ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 1999. Серия 1. Том 6, № 1, 19–43

УДК 519.716

A-КЛАССИФИКАЦИЯ ИДЕМПОТЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ*)

С. С. Марченков

A-замыкание на множестве функций многозначной логики определяется как замыкание относительно операций суперпозиции и перехода к двойственным функциям для подстановок из знакопеременной группы. С помощью оператора A-замыкания определяется A-классификация функций многозначной логики. Класс I_k идемпотентных функций при $k \geqslant 5$ является одним из двух, а при $k = 4$ — одним из четырех A-предполных классов в P_k. На множестве E_k определяется 12 типов стандартных отношений, называемых основными, и доказывается, что любой A-замкнутый класс функций из I_k можно задать подходящим набором основных отношений.

Пусть P_k есть множество всех функций k-значной логики [23]. Одной из основных проблем в теории функций многозначной логики является проблема построения эффективных классификаций множеств P_k, базирующихся на операции суперпозиции. Известно [25], что при $k \geqslant 3$ классификация множества P_k, основанная на одной лишь операции суперпозиции, является континуальной. В связи с этим трудно ожидать сколько-нибудь подробных описаний данной классификации. Поэтому дальнейшие продвижения в решении классификационных проблем связывают либо с расширением (обобщением) операции суперпозиции, либо с добавлением к операции суперпозиции новых операций. Предполагается, что расширение операции суперпозиции или добавление новых операций должно привести к вполне обозримым (конечным или счетным) классификациям, напоминающим, например, хорошо известную классификацию множества P_2, выполненную Постом [27, 28, 24]. В принципе выбор новых операций не ограничен: здесь могут быть алгебраические, логические, программистские и иные операции. Однако поскольку в теории функций многозначной логики операция суперпозиции представляется центральной, дополнительные операции в наибольшей степени

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00089).

должны соответствовать задачам и методам изучения функциональных систем P_k с операцией суперпозиции.

В конце 70-х годов в теории функций многозначной логики и в универсальной алгебре возникла идея классифицировать множества P_k относительно операции суперпозиции вместе с операциями перехода к двойственным (сопряженным) функциям для подстановок из фиксированной группы. Сначала эта идея была реализована для функций, которые инвариантны относительно операций взятия двойственных функций, т. е. для функций, самодвойственных относительно всех подстановок из заданной группы. Прежде всего, были рассмотрены полные симметрические группы $\mathbf{S}_k$ подстановок на множестве E_k. Было доказано [2–4], что при любом k, $k \geqslant 3$, число замкнутых (относительно операции суперпозиции) классов в P_k, состоящих из функций, которые самодвойственны относительно любых подстановок группы $\mathbf{S}_k$, конечно и зависит от k линейным образом. Каждый из этих замкнутых классов имеет вполне эффективное описание, а также конечный базис по суперпозиции. Аналогичная задача была решена при любом k, $k \geqslant 4$, для знакопеременной подгруппы $\mathbf{A}_k$ группы $\mathbf{S}_k$ [5, 7]. (При $k = 3$ ситуация принципиально иная: число замкнутых классов в P_3, которые состоят из функций, самодвойственных относительно любых подстановок группы $\mathbf{A}_3$, континуально [6].)

Результаты из [2–5, 7] составили ядро, вокруг которого впоследствии были определены [17–19] конечные классификации множеств P_k, основанные на операции суперпозиции и операциях перехода к двойственным функциям для подстановок группы $\mathbf{S}_k$ (S-классификации). Отметим, что в работах [2, 4, 7, 17, 18] все доказательства проводились традиционным «функциональным» образом: замкнутый класс — конечный базис — предполные классы.

Совершенно иной подход в решении проблем классификации открывает применение теории Галуа для алгебр Поста [1]. Суть его состоит в том, что вместо классов функций, замкнутых относительно операции суперпозиции, можно двойственным образом рассматривать классы отношений, замкнутые относительно некоторых логических операций. При этом отношения можно трактовать как определяющие свойства замкнутых классов функций. В [9, 10, 14] в терминах отношений и операций над ними выполнена бóльшая часть построения S-классификации функций многозначной логики.

В [20, 21] замечено, что основное свойство S-классификаций — конечность числа замкнутых классов — сохраняется, если вместо группы $\mathbf{S}_k$ взять подгруппу G с большой степенью транзитивности. Наибольшей (как по числу элементов, так и по степени транзитивности)

из собственных подгрупп группы $\mathbf{S}_k$ является знакопеременная группа $\mathbf{A}_k$. Соответствующая классификация множеств P_k названа в [13] A-классификацией. Наличие двух полных альтернативных версий построения S-классификации и близость группы $\mathbf{A}_k$ к группе $\mathbf{S}_k$ позволили высказать предположение, что так же, как для S-классификации, все построения и доказательства по A-классификации могут быть выполнены в полном объеме.

В работе [11] мы начали исследование по A-классификации, доказав, в частности, что при любом k, $k \geqslant 5$, единственными A-предполными классами в P_k являются класс I_k всех идемпотентных функций и класс SL_k Слупецкого (последний класс является предполным в P_k относительно операции суперпозиции). При $k = 4$ к перечисленным A-предполным в P_k классам добавляются еще два: класс K_4 функций, самодвойственных относительно подстановок из четверной группы Клейна, и класс L_4 квазилинейных функций (последний класс также является предполным в P_4 относительно операции суперпозиции). Кроме того, в [11] установлено, что единственными A-предполными классами в K_4 являются классы $K_4 \cap I_4$ и $K_4 \cap L_4$.

Таким образом, дальнейшее построение A-классификаций множеств P_k сводится к перечислению всех A-замкнутых классов, содержащихся в I_k, SL_k, а также в L_4. Мы разделили эту задачу на две части: более простую для классов SL_k, L_4 и существенно более сложную для классов I_k. Решение задачи для классов SL_k, L_4 содержится в [16]. Что касается классов I_k, то решение задачи для них использует теорию Галуа для алгебр Поста и в свою очередь разбито на три этапа.

На первом этапе [13] рассмотрены двуместные отношения, представляющие собой графики частичных инъективных функций. Выделено 9 типов стандартных отношений, названных основными, и доказано, что всякое двуместное отношение — график частичной инъективной функции — A-эквивалентно некоторому основному отношению. Все изложение в [13] проведено на функциональном языке, а основной результат представляет собой A-классификацию частичных инъективных функций.

