ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 1998. Серия 2. Том 5, № 2, 20–33

УДК 519.87+519.854

АЛГОРИТМЫ И СЛОЖНОСТЬ РЕШЕНИЯ ДВУХУРОВНЕВЫХ ЗАДАЧ СТАНДАРТИЗАЦИИ С КОРРЕКЦИЕЙ ДОХОДА*)

Л. Е. Горбачевская

Рассмотрены задачи двухуровневого программирования, обобщающие простейшую задачу размещения. Показана их сводимость к задаче выбора подмножества строк в паре матриц. Поставленные задачи изучаются в условиях квазивыпуклости или связности матриц затрат. Показывается, что при одних комбинациях этих условий исходные задачи эффективно разрешимы, при других же остаются NP-трудными. Показана NP-трудность задачи с парой связных матриц и указаны дополнительные условия, при которых задача решается эффективно.

Введение

В последние годы все большее внимание исследователей привлекают задачи двухуровневого программирования [9]. Они возникают в тех ситуациях, когда лицо, принимающее решение, учитывает поведение другой стороны, действующей по своему критерию. Так, например, в [5, 6] исследуется проблема выбора номенклатуры изделий. Производитель изделий стремится получить максимум прибыли от их реализации. Величина прибыли зависит от предпочтений потребителей продукции. Они выбирают те изделия из предлагаемых производителем, которые минимизируют закупочно-эксплуатационные затраты. Неоднозначность оптимального потребительского выбора приводит к необходимости рассмотрения двух постановок: «кооперативной» и «антикооперативной», которые соответствуют оптимистической и пессимистической оценкам поведения потребителей по отношению к производителю [5].

В настоящей работе продолжается направление работ [5, 6]. Исследуется ситуация, когда производитель выбирает не только виды изделий, но и их цены. Рассматриваются кооперативная и антикооперативная постановки. Показана их сводимость к задаче выбора подмножества

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01582).

строк в паре матриц. Поставленные задачи изучаются в условиях квазивыпуклости или связности матриц затрат. Показывается, что при одних комбинациях этих условий исходные задачи эффективно разрешимы, при других же остаются NP-трудными. Показана NP-трудность задачи с парой связных матриц и указаны дополнительные условия, при которых эта задача решается эффективно.

1. Постановка задач

Введем следующие обозначения:

$I = \{1, \dots, n\}$ — множество видов изделий;

$J = \{1, \dots, m\}$ — множество потребителей;

c_i — затраты производителя на разработку и подготовку производства i-го вида изделий;

g_{ij} — доход производителя от реализации i-го вида изделий j-му потребителю;

d_{ij} — закупочно-эксплуатационные затраты на i-й вид изделий j-го потребителя;

z_i — переменные выбора производителем i-го вида изделий ($z_i \in \{0,1\}$, $z = (z_i)$);

x_{ij} — переменные выбора j-м потребителем i-го вида изделий ($x_{ij} \in \{0,1\}$, $x = (x_{ij})$);

u_{ij} — переменные, определяющие ценовую уступку производителя j-му потребителю относительно i-го вида изделий.

Пусть $B = \{0,1\}^n \setminus \{0\}$ и $U = \{(u_{ij}) \mid u_{ij} \geqslant 0\}$.

Кооперативная двухуровневая задача с коррекцией дохода состоит в нахождении

$$\max_{z \in B} \sup_{u \in U} \left\{ \max_{x \in R(z,u)} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (g_{ij} - u_{ij}) x_{ij} - \sum_{i \in I} c_i z_i \right\}, \qquad (1)$$

где $R(z,u)$ — множество решений задачи минимизации суммарных затрат потребителей

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (d_{ij} - u_{ij}) x_{ij}$$

при условиях

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad x_{ij} \leqslant z_i, \quad x_{ij} \in \{0,1\},\ i \in I,\ j \in J.$$

Обозначим через $G(z,u)$ целевую функцию (1). Величина $G(z,u)$ — прибыль производителя (доходная часть минус затраты), которую он стремится максимизировать выбором перечня выпускаемых изделий z и значений корректирующих переменных u. Потребители выбирают те изделия из предлагаемого перечня, которые минимизируют закупочно-эксплуатационные затраты. Выбор потребителей, вообще говоря, не однозначен. Прибыль $G(z,u)$ соответствует оптимистической оценке их поведения по отношению к производителю.

Антикооперативная задача состоит в нахождении

$$\max_{z\in B}\sup_{u\in U}\Big\{\min_{x\in R(z,u)}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(g_{ij}-u_{ij})x_{ij}-\sum_{i\in I}c_iz_i\Big\}, \tag{2}$$

где множество $R(z,u)$ то же, что и выше.

