_{r=1}^{m} \{(d_{rj} \dot{-} d_{rs}) + (d_{rs} \dot{-} d_{ri})\} x_r^1 = \sum_{r=1}^{m} (d_{rj} \dot{-} d_{rs}) x_r^1$$
$$+ \sum_{r=1}^{m} (d_{rs} \dot{-} d_{ri}) x_r^1 \leqslant \sum_{r=1}^{m} (d_{rj} \dot{-} d_{rs}) x_r^3 + \sum_{r=1}^{m} (d_{rs} \dot{-} d_{ri}) x_r^2 = c_{is} + c_{sj}.$$

Рассмотрим вопрос о сложности вычисления элементов матрицы C в зависимости от типа загрузки, т. е. от вида множества X в ограничении (3).

Утверждение 2. *При $X = Z_+$ и целочисленных a_r, $1 \leqslant r \leqslant m$, элементы матрицы C можно вычислить за время $O(mn^2A)$ при используемой рабочей памяти $O(A)$.*

Доказательство. В данном случае мы имеем линейную задачу о ранце с целочисленными переменными [3], для которой при произвольных $a_r \in R_+$ справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$D_{ij}(\alpha) = \max\{D_{ij}(\alpha - a_r) + (d_{rj} \dot{-} d_{ri}) \mid r = 1, \dots, m \text{ и } a_r \leqslant \alpha\}, \qquad (5)$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant A$ и $c_{ij} = D_{ij}(A)$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$.

Нетрудно видеть, что при $a_r \in Z_+$, $1 \leqslant r \leqslant m$, для вычисления всех n^2 элементов матрицы C с использованием этих соотношений требуется $O(mn^2A)$ времени при памяти $O(A)$ (без учета памяти для хранения исходной информации и элементов матрицы C). Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *При $X = \{0, 1\}$ и целочисленных a_r, $1 \leqslant r \leqslant m$, элементы матрицы C можно вычислить за время $O(mn^2A)$ при используемой рабочей памяти $O(mA)$.*

Доказательство. В этом случае мы имеем задачу о ранце с $\{0, 1\}$-переменными [2], для которой при $a_r \in R_+$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant A$ справедливы соотношения

$$D_{ij}(1, \alpha) = \begin{cases} (d_{1j} \dot{-} d_{1i}) & \text{при } a_1 \leqslant \alpha, \\ 0 & \text{при } a_1 > \alpha; \end{cases}$$
$$D_{ij}(r, \alpha) = \max \begin{cases} D_{ij}(r-1, \alpha - a_r) + (d_{rj} \dot{-} d_{ri}) \\ D_{ij}(r-1, \alpha) \end{cases} \quad (2 \leqslant r \leqslant m). \qquad (6)$$

Ясно, что $c_{ij} = D_{ij}(m, A)$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$. При целочисленных a_r, $1 \leqslant r \leqslant m$, вычисление всех n^2 элементов матрицы C с использованием соотношений (6) требует времени $O(mn^2A)$ при используемой памяти $O(mA)$. Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. *При $X = R_+$ элементы матрицы C имеют вид*

$$c_{ij} = A \max_{1\leqslant r\leqslant m} \frac{(d_{rj} \dot{-} d_{ri})}{a_r}, \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n,$$

и матрица C может быть вычислена за время $O(mn^2)$.

Доказательство. Легко видеть, что в рассматриваемом случае имеется оптимальный план (x_{ri}), при котором транспортное средство в каждом пункте загружается товарами одного типа. Отсюда следует указанный в утверждении вид элементов матрицы, а также оценка временно́й сложности. Утверждение 4 доказано.

Теорема 1. *Задача 1 может быть решена за время $O(n^3 + mn^2A)$ с относительной погрешностью не более $1/4$ для исходных данных, когда $X = Z_+$ или $X = \{0, 1\}$.*

Доказательство. Предлагаем следующий трехэтапный алгоритм $\widetilde{\mathscr{A}}$ решения задачи 1.