На следующем этапе [15] завершена редукция произвольных двуместных отношений к основным отношениям. Установлено, что всякое множество двуместных отношений, содержащее отношение $x = 0$, A-эквивалентно подходящему набору основных отношений.

В настоящей работе, используя основной результат из [15], мы по индукции доказываем, что любое (не обязательно конечное) множество отношений, содержащее отношение $x = 0$, A-эквивалентно некоторому набору основных отношений. В терминах функций многозначной логики

это означает, что любой A-замкнутый класс функций, содержащийся в I_k, может быть задан с помощью конечного набора основных отношений. Поскольку при любом k, $k \geqslant 4$, число основных отношений на E_k конечно (10 типов при $k \geqslant 5$ и 12 типов при $k = 4$), мы получаем конечную эффективную классификацию множества I_k. Вместе с аналогичными классификациями множеств SL_k и L_4 это дает конечную эффективную классификацию всего множества P_k.

Отметим, что доказательство основного результата во многом подобно доказательству аналогичного результата из [14], установленного для S-классификации. Поэтому часть утверждений из [14] мы приводим без доказательства, но с необходимыми дополнениями, учитывающими специфику группы $\mathbf{A}_k$.

1. Основные понятия

Пусть k — натуральное число, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, P_k — множество всех конечноместных функций на E_k (множество всех функций k-значной логики). Через $\mathbf{S}_k$ обозначим полную симметрическую группу подстановок на E_k, а через $\mathbf{A}_k$ — знакопеременную подгруппу в $\mathbf{S}_k$ (подгруппу всех четных подстановок на E_k). *Селекторными* называем функции $e_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$, где $n \geqslant 1$ и $1 \leqslant i \leqslant n$. Если $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ и $\pi \in \mathbf{S}_k$, то функция

$$f^\pi(x_1, \dots, x_n) = \pi^{-1}(f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)))$$

называется *двойственной* к f относительно подстановки π.

На множестве P_k предполагается заданной операция суперпозиции [23]. Если $F \subseteq P_k$, то через $[F]$ обозначается замыкание множества F относительно операции суперпозиции. Множества вида $[F]$ называются замкнутыми классами. Замкнутый класс из P_k называем *A-замкнутым*, если вместе с любой функцией f ему принадлежат все функции вида f^π, где $\pi \in \mathbf{A}_k$. Через $[F]_A$ обозначаем A-замыкание множества функций F.

Наряду с функциями на E_k рассматриваем также отношения на E_k. Совокупность всех отношений на E_k обозначаем через Π_k. Если отношения $\rho(x_1, \dots, x_m)$, $\sigma(x_1, \dots, x_n)$ принадлежат Π_k, то *конъюнкцией* отношений ρ, σ называем $(m+n)$-местное отношение

$$\rho(x_1, \dots, x_m) \& \sigma(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}).$$

Проекцией отношения $\rho(x_1, \dots, x_m)$ по переменной $x_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ называется $(m-1)$-местное отношение

$$(\exists x_i)\rho(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m).$$

Операции перестановки и отождествления переменных для отношений предполагаем известными. Если $\rho \in \Pi_k$ и π — подстановка на E_k, то отношение

$$\rho^\pi(x_1, \dots, x_m) \equiv \rho(\pi(x_1), \dots, \pi(x_m))$$

называем *двойственным* к ρ относительно подстановки π. *Диагоналями* называем отношения, которые можно получить из элементарных диагоналей вида $x_i = x_j$ с помощью операций конъюнкции, перестановки и отождествления переменных. Тождественно ложное отношение будем называть также пустым отношением. Пусть $\rho(x)1, \dots, x_m)$, $\sigma(x_1, \dots, x_m)$ — отношения на E_k. Если отношение ρ, рассматриваемое как подмножество множества E_k^m, содержит отношение σ, то отношение ρ называется расширением отношения σ, а отношение σ — сужением отношения ρ. Если π — подстановка, то отношение $\pi(x) = y$ называется графиком подстановки π.

Если $R \subseteq \Pi_k$, то через $[R]$ обозначаем множество всех отношений из Π_k, которые можно получить из отношений в R и диагоналей с помощью операций конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных. Множества вида $[R]$ называем замкнутыми классами (отношений). Замкнутый класс отношений $[R]$ из Π_k называем *A-замкнутым*, если вместе с любым отношением ρ из $[R]$ классу $[R]$ принадлежат также все отношения вида ρ^π, где $\pi \in \mathbf{A}_k$. Через $[R]_A$ обозначаем A-замыкание множества отношений R. Говорим, что множества отношений R, Q являются *A-эквивалентными*, если $[R]_A = [Q]_A$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ и $\rho(x_1, \dots, x_m) \in \Pi_k$. Говорят, что функция f сохраняет отношение ρ, если для любых n наборов $(a_{11}, \dots, a_{m1})$, $\dots, (a_{1n}, \dots, a_{mn})$ из E_k^m, удовлетворяющих отношению ρ, набор

$$(f(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, f(a_{m1}, \dots, a_{mn}))$$

также удовлетворяет отношению ρ. Множество всех функций из P_k, сохраняющих отношение ρ, обозначим через $\mathrm{Pol}\rho$, а множество всех отношений из Π_k, которые сохраняет функция f, через $\mathrm{Inv}f$. Легко проверяется, что для любой функции f и любого отношения ρ множество $\mathrm{Pol}\rho$ является замкнутым классом функций, содержащим все селекторные функции, а множество $\mathrm{Inv}f$ — замкнутым классом отношений, содержащим все диагонали.

Отображения Pol и Inv распространим на все подмножества из Π_k и P_k: если $R \subseteq \Pi_k$ и $F \subseteq P_k$, то

$$\mathrm{Pol}R = \bigcap_{\rho \in R} \mathrm{Pol}\rho, \ \mathrm{Inv}F = \bigcap_{f \in F} \mathrm{Inv}f.$$

Отображения Pol и Inv определяют соответствие Галуа [22] между частично упорядоченными по включению множествами всех подмножеств

из P_k и всех подмножеств из Π_k. При этом Галуа-замкнутыми множествами являются замкнутые классы функций из P_k, которым принадлежат все селекторные функции, и замкнутые классы отношений из Π_k, содержащие все диагонали [1]. Более того, отображение Pol (или Inv) задает антиизоморфизм между частично упорядоченными множествами замкнутых классов функций и замкнутых классов отношений. Нетрудно видеть, что для рассматриваемых соответствий Галуа A-замкнутым классам функций отвечают A-замкнутые классы отношений и A-замкнутым классам отношений — A-замкнутые классы функций.