Обозначим через $S(z,u)$ целевую функцию (2). Величина $S(z,u)$ — гарантированная прибыль производителя. Она соответствует пессимистической оценке поведения потребителей.

Пусть $z\in B$, $u\in U$. Введем обозначения

$$I(z)=\{i\in I\mid z_i=1\},$$
$$B_j(z,u)=\Big\{i\in I(z)\mid d_{ij}-u_{ij}=\min_{l\in I(z)}\{d_{lj}-u_{lj}\}\Big\},\quad j\in J.$$

Ясно, что каждый потребитель $j\in J$, решая свою оптимизационную задачу, выбирает изделие из множества $B_j(z,u)$. Следовательно, целевые функции (1) и (2) можно записать следующим образом:

$$G(z,u)=\sum_{j\in J}\max_{i\in B_j(z,u)}\{g_{ij}-u_{ij}\}-\sum_{i\in I}c_iz_i,$$
$$S(z,u)=\sum_{j\in J}\min_{i\in B_j(z,u)}\{g_{ij}-u_{ij}\}-\sum_{i\in I}c_iz_i.$$

Абстрагируясь от содержательной интерпретации, параметры c_i, g_{ij}, d_{ij} будем считать произвольными числами.

2. Сводимость к задаче с парой матриц

Пару векторов (z^*,u^*) будем называть *оптимальным* решением задачи (1), если $G(z^*,u^*)=\max_{z\in B}\sup_{u\in U}G(z,u)$.

Вектор z^* будем называть *частичным оптимальным* решением задачи (1), если $\sup_{u\in U}G(z^*,u)=\max_{z\in B}\sup_{u\in U}G(z,u)$.

Аналогично определяем оптимальное и частичное оптимальное решения задачи (2).

Покажем, что задачи (1) и (2) эквивалентны задаче выбора подмножества строк в паре матриц [4], т. е. множество её оптимальных решений совпадает с множеством частичных оптимальных решений задач (1) и (2).

Теорема 1. *Задачи* (1) *и* (2) *эквивалентны следующей: найти*

$$\min_{z\in B}\Big\{\sum_{i\in I}c_iz_i+\sum_{j\in J}\min_{i\in I(z)}h_{ij}+\sum_{j\in J}\max_{i\in I(z)}f_{ij}\Big\}, \tag{3}$$

где $h_{ij}=d_{ij}-g_{ij}$, $f_{ij}=-d_{ij}$.

Справедливость теоремы следует из двух лемм.

Лемма 1. *При любом* $z\in B$ *выполняется равенство*

$$\sup_{u\in U}G(z,u)=\sum_{j\in J}\max_{i\in I(z)}\{g_{ij}-d_{ij}\}+\sum_{j\in J}\min_{i\in I(z)}d_{ij}-\sum_{i\in I}c_iz_i.$$

Доказательство. Введем обозначения $d_j(u)=\min\limits_{i\in I(z)}\{d_{ij}-u_{ij}\}$, $d_j=\min\limits_{i\in I(z)}d_{ij}$ и $F(z)=\sum\limits_{j\in J}\max\limits_{i\in I(z)}\{g_{ij}-d_{ij}\}+\sum\limits_{j\in J}d_j$. Очевидно, что $d_j(u)\leqslant d_j$ и $u_{ij}=d_{ij}-d_j(u)$ при $i\in B_j(z,u)$. С учетом этих соотношений имеем

$$\sum_{j\in J}\max_{i\in B_j(z,u)}\{g_{ij}-u_{ij}\}=\sum_{j\in J}\max_{i\in B_j(z,u)}\{g_{ij}-d_{ij}+d_j(u)\}$$
$$=\sum_{j\in J}\max_{i\in B_j(z,u)}\{g_{ij}-d_{ij}\}+\sum_{j\in J}d_j(u)\leqslant\sum_{j\in J}\max_{i\in I(z)}\{g_{ij}-d_{ij}\}+\sum_{j\in J}d_j.$$

Последняя оценка достигается при $v=(v_{ij})\in U$ с компонентами $v_{ij}=d_{ij}-d_j$ и $G(z,v)=F(z)-\sum\limits_{i\in I}c_iz_i$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При любом* $z\in B$ *верно равенство*

$$\sup_{u\in U}S(z,u)=\sup_{u\in U}G(z,u).$$

Доказательство. Так как $S(z,u)\leqslant G(z,u)$, то

$$\sup_{u\in U}S(z,u)\leqslant\sup_{u\in U}G(z,u)=F(z)-\sum_{i\in I}c_iz_i.$$

Пусть индексы k_j таковы, что $g_{k_jj}-d_{k_jj}=\max\limits_{i\in I(z)}\{g_{ij}-d_{ij}\}$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и рассмотрим $v=(v_{ij})\in U$ с компонентами $v_{k_jj}=d_{k_jj}-d_j+\varepsilon$ и $v_{ij}=d_{ij}-d_j$ при $i\neq k_j$. Нетрудно видеть, что

$$\sup_{u\in U}S(z,u)\geqslant S(z,v)=F(z)-\sum_{i\in I}c_iz_i-\varepsilon|J|.$$

В силу произвольности ε получаем требуемое равенство. Лемма 2 доказана.