1-й этап (формирование матрицы C). Вход: натуральные числа m, n, A, вектор $(a_r) \in Z_+^m$, $1 \leqslant r \leqslant n$, и матрица $(d_{ri}) \in R_+^{m\times n}$. Выход: $(c_{ij}) \in R_+^{n\times n}$.

2-этап (отыскание маршрута π в задаче коммивояжера на максимум с оценкой относительной погрешности $1/4$). Вход: натуральное число n и матрица расстояний C. Выход: перестановка (маршрут) $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$.

3-й этап (вычисление плана загрузки $x(\pi)$ транспортного средства). Вход: натуральные числа m, n, A, вектор $(a_r) \in Z_+^m$, $1 \leqslant r \leqslant n$, матрица $(d_{ri}) \in R_+^{m\times n}$ и перестановка π, полученная на предыдущем этапе. Выход: план загрузки $x(\pi)$.

Алгоритм $\widetilde{\mathscr{A}}$ описан полностью.

На первом этапе элементы матрицы C вычисляются в соответствии с соотношениями (5) и (6). Согласно этим соотношениям временная сложность первого этапа алгоритма $\widetilde{\mathscr{A}}$ равна $O(mn^2A)$.

Из утверждения 1 и работы [7] следует, что второй этап может быть реализован за время $O(n^3)$. При этом относительная погрешность для полученного решения задачи отыскания максимального гамильтонова контура не превышает $1/4$.

На третьем этапе практически повторяются действия первого этапа, но только для вычисления n элементов матрицы C, соответствующих

дугам маршрута π, полученного на втором этапе. Это потребует времени в n раз меньше, чем на первом этапе, т. е. $O(mnA)$. Кроме вычисления упомянутых элементов матрицы здесь формируется план $x(\pi)$ загрузки транспортного средства. Время выполнения этих действий не превышает той же величины $O(mnA)$.

Итак, время работы алгоритма $\widetilde{\mathscr{A}}$ при решении задачи 1 не превосходит $O(n^3 + mn^2A)$; при этом относительная погрешность получаемого решения не превышает $1/4$. Теорема 1 доказана.

Перейдем к рассмотрению случая $X = R_+$ (непрерывных планов (x_{ri})). В этом случае будем решать задачу 1 с помощью алгоритма $\widetilde{\mathscr{A}}_1$, являющегося модификацией уже описанного алгоритма $\widetilde{\mathscr{A}}$. Модификация касается второго этапа алгоритма.

Введем некоторые понятия и обозначения.

Рассматривается m-мерное векторное пространство R^m, где r-му орту соответствует тип товара r, $1 \leqslant r \leqslant m$. Пункту i, $1 \leqslant i \leqslant n$, ставится в соответствие точка $\tilde{y}_i = (\tilde{y}_i^1, \dots, \tilde{y}_i^m) \in R^m$, где $\tilde{y}_i^r$ есть стоимость единицы товара r-го вида в i-м пункте, т. е. $\tilde{y}_i^r = d_{ri}$. Под расстоянием от точки $\tilde{y}_i$ до $\tilde{y}_j$ будем понимать величину

$$\rho(\tilde{y}_i, \tilde{y}_j) = A \max_{1 \leqslant r \leqslant m} \frac{(\tilde{y}_j^r \dot{-} \tilde{y}_i^r)}{a_r}$$

(в прежних обозначениях равную c_{ij}). В условиях исходной задачи это означает прибыль, получаемую при перемещении транспортного средства из пункта i в пункт j. Расширим введенное понятие расстояния на все точки пространства R^m. Пусть $Ш = \{y \in R^m \mid \rho(0, y) \leqslant 1\}$ — шар радиуса один, соответствующий введенному расстоянию.

Замечание. Шар $Ш$ есть пересечение полупространств: $y^r \leqslant A/a^r$, $1 \leqslant r \leqslant m$. Таким образом, $Ш$ является выпуклым полиэдром с m гипергранями

$$\Gamma_r = \{(y^1, \dots, y^m) \in Ш \mid y^r = A/a_r\}, \quad 1 \leqslant r \leqslant m.$$

В работе [10] предложен алгоритм для решения задачи коммивояжера на максимум в R^m с временной сложностью $O(n^3)$ и оценкой относительной погрешности $\varepsilon_n = (\lfloor s/2 \rfloor - 1)/n$, если единичный шар, соответствующий функции попарных расстояний между точками, является выпуклым многогранником с числом гиперграней $s \geqslant m + 1$. Поскольку $Ш$ не является многогранником, то после применения алгоритма из [10] к матрице C нельзя гарантировать оценку точности найденного решения, аналогичную ε_n.