Таким образом, описание A-замкнутых классов функций, содержащих селекторные функции, равносильно описанию A-замкнутых классов отношений, содержащих диагонали.

Если E — конечное множество, то через $|E|$ обозначаем число элементов в множестве E.

Для любого k, $k \geqslant 4$, следующие отношения на E_k называем *основными*:

(1) $E_k^i(x) \equiv (x \in E_i), \quad 1 \leqslant i < k$;

(2) $\mu_k^i(x,y) \equiv E_k^2(x) \ \& \ E_k^2(y) \ \& \ (x \neq y) \vee (x, y \in \{2, 3, \ldots, i-1\}) \ \& \ (x = y), \quad 2 \leqslant i \leqslant k$;

(3) $\nu_k^i(x,y) \equiv (x = 0) \ \& \ (y = 1) \vee (x, y \in \{2, 3, \ldots, i\}) \ \& \ (x = y), \quad 2 \leqslant i \leqslant k-1$;

(4) $\eta_k^i(x,y) \equiv E_k^3(x) \ \& \ E_k^3(y) \ \& \ (x + 1 = y) \vee (x, y \in \{3, \ldots, i-1\}) \ \& \ (x = y)$, где сложение рассматривается по модулю 3 и $3 \leqslant i \leqslant k$;

(5) $\theta_k(x,y) \equiv E_k^2(x) \ \& \ (x + 1 = y) \vee (x, y \in \{3, \ldots, k-1\}) \ \& \ (x = y)$;

(6) $\kappa_k(x,y) \equiv (E_k^2(x) \ \& \ E_k^2(y) \vee (x, y \in \{2, 3\}) \ \& \ (x \neq y)$;

(7) $\zeta_k(x,y) \equiv (x \in \{0, 2, \ldots, 2k-2\}) \ \& \ (x + 1 = y)$, где k четно;

(8) $\xi_k(x,y) \equiv (x = 0) \ \& \ (y = 3) \vee (x = 2) \ \& \ (y = 1) \vee (x \in \{4, \ldots, k-1,\}) \ \& \ (x + 1 = y)$, где k кратно 4;

(9) $\chi_k^i(x,y) \equiv E_k^1(x) \ \& \ E_k^i(y) \vee x = y = i - 1, \quad 2 \leqslant i \leqslant k$;

(10) $\lambda_k(x,y,z) \equiv E_k^2(x) \ \& \ E_k^2(y) \ \& \ E_k^2(z) \ \& \ (x+y+z = 0)$, где сложение рассматривается по модулю 2;

(11) $\kappa_4^1(x,y) \equiv E_4^3(x) \ \& \ \kappa_4(x,y)$;

(12) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, где $+$ обозначает сложение в поле $GF(4)$ с нулем 0 и единицей 1.

Основные отношения (1)–(7), (9)–(12) вводились в работах [9, 10]. Кроме того, отношения (2)–(8), (11) представляют собой графики соответствующих основных функций из [13].