Таким образом, допуская ценовую уступку производителя потребителям, приходим к тому, что задачи поиска оптимистической и пессимистической оценок максимальной прибыли производителя эквивалентны.

Если все d_{ij} равны 0, то задачи (1) и (2) эквивалентны простейшей задаче размещения. Следовательно, они являются NP-трудными.

Отметим также, что если положить $U = \{0\}$ и рассмотреть задачи (1) и (2), то они не будут эквивалентными. Так, при $d_{ij} = 0$ и $c_i \geqslant 0$ задача (1) преобразуется в простейшую задачу размещения. Задача (2) в этом случае имеет оптимальное решение, включающее только одно изделие.

Из доказательства леммы 1 следует, что если z^* — оптимальное решение задачи (3) и $u_{ij} = d_{ij} - \min\limits_{i \in I(z^*)} d_{ij}$, то пара (z^*, u) является оптимальным решением задачи (1). Вектор z^* является также частичным оптимальным решением задачи (2), хотя она может и не иметь оптимального решения.

Лемма 3. *Если* (z^*, u^*) *— оптимальное решение задачи* (2), *то пара* $(z^*, 0)$ *является оптимальным решением задач* (1) *и* (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что $S(z^*, u^*) = G(z^*, u^*)$ и, следовательно, выполняются равенства

$$\min_{i \in B_j(z^*, u^*)} \{g_{ij} - u^*_{ij}\} = \max_{i \in B_j(z^*, u^*)} \{g_{ij} - u^*_{ij}\}, \ j \in J.$$

В силу леммы 2 пара (z^*, u^*) является также оптимальным решением задачи (1). Из доказательства леммы 1 следует, что верны равенства

$$\max_{i \in B_j(z^*, u^*)} \{g_{ij} - u^*_{ij}\} = \max_{i \in I(z^*)} \{g_{ij} - d_{ij} + d_j\}, \ j \in J,$$

где $d_j = \min\limits_{i \in I(z^*)} d_{ij}$. Следовательно,

$$\min_{i \in B_j(z^*, u^*)} \{g_{ij} - u^*_{ij}\} = \max_{i \in I(z^*)} \{g_{ij} - d_{ij} + d_j\}, \ j \in J.$$

Поэтому $d_{ij} - u^*_{ij} \geqslant d_j$ при всех $i \in B_j(z^*, u^*)$. С другой стороны, $d_{ij} - u^*_{ij} \leqslant d_j$ для любого $i \in B_j(z^*, u^*)$. Следовательно, $d_{ij} - u^*_{ij} = d_j$ при любом $i \in B_j(z^*, u^*)$. Таким образом, если $d_{ij} = d_j$, то $i \in B_j(z^*, u^*)$. Поэтому $B_j(z^*, 0) \subseteq B_j(z^*, u^*)$ и

$$\min_{i \in B_j(z^*, 0)} g_{ij} \geqslant \min_{i \in B_j(z^*, u^*)} \{g_{ij} - u^*_{ij}\}$$
$$= \max_{i \in I(z^*)} \{g_{ij} - d_{ij} + d_j\} \geqslant \max_{i \in B_j(z^*, 0)} g_{ij}, \ j \in J.$$

Следовательно, $\min\limits_{i \in B_j(z^*, u^*)} \{g_{ij} - u^*_{ij}\} = \min\limits_{i \in B_j(z^*, 0)} g_{ij}$, т. е. $S(z^*, u^*) = S(z^*, 0)$. Лемма 3 доказана.

3. Свойство квазивыпуклости

Матрица (a_{ij}) называется *квазивыпуклой* (*квазивогнутой*), если элементы каждого столбца $j \in J$ удовлетворяют неравенству $a_{kj} \leqslant \max\{a_{ij}, a_{lj}\}$ ($a_{kj} \geqslant \min\{a_{ij}, a_{lj}\}$) при всех $i < k < l$.

Задача (3) решается эффективно, если как матрица (h_{ij}), так и матрица (f_{ij}) обладает свойством квазивыпуклости либо квазивогнутости [2, 3]. Попытка рассмотреть, что происходит, если этими свойствами обладают матрицы (d_{ij}) и (g_{ij}), привела к следующему результату.