Пусть K_r — наименьший конус с вершиной в точке $\mathbf{0}$, содержащий все точки гиперграни Γ_r, $1 \leqslant r \leqslant m$, а K_{m+1} — отрицательный ортант.

Согласно замечанию относительно $Ш$ набор конусов $\{K_1, \dots, K_{m+1}\}$ покрывает пространство R^m. Для полиэдра $Ш$ справедливо следующее утверждение, аналогичное утверждению для многогранников [10].

Утверждение 5. *Для любых четырех точек y_1, y_2, y_3, y_4 из R^m таких, что $(y_2 - y_1) \in K_r$, $(y_4 - y_3) \in K_r$ для некоторого r, $1 \leqslant r \leqslant m+1$, справедливо неравенство*

$$\rho(y_1, y_2) + \rho(y_3, y_4) \leqslant \rho(y_1, y_4) + \rho(y_3, y_2).$$

Доказательство. При $r = m+1$ неравенство выполняется, поскольку левая часть равна 0. При $r = 1, \dots, m$ доказательство аналогично случаю, когда $Ш$ — многогранник (см. [10]). Утверждение 5 доказано.

С учетом утверждений 4, 5 и работы [10] в случае $X = R_+$ справедливы следующие факты.

Утверждение 6. *Задача коммивояжера на максимум с матрицей C может быть решена за время $O(n^3)$ с оценкой относительной погрешности, не превосходящей $\varepsilon_n = (\lfloor (m+1)/2 \rfloor - 1)/n$.*

Теорема 2. *Задача 1 решается за время $O(mn^2 + n^3)$ с оценкой относительной погрешности $\varepsilon_n = (\lfloor (m+1)/2 \rfloor - 1)/n$.*

Следствие 1. *Задача 1 при $m = 2$ полиномиально разрешима.*

Следствие 2. *Алгоритм $\widetilde{\mathscr{A}_1}$ позволяет находить асимптотически точное решение задачи 1 в случае, когда $m = n/\psi_n$, где $\psi_n \to \infty$ при $n \to \infty$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гимади Э. Х.** Задача коммивояжера на максимум: условия асимптотической точности алгоритма «Иди в самый удаленный город» // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. Вып. 29. С. 11–15.
2. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И.** Экстремальные задачи принятия решений. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1982.
3. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Перепелица В. А.** Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1975. Вып. 31. С. 35–42.
4. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Сердюков А. И.** Алгоритм для приближенного решения задачи коммивояжера и его вероятностный анализ // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 2. С. 8–17.
5. **Гимади Э. Х., Максишко Н. К.** Обоснование условий асимптотической точности приближенного алгоритма решения задачи коммивояжера на максимум в случае дискретного распределения // Управляемые системы: Сб.

науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. Вып. 30. С. 26–29.

6. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
7. **Косточка А. В., Сердюков А. И.** Полиномиальные алгоритмы с оценками 3/4 и 5/6 для задачи коммивояжера на максимум // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. Вып. 26. С. 55–59.
8. **Сердюков А. И.** Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. Вып. 27. С. 79–87.
9. **Сердюков А. И.** Полиномиальные алгоритмы с оценками точностей решений для одного класса задач коммивояжера на максимум // Комбинаторно-алгебраические методы в дискретной оптимизации. Нижн. Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 1991. С. 107–114.
10. **Сердюков А. И.** Задача коммивояжера на максимум в конечномерных вещественных пространствах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2., № 1. С. 50–56.
11. **The Traveling Salesman Problem.** A Guided Tour of Combinatorial Optimization. Chichester: Wiley, 1985.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
9 апреля 1998 г.