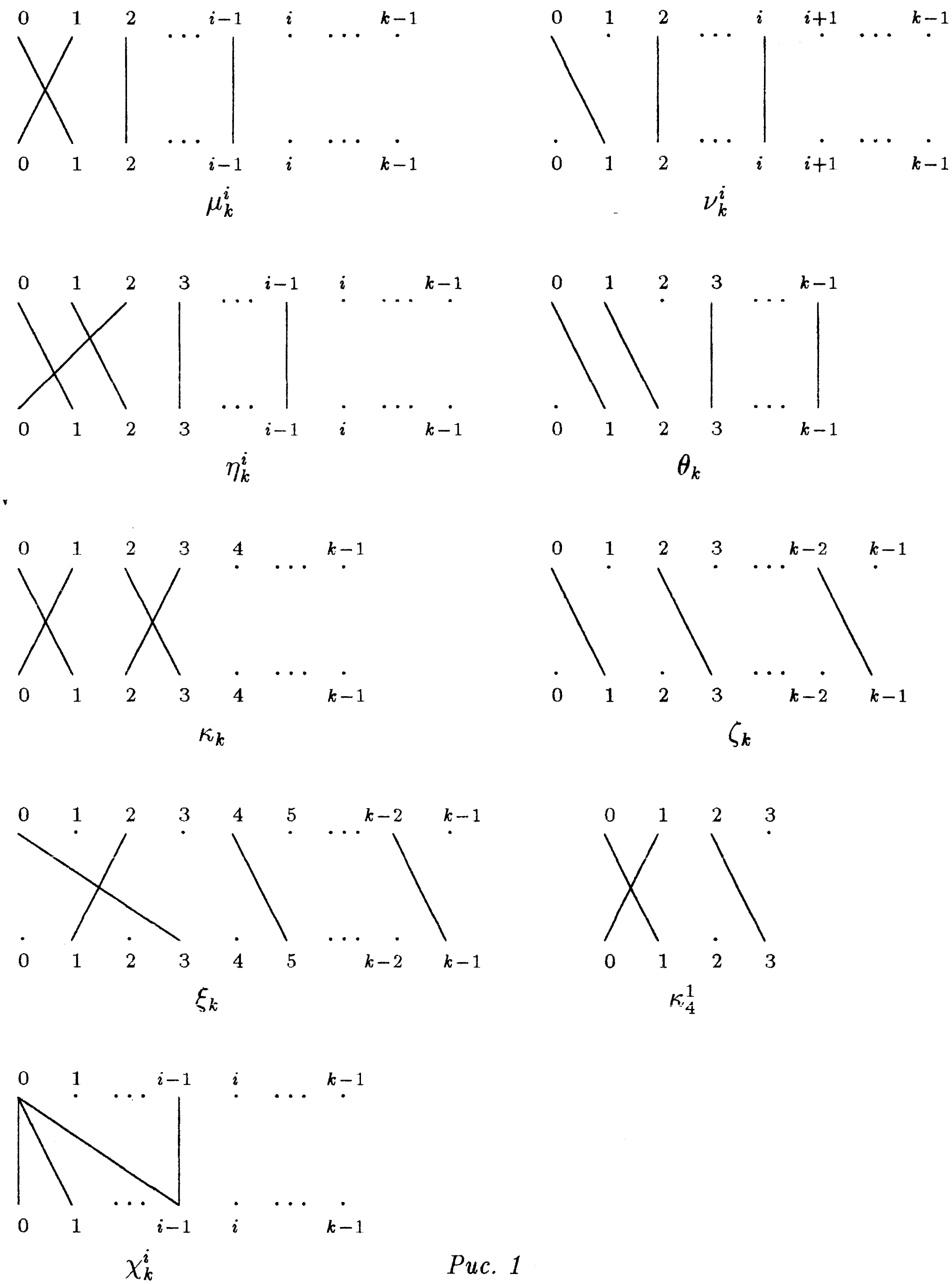

Рис. 1

На рис. 1 отношения (2)–(9), (11) изображены в виде двудольных графов, ребра которых соответствуют наборам, удовлетворяющим данным отношениям.

Класс I_k состоит из всех идемпотентных функций, принадлежащих P_k, т. е. таких функций f, что $f(x,\dots,x)=x$. Нетрудно видеть (см., например, [11]), что класс I_k определяется всеми отношениями вида $x=a$, где $a\in E_k$. Иными словами, $I_k=\mathrm{Pol}\{x=0,\dots,x=k-1\}$. Так как класс I_k является A-замкнутым, а множество $[\{E_k^1(x)\}]_A$ включает все отношения $x=0,\dots,x=k-1$, то имеем $I_k=\mathrm{Pol}[\{E_k^1(x)\}]_A$. Тем самым описание всех A-замкнутых классов идемпотентных функций, содержащих селекторные функции, сводится к описанию всех A-замкнутых классов отношений, содержащих отношение $E_k^1(x)\equiv(x=0)$.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 доказана в [14] (лемма 2).

Лемма 1. *Пусть отношение $\rho(x_1,\dots,x_n)$ представимо в виде конъюнкции одно- и двуместных отношений (не обязательно с непересекающимися множествами переменных). Тогда*

$$\rho(x_1,\dots,x_n)\equiv\Big(\mathop{\&}_{1\leqslant i\leqslant n}\sigma_i(x_i)\Big)\&\Big(\mathop{\&}_{1\leqslant i<j\leqslant n}\tau_{ij}(x_i,x_j)\Big),$$

где $\sigma_i(x_i)$ — проекция отношения $\rho(x_1,\dots,x_n)$ по всем переменным, отличным от x_i, а $\tau_{ij}(x_i,x_j)$ — аналогичная проекция по всем переменным, отличным от x_i,x_j.

Аналог леммы 2 для случая S-замыкания приведен в [14] (лемма 3).

Лемма 2. *Пусть Π — множество одно- и двуместных отношений на E_k, все двуместные отношения которого имеют вид*

$$(x_1\in E)\&(\pi(x_1)=x_2),\tag{1}$$

где $E\subseteq E_k$ и π — подстановка на E_k. Тогда произвольное отношение из $[\Pi]_A$ можно представить в виде конъюнкции одно- и двуместных отношений из $[\Pi]_A$, причем все двуместные отношения имеют вид (1).

Доказательство. Очевидно, что для доказательства леммы достаточно изучить строение отношения

$$(\exists x_j)\rho(x_1,\dots,x_j,\dots,x_n),\tag{2}$$

где отношение ρ представимо в виде конъюнкции K одно- и двуместных отношений указанного в лемме вида. Случай, когда переменная x_j в конъюнкции K встречается лишь в одноместных отношениях, тривиален. Поэтому пусть переменная x_j в конъюнкции K входит в некоторое двуместное отношение, например в отношение (1). Можно считать, что $j=2$, поскольку отношение (1) представимо также в виде

$$(x_2\in\pi(E))\&(x_1=\pi^{-1}(x_2)).$$

Если теперь

$$\rho(x_1, \dots, x_n) \equiv (x_1 \in E)\&(\pi(x_1) = x_2)\&\sigma(x_1, \dots, x_n), \qquad (3)$$

то отношение (2) эквивалентно отношению

$$(x_1 \in E)\&\sigma(x_1, \pi(x_1), x_3, \dots, x_n). \qquad (4)$$

В конъюнктивном представлении последнего отношения может встретиться отношение вида

$$(x_i \in F)\&(\tau(x_i) = \pi(x_1)),$$

которое, очевидно, эквивалентно отношению

$$(x_i \in F)\&(\pi^{-1}(\tau(x_i)) = x_1),$$

имеющему вид (1).

Таким образом, любое отношение $\rho(x_1, \dots, x_n)$ из $[\Pi]_A$ представимо в виде конъюнкции K одно- и двуместных отношений, причем все двуместные отношения имеют вид (1). Покажем, что все конъюнктивные сомножители из K можно считать принадлежащими множеству $[\Pi]_A$. Пусть, например, отношение $\tau(x_i, x_j)$ входит в K, а $\tau_{ij}(x_i, x_j)$ есть проекция отношения $\rho(x_1, \dots, x_n)$ по всем переменным, отличным от x_i, x_j. Тогда отношение $\tau_{ij}(x_i, x_j)$, рассматриваемое от всех переменных $x_1, \dots, x_n$, есть расширение отношения $\rho(x_1, \dots, x_n)$. С другой стороны, если истинно значение $\tau_{ij}(a_i, a_j)$, то ввиду вхождения $\tau(x_i, x_j)$ в конъюнкцию K должно быть также истинно значение $\tau(a_i, a_j)$. Следовательно, отношение $\tau(x_i, x_j)$ есть расширение отношения $\tau_{ij}(x_i, x_j)$. Поэтому сомножитель $\tau(x_i, x_j)$ в конъюнкции K можно эквивалентным образом заменить отношением $\tau_{ij}(x_i, x_j)$. Вместе с тем $\tau_{ij} \in [\{\rho\}]_A$ и, значит, $\tau_{ij} \in [\Pi]_A$.