Теорема 2. *Если матрица (d_{ij}) квазивыпуклая, а матрица (g_{ij}) квазивогнутая, то задача (3) является NP-трудной.*

Доказательство. Рассмотрим задачу минимизации полинома

$$P(z) = \sum_{i\in I} a_i z_i + \sum_{r<k} b_{rk}(1 - z_r)(1 - z_k) \tag{4}$$

на множестве B, где $b_{rk} \geqslant 0$, $1 \leqslant r < k \leqslant n$. Покажем, что эта NP-трудная задача [8] сводится к (3).

Каждой паре (r, k) такой, что $b_{rk} > 0$, поставим в соответствие номер j и вектор-столбцы (d_{ij}), (g_{ij}), $i \in I$, полагая

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = r; \\ b_{rk}, & \text{если } i \neq r, \end{cases} \qquad g_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = k; \\ -b_{rk}, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Ясно, что при любом $j \in J$

$$\min_{i\in I(z)}\{d_{ij} - g_{ij}\} = b_{rk} + b_{rk}(1 - z_r)(1 - z_k),$$
$$\max_{i\in I(z)}\{-d_{ij}\} = -b_{rk}(1 - z_r).$$

Полагая $c_i = a_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} b_{ik}$ и обозначая через J совокупность номеров j, получаем

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{i\in I}\left(c_i + \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}\right) z_i + \sum_{r<k} b_{rk}(1 - z_r)(1 - z_k) \\ &= \sum_{i\in I} c_i z_i + \sum_{r<k}(b_{rk} + b_{rk}(1 - z_r)(1 - z_k)) - \sum_{r<k} b_{rk}(1 - z_r) \\ &= \sum_{i\in I} c_i z_i + \sum_{j\in J} \min_{i\in I(z)}\{d_{ij} - g_{ij}\} + \sum_{j\in J} \max_{i\in I(z)}\{-d_{ij}\}. \end{aligned}$$

Таким образом, на множестве B значения целевой функции (3) и полинома (4) совпадают. Осталось отметить, что построенные матрицы (d_{ij}) и (g_{ij}) обладают указанными в формулировке теоремы свойствами. Теорема 2 доказана.

4. Свойство связности

Матрица (a_{ij}) называется *связной*, если для любых i, $k \in I$, при монотонном изменении $j \in J$ разность $a_{ij} - a_{kj}$ меняет знак не более одного раза.

Частный случай задачи (3), когда матрица (f_{ij}) нулевая, является простейшей задачей размещения. Она решается эффективно, если матрица (h_{ij}) связная [4]. Оказывается, что одного свойства связности матриц (h_{ij}) и (f_{ij}) недостаточно для эффективной разрешимости задачи (3).

Теорема 3. *Если матрицы (h_{ij}) и (f_{ij}) связные, то задача (3) является* NP*-трудной.*

Доказательство теоремы 3 опирается на две следующие леммы.

Рассмотрим произвольную (0,1)-матрицу (a_{ij}) и определим множества $A_i = \{j \in J \mid a_{ij} = 1\}$, $i \in I$.

Лемма 4. *Пусть $(0,1)$-матрица (a_{ij}) удовлетворяет условию: если $A_i \cap A_k \neq \varnothing$ при $i \neq k$, то либо $|A_i| = 1$, либо $|A_k| = 1$. Тогда столбцы матрицы (a_{ij}) можно переставить так, что полученная матрица будет связной.*

Доказательство. Положим $I_0 = \{i \in I \mid |A_i| \geqslant 2\}$. Если $I_0 = \varnothing$, то исходная матрица (a_{ij}), очевидно, является связной. Пусть $I_0 \neq \varnothing$. Из условия леммы следует, что если $i, k \in I_0$ и $i \neq k$, то $A_i \cap A_k = \varnothing$. Поэтому столбцы матрицы (a_{ij}) можно переставить так, что в каждой строке $i \in I_0$ единицы идут подряд. Нетрудно видеть, что матрица, полученная в результате этой перестановки, будет связной. Лемма 4 доказана.

Рассмотрим полином вида

$$P(z) = \sum_{j \in J} \prod_{i \in \alpha_j} (1 - z_i),$$

где $\alpha_j \subset I$ и $|\alpha_j| = 2$.

Матрица (a_{ij}) называется *характеристической* матрицей полинома $P(z)$, если

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i \in \alpha_j, \\ 0 & \text{при } i \notin \alpha_j. \end{cases}$$

Обозначим через Ω множество полиномов $P(z)$ с характеристическими матрицами, удовлетворяющими условию леммы 4.