Аналогичным образом любой сомножитель $\sigma(x_i)$ из K можно заменить отношением $\sigma_i(x_i)$, которое является проекцией отношения $\rho(x_1, \dots, x_n)$ по всем переменным, отличным от x_i. Лемма 2 доказана.

Следующая лемма доказана в [14] (лемма 5), где специфика S-замыкания не используется (см. также лемму 2 из [12]).

Лемма 3. *Пусть* Π *— множество одно- и двуместных отношений на* E_k, *все двуместные отношения которого имеют вид* (1) *или*

$$(x \in E)\&(y \in F)\&(x_1 = a \vee x_2 = b), \qquad (5)$$

где $E \subseteq E_k, F \subseteq E_k, a \in E, b \in F$. *Тогда произвольное отношение из* $[\Pi]_A$ *можно представить в виде конъюнкции одно- и двуместных отношений из* $[\Pi]_A$, *все двуместные отношения которой имеют вид* (1) *или* (5).

Аналог леммы 4 для случая S-замыкания приведен в [14] (лемма 7). Кроме того, лемма 4 довольно близка лемме 2 из [8], на которую мы будем опираться при доказательстве леммы 4.

Лемма 4. *Пусть* Π — *множество одно- и двуместных отношений на* E_k, *все двуместные отношения которого имеют вид* (1). *Тогда произвольное отношение из* $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_A$ *можно представить в виде конъюнкции одноместных отношений из* $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_A$, *двуместных отношений из* $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_A$ *вида* (1) *и отношений из* $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_A$ *вида*

$$(x_1 \in F_1)\&\ldots\&(x_n \in F_n)\&(\pi_1(x_1) + \ldots + \pi_n(x_n) = 0), \qquad (6)$$

где $n \geqslant 2$, $|F_1| = \ldots = |F_n| = 2$, $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — *подстановки на* E_k *такие, что* $\pi(F_1) = \ldots = \pi(F_n) = E_2$, *и сложение рассматривается по модулю* 2.

Доказательство. Пусть $\rho(x_1, \ldots, x_n)$ — непустое отношение из $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_A$, которое представимо в виде конъюнкции K отношений из $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_A$ указанных в формулировке типов. Покажем, что отношение (2) можно представить в виде конъюнкции одноместных отношений, отношений вида (1) и отношений вида (6) (не обязательно входящих в множество $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_A$). Тогда из леммы 2 [8] следует, что сомножители этой конъюнкции можно выбрать из множества $[\{\rho\}]_A$, т. е. из множества $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_A$. Этого достаточно для доказательства леммы, поскольку рассмотрение операций перехода к двойственным отношениям для подстановок из группы $\mathbf{A}_k$, а также операций конъюнкции, перестановки и отождествления переменных не вызывает никаких затруднений.

Чтобы исключить тривиальный случай, будем предполагать, что переменная x_j из конъюнкции K входит по крайней мере в одно неодноместное отношение. Пусть сначала это неодноместное отношение имеет вид (1). Для упрощения обозначений будем считать, что оно совпадает с отношением (1) и $j = 2$. Так же, как в доказательстве леммы 2, если имеет место эквивалентность (3), то отношение (2) эквивалентно отношению (4). Поэтому все сомножители вида (1), входящие в конъюнктивное представление отношения σ, после замены переменной x_2 выражением $\pi(x_1)$ вновь будут иметь вид (1).

Пусть в конъюнкцию K входят сомножители вида (6), содержащие переменную x_2, например само отношение (6). Рассмотрим отношение

$$(x_1 \in F_1)\&(\pi(x_1) \in F_2)\&(x_3 \in F_3)\&\ldots\&(x_n \in F_n)\&$$
$$(\pi_1(x_1) + \pi_2(\pi(x_1)) + \pi_3(x_3) + \ldots + \pi_n(x_n) = 0). \qquad (7)$$

Можно считать, что $F_1 \cap \pi^{-1}(F_2) \neq \varnothing$ и $n \geqslant 3$. Если множество $F_1' = F_1 \cap \pi^{-1}(F_2)$ состоит из одного элемента a и $\pi_1(a) + \pi_2(\pi(a)) = 0$, то множитель $(x_1 \in F_1)\&(\pi(x_1) \in F_2)$ в представлении (7) заменяем множителем $x_1 \in F_1'$, а слагаемое $\pi_1(x_1) + \pi_2(\pi(x_1))$ опускаем. Аналогичным образом поступаем в том случае, когда $F_1 = \pi^{-1}(F_2)$ и $\pi_1(x_1) = \pi_2(\pi(x_1))$ при $x_1 \in F_1$. Если же $\pi_1(x_1) \neq \pi_2(\pi(x_1))$ при $x_1 \in F_1$, то слагаемое

$\pi_1(x_1)+\pi_2(\pi(x_1))$ равно 1 на множестве F_1. Чтобы сохранить вид отношения, опускаем слагаемое $\pi_1(x_1)+\pi_2(\pi(x_1))$, а слагаемое $\pi_3(x_3)$ заменяем слагаемым $\pi_3'(x_3)$, где

$$\pi_3'(x_3)=\begin{cases}\pi_3(x_3)+1, & \text{если } x_3\in F_3,\\ \pi_3(x_3) & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Таким образом, приходим к конъюнкции одноместных отношений и отношений вида (6).

Теперь предположим, что конъюнкция K не содержит сомножителей вида (1) с переменной x_j. Для упрощения рассуждений будем считать, что все сомножители конъюнкции K содержат переменную x_j. Тогда

$$\rho(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n)\equiv\sigma(x_j)\&\varphi_1(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n)\&\\ \ldots\&\varphi_m(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n),\quad (8)$$

где $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ — отношения вида (6). Пусть, например, $j=1$ и

$$\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)\equiv(x_1\in F_1^i)\&\ldots\&(x_{n_i}\in F_{n_i}^i)\&(\pi_1^i(x_1)+\ldots+\pi_{n_i}^i(x_{n_i})=0)$$