Лемма 5. *Задача нахождения величины*

$$\min_{z \in B} \Big\{ \sum_{i \in I} c_i z_i + P_1(z) - P_2(z) \Big\}, \tag{5}$$

где $c_i \in \{0, 1\}$ и $P_1(z)$, $P_2(z) \in \Omega$, является NP*-трудной.*

Доказательство. Покажем, что NP-трудная задача о минимальном вершинном покрытии кубического графа [7] сводится к задаче (5). Обозначим через $G = (V, E)$ произвольный граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Задача о минимальном вершинном покрытии графа G заключается в нахождении такого подмножества $V' \subseteq V$ минимальной мощности, что для любого ребра $\{u, v\} \in E$ по крайней мере одна из вершин u или v принадлежит V'.

В работе [1] показано, что эта задача сводится к следующей: найти минимум полинома

$$Q = \sum_{v \in V} x_v + \sum_{e=(v_1,v_2) \in \vec{E}} ((1 - x_{v_1})(1 - r_e) + (1 - x_{v_2}) r_e) \tag{6}$$

при ограничениях

$$x_v,\ r_e \in \{0, 1\}, \quad v \in V, \quad e \in \vec{E}.$$

Здесь через $\vec{E}$ обозначено множество дуг, полученных произвольной ориентацией ребер из E.

Пусть степени всех вершин графа G равны 3, т. е. граф G — кубический. Без ограничения общности считаем его связным. Выберем ориентацию ребер графа таким образом, чтобы для любой вершины $v \in V$ нашлась пара дуг $(u, v), (v, w) \in \vec{E}$. Это можно сделать, например, следующим образом. Рассмотрим остовное дерево $T = (V, E_1)$ графа G. В качестве корня дерева выберем одну из висячих вершин v_0 и ориентируем ребра из E_1 «от корня». Так как степени всех вершин равны 3, найдется ребро $\{u, v_0\} \in E \setminus E_1$. Ориентируем его от вершины u к v_0 и добавляем в множество E_1. Далее рассматриваем произвольную висячую вершину v. Для неё найдется ребро $\{v, w\} \in E \setminus E_1$. Ориентируем его от вершины v к w и добавляем в множество E_1. Если вершина w до этого была висячей, то далее рассматриваем именно её и ориентируем третье, еще неориентированное, ребро надлежащим образом. После того как рассмотрена последняя висячая вершина, остальные ребра ориентируем произвольно.

Обозначим через V_0 множество тех вершин графа, из которых исходят по две дуги. Раскрывая скобки в выражении (6) и приводя подобные члены, получаем

$$Q = |E| - |V_0| + \sum_{v \in V_0} (1 - x_v) + \sum_{e=(v_1,v_2) \in \vec{E}} (x_{v_1} r_e - x_{v_2} r_e).$$

Положим $I = V \cup \vec{E}$ и $J = \vec{E}$. Переменным x_v, r_e произвольным образом поставим в соответствие разности $1 - z_i$, $i \in I$. Нетрудно видеть, что полиномы

$$P_1(z) = \sum_{e=(v_1,v_2)\in\vec{E}} x_{v_1} r_e, \quad P_2(z) = \sum_{e=(v_1,v_2)\in\vec{E}} x_{v_2} r_e$$

принадлежат множеству Ω. Следовательно, задача о минимальном вершинном покрытии кубического графа сводится к задаче (5). Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 3. Покажем, что задача (5) сводится к задаче (3) со связными матрицами (h_{ij}) и (f_{ij}). Пусть

$$P_1(z) = \sum_{j\in J} \prod_{i\in\alpha_j} (1 - z_i), \quad P_2(z) = \sum_{j\in J} \prod_{i\in\beta_j} (1 - z_i).$$

Обозначим через (a_{ij}) и (b_{ij}) характеристические матрицы полиномов $P_1(z)$ и $P_2(z)$. Положим $d_{ij} = 1 - b_{ij}$, $g_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$. В соответствии с обозначениями теоремы 1 получаем $h_{ij} = 1 - a_{ij}$, $f_{ij} = b_{ij} - 1$. Нетрудно убедиться, что

$$\min_{i\in I(z)} h_{ij} = \prod_{i\in\alpha_j} (1 - z_i), \quad \max_{i\in I(z)} f_{ij} = -\prod_{i\in\beta_j} (1 - z_i).$$

В силу леммы 4 матрицы (a_{ij}) и (b_{ij}) можно считать связными. Следовательно, матрицы (h_{ij}) и (f_{ij}) также связные. По лемме 5 задача (5) является NP-трудной. Следовательно, задача (3) со связными матрицами (h_{ij}) и (f_{ij}) также NP-трудна. Теорема 3 доказана.

При некоторых дополнительных ограничениях к условиям теоремы 3 получим эффективно разрешимый случай задачи (3).