при $1\leqslant i\leqslant m$. Можно считать, что для любого l, $1\leqslant l\leqslant n$, все существующие множества из последовательности $F_l^1,\ldots,F_l^m$ совпадают. В самом деле, если, например, $F_l^p\neq F_l^q$, то ввиду равенств $|F_l^p|=|F_l^q|=2$ и в силу непустоты отношения ρ для некоторого элемента a имеем $F_l^p\cap F_l^q=\{a\}$. Тогда пересечение всех имеющихся множеств из $\{F_l^1,\ldots,F_l^m\}$ также равно $\{a\}$. Поэтому в представлении (8) все конъюнктивные сомножители вида $x_l\in F_l^i$ можно эквивалентным образом заменить сомножителем $x_l=a$, а сомножитель

$$\pi_1^i(x_1)+\ldots+\pi_{n_i}^i(x_{n_i})=0$$

при $n_i\geqslant l$ — сомножителем

$$\pi_1^i(x_1)+\ldots+\pi_{l-1}^i(x_{l-1})+\pi_{l+1}^i(x_{l+1})+\ldots+\pi_{n_i}^i(x_{n_i})=0,$$

если $\pi_l^i(a)=0$, и сомножителем

$$\pi_1^i(x_1)+\ldots+\pi_{l-1}^i(x_{l-1})+\tau_{l+1}(x_{l+1})+\pi_{l+2}^i(x_{l+2})+\ldots+\pi_{n_i}(x_{n_i})=0,$$

если $\pi_l^i(a)=1$, где

$$\tau_{l+1}(x_{l+1})=\begin{cases}\pi_{l+1}^i(x_{l+1})+1, & \text{если } x_{l+1}\in F_{l+1}^i,\\ \pi_{l+1}(x_{l+1}) & \text{в противном случае}\end{cases}$$

(при $l=n_i$ вместо отношения π_{l+1}^i следует рассмотреть отношение π_{l-1}^i). В случае $l=1$ наряду с множествами $F_1^1,\ldots,F_1^m$ аналогичным образом рассматриваем отношение $\sigma(x_1)$.

Итак, можно предполагать, что

$$\rho(x_1,\dots,x_n)\equiv(x_1\in F_1)\&\dots\&(x_n\in F_n)\& \Big(\mathop{\&}_{1\leqslant i\leqslant m}(\pi_1^i(x_1^i)+\dots+\pi_{n_i}^i(x_{n_i}^i))=0\Big).$$

Следовательно,

$$(\exists x_1)\rho(x_1,\dots,x_n)\equiv(x_2\in F_2)\&\dots\&(x_n\in F_n)\& \Big(\mathop{\&}_{1\leqslant i<j\leqslant m}(\delta_{ij}+\pi_2^i(x_2^i)+\dots+\pi_{n_i}^i(x_{n_i}^i)+\pi_2^j(x_2^j)+\dots+\pi_{n_j}^j(x_{n_j}^j))=0\Big), \tag{9}$$

где

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & \text{если подстановки } \pi_1^i,\pi_1^j \text{ совпадают на множестве } F_1,\\ 1 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

При $\delta_{ij}=1$, как и выше, подстановку π_2^i заменяем такой подстановкой τ_2^i, чтобы придать отношению (9) вид (6). Лемма 4 доказана.

Следующая лемма аналогична лемме 19 из [9].

Лемма 5. *Пусть $\{a,b,c,d\}\subseteq E_k$, $a\neq b$, $c\neq d$ и $\rho(x_1,x_2,x_3)$ — такое отношение на E_k, что $\rho(0,x_2,x_3)$ и $\rho(1,x_2,x_3)$ суть различные отношения вида*

$$(x_2\in\{a,b\})\&(\pi(x_2)=x_3), \tag{10}$$

$$(x_2\in\{a,b\})\&(x_3\in\{c,d\}), \tag{11}$$

$$(x_2\in\{a,b\})\&(x_3\in\{c,d\})\&(x_2=e\vee x_3=f), \tag{12}$$

где π — подстановка на E_k, отображающая $\{a,b\}$ на $\{c,d\}$, а $e\in\{a,b\}$ и $f\in\{c,d\}$. Тогда $\lambda_k\in[\{E_k^1(x),\rho\}]_A$.

Доказательство. Так как

$$(x_2\in\{a,b\})\equiv(\exists x_1)(\exists x_3)(E_k^1(x_1)\&\rho(x_1,x_2,x_3)),$$

то множеству $[\{E_k^1(x),\rho\}]_A$ принадлежит отношение $E_k^2(x)$. В дальнейшем нам не потребуются отношения вида $\rho(g,x_2,x_3)$, где $g\notin\{0,1\}$. Поэтому можно считать, что

$$\rho(x_1,x_2,x_3)\equiv E_k^2(x_1)\&\rho(x_1,x_2,x_3).$$

Через $\rho_0(x_2,x_3)$, $\rho_1(x_2,x_3)$ обозначим отношения $\rho(0,x_2,x_3)$ и $\rho(1,x_2,x_3)$. Каждое из отношений ρ_0, ρ_1 может иметь вид (10)–(12). Таким образом, априори возможны 9 случаев. Три из них (ρ_0 имеет вид (11) и ρ_1 имеет вид (10), ρ_0 имеет вид (12) и ρ_1 имеет вид (10), ρ_0 имеет вид (12) и ρ_1 имеет вид (11)) сводятся к трем другим, если вместо отношения ρ

взять отношение ρ', двойственное к ρ относительно четной подстановки (01)(23). Случай, когда оба отношения ρ_0, ρ_1 имеют вид (11), невозможен, поскольку отношения ρ_0, ρ_1 различны. В итоге приходим к пяти случаям, подлежащим рассмотрению: ρ_0 и ρ_1 имеют вид (10), ρ_0 имеет вид (10) и ρ_1 имеет вид (11), ρ_0 имеет вид (10) и ρ_1 имеет вид (12), ρ_0 имеет вид (11) и ρ_1 имеет вид (12), ρ_0 и ρ_1 имеют вид (12).

Первые три случая и последний случай полностью разобраны в лемме 19 из [9], где от группы $\mathbf{S}_k$ требуется лишь 2-транзитивность. Аналогичным образом обстоит дело в четвертом случае, если $k > 4$. При этом вместо леммы 11 из [9] следует воспользоваться леммой 1 из [15].

Специфика группы $\mathbf{A}_k$ проявляется только при $k = 4$. Итак, пусть $k = 4$, ρ_0 имеет вид (11) и ρ_1 имеет вид (12), причем $e = a$ и $f = c$. В соответствии с планом доказательства леммы 19 из [9] необходимо установить, что отношение μ_4^2 принадлежит одному из множеств $[\{\rho_1\}]_A$, $[\{\rho(x_1, b, x_3)\}]_A$, $[\{\rho(x_1, x_2, d)\}]_A$.

Если $(c, d) = (a, b)$ или $|\{c, d\} \cap \{a, b\}| = 1$, то $\mu_4^2 \in [\{\rho_1\}]_A$ по лемме 1 из [15]. Если $(c, d) = (b, a)$, то при $\{a, b\} = \{0, 1\}$ или $|\{a, b\} \cap \{0, 1\}| = 1$ отношение μ_4^2 принадлежит одному из множеств $[\{\rho(x_1, b, x_3)\}]_A$ или $[\{\rho(x_1, x_2, d)\}]_A$ согласно той же лемме 1. Пусть $(c, d) = (b, a)$ и $\{a, b\} \cap \{0, 1\} = \varnothing$. Тогда отношения $\rho(x_1, b, x_3)$, $\rho(x_1, x_2, d)$ совпадают с отношениями τ_1, τ_2 (рис. 2).

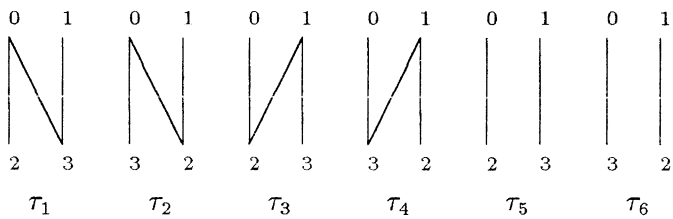

Рис. 2

Пусть отношения τ_3, τ_4 двойственны соответственно к τ_1, τ_2 относительно четной подстановки (01)(23). Положим

$$\tau_5(x_1, x_2) \equiv \tau_1(x_1, x_2) \& \tau_3(x_1, x_2),$$
$$\tau_6(x_1, x_2) \equiv \tau_2(x_1, x_2) \& \tau_4(x_1, x_2).$$

Тогда

$$\mu_4^2(x_1, x_2) \equiv (\exists y)(\tau_5(x_1, y) \& \tau_6(x_2, y)).$$

Предположим, что $\{c, d\} \cap \{a, b\} = \varnothing$. Если $|\{c, d\} \cap \{0, 1\}| = 1$, то согласно лемме 1 из [15] получаем $\mu_4^2 \in [\{\rho(x_1, b, x_3)\}]_A$. Пусть $\{c, d\} =$

$\{0,1\}$. Если $(c,d) = (0,1)$, то вновь по лемме 1 из [15] получаем $\mu_4^2 \in [\{\rho(x_1,b,x_3)\}]_A$. Если же $(c,d) = (1,0)$, то применяем указанную лемму 1 к отношению $(\exists y)(\rho_1(x_1,y)\&\rho(y,x_2,d))$. Если $\{c,d\} = \{2,3\}$, то $\{a,b\} = \{0,1\}$. При $(a,b) = (0,1)$ согласно лемме 1 имеем $\mu_4^2 \in [\{\rho(x_1,x_2,d)\}]_A$, а при $(a,b) = (1,0)$ лемму 1 применяем к отношению $(\exists y)(\rho(y,b,x_1)\& \rho_1(y,x_2))$. Лемма 5 доказана.

Доказательство леммы 6 практически полностью совпадает с доказательством аналогичной леммы 6 из [14], установленной для S-замыкания. Стоит лишь обратить внимание на то, что в доказательстве леммы 6 из [14] от группы $\mathbf{S}_k$ требуется только 2-транзитивность, а вместо ссылок на леммы 1, 5 из [14] и лемму 11 из [9] необходимо сослаться на леммы 5 и 3 настоящей статьи и лемму 1 из [15].

Лемма 6. *Пусть* Π — *множество одно- и двуместных отношений на* E_k, *содержащее отношение* $E_k^2(x)$, *а все двуместные отношения из* Π *имеют вид* (1) *или* (5). *Если* $\rho \notin [\Pi]_A$, *то в множество* $[\Pi \cup \{\rho\}]_A$ *входит либо двуместное отношение, не принадлежащее множеству* $[\Pi]_A$, *либо отношение* λ_k.

Лемма 7. *Пусть* Π — *множество одно- и двуместных отношений на* E_k, *все двуместные отношения которого имеют вид* (1). *Если* $\rho \notin [\Pi \cup \{\lambda_k\}]_A$, *то множеству* $[\Pi \cup \{\lambda_k,\rho\}]_A$ *принадлежит двуместное отношение, не входящее в* $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_A$.

Доказательство леммы 7 практически дословно совпадает с доказательством аналогичной леммы 8 из [14]. Отметим, что ссылки на леммы 2, 3 и 7 из [14] следует заменить ссылками на леммы 1, 2 и 4 настоящей статьи. Кроме того, последние четыре строки из доказательства леммы 8 в [14] должны быть заменены следующими рассуждениями.

Пусть $2 \leqslant j \leqslant n$ и $c_2,\ldots,c_{j-1},c_{j+1},\ldots,c_n$ — такие элементы соответственно из множеств $F_2,\ldots,F_{j-1},F_{j+1},\ldots,F_n$, что

$$\pi_2(c_2) = \ldots = \pi_{j-1}(c_{j-1}) = \pi_{j+1}(c_{j+1}) = \ldots = \pi_n(c_n) = 0.$$

Тогда отношение $\rho(x_1,c_2,\ldots,c_{j-1},x_j,c_{j+1},\ldots,c_n)$, принадлежащее множеству $[\{\rho\}]_A$, имеет вид

$$(x_j \in F_j)\&(x_1 = \pi_j(x_j)). \tag{13}$$

Из этих отношений и отношения

$$E_k^2(x_1)\&E_k^2(y_2)\&\ldots\&E_k^2(y_n)\&(x_1+y_2+\ldots+y_n=0),$$

содержащегося в $[\{\lambda_k\}]_A$, получаем отношение ρ:

$$\rho(x_1,\ldots,x_n) \equiv (\exists y_2)\ldots(\exists y_n)\Big(E_k^2(x_1)\&E_k^2(y_2)\&\ldots\&E_k^2(y_n)\& \\ (x_1+y_2+\ldots+y_n=0)\&\Big(\mathop{\&}_{2\leqslant j\leqslant n}(x_j \in F_j)\&(y_j = \pi_j(x_j))\Big)\Big).$$

Так как $\rho \notin [\Pi \cup \{\lambda_k\}]_A$, то множеству $[\Pi \cup \{\lambda_k\}]_A$ не принадлежит некоторое двуместное отношение вида (13).