Введем следующие условия:

1) $c_i \geqslant 0$ при всех $i \in I$;

2) матрицы (h_{ij}) и (f_{ij}) связные;

3) $h_{ij} \neq h_{kj}$ и $f_{ij} \neq f_{kj}$ при всех j и $i \neq k$;

4) $h_{11} < h_{21} < \ldots < h_{n1}$ и $f_{11} > f_{21} > \ldots > f_{n1}$;

5) $|I| \leqslant |J|$ и для любого $i \in I$ найдется элемент $j \in J$ такой, что $f_{ij} = \max_{k\in I} f_{kj}$.

Теорема 4. *Если выполняются условия* 1)–5), *то задача* (3) *сводится к следующей: найти*

$$\min_{(i_k,j_k,t_k),s} \sum_{k=1}^{s} \left(c_{i_k} + \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} h_{i_k j} + \sum_{j=t_{k-1}+1}^{t_k} f_{i_k j} \right) \tag{7}$$

при ограничениях $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$, $0 = j_0 < j_1 < \ldots < j_s = m$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_s = m$, $f_{i_k t_k} > f_{i_{k+1} t_k}$, $f_{i_k t_k+1} < f_{i_{k+1} t_k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant s - 1$, $1 \leqslant s \leqslant n$.

Доказательство теоремы 4 опирается на несколько вспомогательных утверждений, которые формулируются ниже.

Областями использования изделия $i \in I(z)$ назовем множества

$$J_i(z) = \left\{j \in J \mid h_{ij} = \min_{k \in I(z)} h_{kj}\right\}, \quad T_i(z) = \left\{j \in J \mid f_{ij} = \max_{k \in I(z)} f_{kj}\right\}.$$

Они определяются однозначно в силу условия 3).

В силу условий 1) и 5) оптимальное решение задачи (3) можно искать среди тех векторов $z \in B$, для которых области использования каждого изделия $i \in I(z)$ непустые. Подмножество таких векторов обозначим через B'.

Область использования изделия $i \in I(z)$ называется *связной*, если она является целочисленным отрезком.

Лемма 6. *При любом векторе $z \in B'$ каждое изделие $i \in I(z)$ имеет связные области использования.*

Доказательство. Покажем связность множеств $J_i(z)$. Допустим, что найдутся три потребителя $j < k < l$ двух различных изделий $p, q \in I(z)$ такие, что $j, l \in J_p(z)$ и $k \in J_q(z)$. Это означает выполнение неравенств

$$h_{pj} - h_{qj} < 0, \quad h_{pk} - h_{qk} > 0, \quad h_{pl} - h_{ql} < 0.$$

Следовательно, разность $h_{ps} - h_{qs}$ изменяет знак по крайней мере дважды, когда индекс s пробегает множество J. Это противоречит условию связности матрицы (h_{ij}). Аналогично проверяется связность множеств $T_i(z)$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть $j \in J_i(z)$ и $k \in J_l(z)$. Если $j < k$ и $i \neq l$, то $i < l$.*

Доказательство. Из условий леммы следуют неравенства

$$h_{ij} - h_{lj} < 0, \quad h_{ik} - h_{lk} > 0.$$

В силу связности матрицы (h_{ij}) и условия 4) это возможно только при $i < l$, что и доказывает лемму 7.

Аналогично доказывается

Лемма 8. *Пусть $j \in T_i(z)$ и $k \in T_l(z)$. Если $j < k$ и $i \neq l$, то $i < l$.*

Пусть $I(z) = \{i_1, \ldots, i_s\}$, где $i_1 < \ldots < i_s$. Из лемм 5, 6 и 7 следует, что области использования изделий $i_k \in I(z)$ имеют вид

$$J_{i_k}(z) = [j_{k-1} + 1,\ j_k], \quad k = 1, \ldots, s, \tag{8}$$

$$0 = j_0 < j_1 < j_2 < \ldots < j_s = m,$$

$$T_{i_k}(z) = [t_{k-1} + 1,\ t_k], \quad k = 1, \ldots, s, \tag{9}$$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < j_s = m.$$

Нетрудно видеть, что на границе множеств $T_{i_k}(z)$ должны выполняться неравенства

$$f_{i_k t_k} > f_{i_{k+1} t_k}, \quad f_{i_k t_k+1} < f_{i_{k+1} t_k+1}, \quad k = 1, \ldots, s-1. \tag{10}$$

Лемма 9. *Пусть наборы* $\{i_1, \ldots, i_s\}$ *и* $\{t_1, \ldots, t_s\}$ *таковы, что*

$$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n, \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_s = m,$$

и выполняются неравенства (10). *Тогда*

$$f_{i_k j} = \max\{f_{i_p j} \mid p = 1, \ldots, s\}, \text{ где } j \in [t_{k-1} + 1,\ t_k],\ k = 1, \ldots, s.$$

Доказательство. Неравенства (10) означают, что разность $f_{i_k j} - f_{i_{k+1} j}$, рассматриваемая как функция аргумента $j \in J$, меняет знак при переходе от $j = t_k$ к $j = t_k + 1$. Из этого факта, связности матрицы (f_{ij}) и условия 4) следует, что равенство

$$f_{i_k j} = \max\{f_{i_p j} \mid p = 1, \ldots, s\}$$

справедливо только при значениях $j \in [t_{k-1} + 1,\ t_k]$. Лемма 9 доказана.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим произвольный вектор $z \in B'$. Пусть $I(z) = \{i_1, \ldots, i_s\}$. В силу лемм 6, 7 и 8 области использования изделий i_k имеют вид (8), (9). Следовательно, в задаче (7) наборы $\{i_1, \ldots, i_s\}$, $\{j_1, \ldots, j_s\}$ и $\{t_1, \ldots, t_s\}$ являются допустимыми. Значение целевой функции (7) на этих наборах совпадает со значением целевой функции задачи (3).

Пусть наборы $\{i_1, \ldots, i_s\}$, $\{j_1, \ldots, j_s\}$, $\{t_1, \ldots, t_s\}$ являются оптимальными решениями задачи (7). Рассмотрим вектор z с компонентами $z_i = 1$, если $i \in \{i_1, \ldots, i_s\}$, и $z_i = 0$ для остальных индексов i. Из оптимальности наборов следует, что $z \in B'$ и $J_{i_k}(z) = [j_{k-1} + 1,\ j_k]$, $k = 1, \ldots, s$. В силу леммы 9 множества $T_{i_k}(z)$ имеют вид (9). Как и выше, значения функционалов (3) и (7) совпадают. Следовательно, задача (3) сводится к задаче (7). Теорема 4 доказана.

Задача (7) эффективно решается методом динамического программирования. Определим функцию

$$B(p,q,r) = \min_{(i_k, j_k, t_k), s} \sum_{k=1}^{s} \left(c_{i_k} + \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} h_{i_k j} + \sum_{j=t_{k-1}+1}^{t_k} f_{i_k j} \right),$$

где минимум берется при ограничениях

$$\begin{gathered} 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s < i_{s+1} = p + 1, \\ 0 = j_0 < j_1 < \ldots < j_s = q, \\ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_s = r, \\ f_{i_k t_k} > f_{i_{k+1} t_k}, \quad f_{i_k t_k+1} < f_{i_{k+1} t_k+1}, \\ 1 \leqslant k \leqslant s, \quad 1 \leqslant s \leqslant p. \end{gathered}$$

Здесь $f_{i,m+1} = i$, $f_{n+1,j} = \min\limits_{i \in I} f_{ij} - 1$ и $f_{n+1,m+1} = n+1$. Параметры p, q, r рассматриваются в пределах $1 \leqslant p \leqslant n$, $1 \leqslant q \leqslant m$, $1 \leqslant r \leqslant m$.

Очевидно, что величина $B(n,m,m)$ равна минимуму (7).

При всех $p \geqslant 0$ положим $B(p,0,0) = 0$, $B(p,q,0) = \infty$, если $q \geqslant 1$, и $B(p,0,r) = \infty$, если $r \geqslant 1$. Величины $B(p,q,r)$ удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$B(p,q,r) = \min_{i,j,t} \left\{ B(i-1,j,t) + c_i + \sum_{l=j+1}^{q} h_{il} + \sum_{l=t+1}^{r} f_{il} \right\},$$

где $1 \leqslant i \leqslant p$, $0 \leqslant j \leqslant q-1$, $0 \leqslant t \leqslant r-1$ и $f_{ir} > f_{p+1,r}$, $f_{i,r+1} < f_{p+1,r+1}$.

Временная сложность решения задачи (7) не превосходит $O(n^2 m^5)$, а объем памяти — $O(nm^2)$.

5. Комбинация связности и квазивыпуклости

Рассмотрим сложность решения задачи (3) при сочетаниях свойств связности и квазивыпуклости.

Лемма 10. *Пусть (w_j) — произвольный вектор, (a_{ij}) — связная матрица и $b_{ij} = \min\{a_{ij}, w_j\}$. Тогда матрица (b_{ij}) является связной.*

Справедливость леммы следует из того факта, что разность $b_{ij} - b_{kj}$ либо имеет тот же знак, что и разность $a_{ij} - a_{kj}$, либо равна нулю.

Теорема 5. *Если матрица (h_{ij}) связная, а матрица (f_{ij}) квазивыпуклая, то задача (3) решается эффективно.*

Доказательство. Обозначим через $R(z)$ целевую функцию задачи (3). Задачу (3) разобьем на две подзадачи. Первая подзадача: найти минимум функции $R(z)$ на множестве векторов $z \in B$, у которых одна или две компоненты равны 1. Решение этой подзадачи можно получить полным перебором всех указанных векторов, что требует $O(n^2 m)$ арифметических операций. Вторая подзадача: найти минимум функции $R(z)$ на множестве векторов $z \in B$, имеющих не менее трех единичных компонент. Ее решение будем искать, разбивая допустимое множество следующим образом.

Пусть $u, v \in I$ и $2 \leqslant u \leqslant v \leqslant n-1$. Обозначим через B_{uv} подмножество векторов $z \in B$ таких, что $z_i = 0$, если $i \in [1, u-2] \cup [v+2, n]$, $z_{u-1} = z_{v+1} = 1$ и вектор $z' = (z_u, \ldots, z_v)$ не нулевой. С учетом квазивыпуклости матрицы (f_{ij}) функция $R(z)$, $z \in B_{uv}$, может быть записана в виде

$$R(z) = c_{u-1} + c_{v+1} + \sum_{j \in J} \max\{f_{(u-1)j}, f_{(v+1)j}\} + \sum_{i \in [u,v]} c_i z_i + \sum_{j \in J} \min_{i \in I(z')} c_{ij},$$

где $I(z') = \{i \in [u,v] \mid z_i = 1\}$ и $c_{ij} = \min\{h_{(u-1)j}, h_{(v+1)j}, h_{ij}\}$. Таким образом, нахождение $\min\limits_{z \in B_{uv}} R(z)$ сводится к простейшей задаче размещения с множеством пунктов $[u,v]$ и матрицей затрат (c_{ij}), связной в силу леммы 10. Известно [4], что эта задача решается методом динамического программирования с временной сложностью $O((v-u)m^2)$. Следовательно, задачу (3) можно решить с временной сложностью $O(n^3m^2)$. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Если матрица (h_{ij}) связная, а матрица (f_{ij}) квазивогнутая, то задача* (3) *является* NP-*трудной.*

Доказательство. Следуя доказательству леммы 5, покажем, что NP-трудная задача о минимальном вершинном покрытии кубического графа $G = (V, E)$ сводится к задаче (5), в которой характеристическая матрица полинома $P_2(z)$ является квазивогнутой. Ориентируем граф так, как это предложено в доказательстве леммы 5. Положим $I = V \cup \vec{E}$ и $J = \vec{E}$. Каждая вершина графа является концом одной или двух дуг. Поэтому переменным x_v и r_e можно поставить в соответствие разности $1 - z_i$ так, что

$$P_2(z) = \sum_{i=1}^{|I|-1} t_i(1-z_i)(1-z_{i+1}),$$

где $t_i \in \{0,1\}$ и число единичных коэффициентов равно $|\vec{E}|$. Нетрудно видеть, что характеристическая матрица этого полинома является квазивогнутой.

По лемме 4 характеристическую матрицу полинома $P_1(z)$ можно считать связной. Повторив рассуждения, проведенные в доказательстве теоремы 3, получим, что задача о минимальном вершинном покрытии кубического графа сводится к задаче (3) со связной матрицей (h_{ij}) и квазивогнутой матрицей (f_{ij}). Теорема 6 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агеев А. А., Береснев В. Л.** Алгоритмы минимизации для некоторых классов полиномов от булевых переменных // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Наука, 1988. С. 5–17. (Тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 10).
2. **Белинская И. Г.** Об одном классе полиномов от булевых переменных // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1981. Вып. 21. С. 6–12.
3. **Береснев В. Л.** Алгоритмы минимизации полиномов от булевых переменных // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1979. Вып. 36. С. 225–246.

4. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
5. **Горбачевская Л. Е.** К двухуровневой экстремальной задаче выбора номенклатуры изделий. Новосибирск, 1998. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 48).
6. **Горбачевская Л. Е., Дементьев В. Т., Шамардин Ю. В.** Двухуровневая экстремальная задача выбора номенклатуры изделий. Новосибирск, 1997. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 41).
7. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
8. **Трубин В. А.** Универсальность одного класса квадратичных целочисленных задач // Кибернетика. 1977. № 2. С. 147.
9. **Vicente L. N., Calamai P. H.** Bilevel and multilevel programming: a bibliography review // J. Global Optim. 1994. V. 5, N 3. P. 291–306.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: orlab@math.nsc.ru

Статья поступила
17 августа 1998 г.