Доказательство леммы 8 идентично доказательству леммы 9 из [14]. Вместо фигурирующих там лемм 1–3 и 13 из [9] необходимо воспользоваться леммами 2–4 из [13] и леммой 3 из [15].

Лемма 8. *Пусть ρ — отношение на E_k и $\rho \notin [\{E_k^1(x)\}]_A$. Тогда при $k \geqslant 5$ множество $[\{E_k^1(x), \rho\}]_A$ содержит отношение $E_k^2(x)$, а при $k = 4$ — одно из отношений $E_k^2(x), \kappa_4$.*

Доказательство леммы 9 повторяет доказательство соответствующей леммы 10 из [14]. Отметим, что вместо цитируемых там лемм 1–3, 17 и теоремы из [9] необходимо воспользоваться соответственно леммами 2–4 из [14], леммой 7 из [15] и теоремой 2 из [15].

Лемма 9. *Пусть ρ — отношение на E_4. Если $\rho \notin [\{E_k^1(x), \kappa_4\}]_A$, то множество $[\{E_k^1(x), \kappa_4, \rho\}]_A$ содержит одно из отношений $E_k^2(x), \eta_4^4$ или $x_1+x_2 = x_3+x_4$; если $\rho \notin [\{E_k^1(x), \eta_4^4\}]_A$, то множество $[\{E_k^1(x), \eta_4^4, \rho\}]_A$ содержит одно из отношений $E_k^2(x), x_1+x_2 = x_3+x_4$; если $\rho \notin [\{E_k^1(x), x_1+x_2 = x_3+x_4\}]_A$, то множество $[\{E_k^1(x), x_1+x_2 = x_3+x_4, \rho\}]_A$ содержит отношение η_4^4.*

Лемма 10. *Пусть R — набор основных отношений на E_k, $\{\lambda_k, \chi_k^i\} \subseteq R$ и R не содержит отношений $x_1+x_2 = x_3+x_4$ и χ_k^i при $j > i$. Тогда множество $[R]_A$ состоит из отношений, представимых в виде конъюнкции одноместных отношений, двуместных отношений вида (1) и отношений вида*

$$(x_1 \in F_1) \& \ldots \& (x_m \in F_m) \& \sigma(x_1, \ldots, x_m), \tag{14}$$

где $m \geqslant 1$, $|F_1| = \ldots = |F_m| = i$ и σ — отношение на E_k. При этом если все неодноместные отношения из R принадлежат множеству $\{\lambda_k, \mu_k^2, \chi_k^2\}$, то дополнительно выполняется условие $F_1 = \ldots F_m$ и в множество $[R]_A$ входят все отношения вида (14), подчиненные этому условию. Аналогично если $k = 4$, все неодноместные отношения из R содержатся в множестве $\{\lambda_4, \mu_4^2, \kappa_4, \kappa_4^1, \zeta_4, \xi_4, \chi_4^2\}$ и $R \cap \{\kappa_4, \kappa_4^1, \zeta_4, \xi_4\} \neq \varnothing$, то любые два множества из $\{F_1, \ldots, F_m\}$ либо не пересекаются, либо совпадают и в множество $[R]_A$ входят все отношения вида (14), удовлетворяющие этому условию. Во всех остальных случаях множеству $[R]_A$ принадлежат все отношения вида (14), удовлетворяющие условию $|F_1| = \ldots = |F_m| = i$.

Доказательство. Сначала установим, что при выполнении условий леммы в множество $[R]_A$ входят лишь те отношения, которые представимы в указанном в лемме виде. Проведем индукцию по построению отношений в множестве $[R]_A$. Справедливость утверждения для

отношений из R очевидна. Также очевидно сохранение вида отношений при применении операций конъюнкции, отождествления и перестановки переменных и операций перехода к двойственным отношениям для подстановок из группы $\mathbf{A}_k$. Рассмотрим операцию проектирования. Если эта операция применяется к конъюнкции одноместных отношений и двуместных отношений вида (1), то можно воспользоваться леммой 2. Пусть операция проектирования по переменной x_1 применяется к отношению $\rho(x_1, \ldots, x_n)$, конъюнктивное представление K которого содержит отношение $\rho_1(x_1, \ldots, x_m)$ вида (14). Поскольку конъюнкция двух отношений вида (14) есть снова отношение того же вида, будем предполагать, что все остальные сомножители представления K, содержащие переменную x_1, либо одноместны, либо имеют вид (1). Если теперь $\rho_2(x_1)$ — один из сомножителей K, то его можно внести в отношение $\rho_1(x_1, \ldots, x_m)$, заменив отношение $\sigma(x_1, \ldots, x_m)$ в представлении (14) отношением $\rho_2(x_1)\&\sigma(x_1, \ldots, x_m)$. Если же сомножитель $\rho_2(x_1, x_l)$ имеет вид (1), т. е.

$$\rho_2(x_1, x_l) \equiv (x_1 \in E)\&(\pi(x_1) = x_l),$$

то, учитывая сомножитель $x_1 \in F_1$ в (14), это соотношение можно эквивалентным образом заменить отношением

$$\rho_2'(x_1, x_l) \equiv (x_1 \in E')\&(x_l \in G')\&(\pi(x_1) = x_l),$$

где $E' = E \cap F_1$, $G' = \pi(E')$ и $|E'| = |G'| \leqslant i$. Ясно, что конъюнкция отношений ρ_1 и ρ_2' будет отношением вида (14). Остается заметить, что применение операции проектирования к отношениям вида (14) снова приводит к отношениям этого вида.

С небольшими изменениями эти рассуждения применимы и в других случаях. Так, если все неодноместные отношения из R принадлежат множеству $\{\lambda_k, \mu_k^2, \chi_k^2\}$, то все они имеют вид (14), где $|F_1| = \ldots = |F_m|$ и $|F_1| = 2$. Далее, пусть $\rho_1(x_1, \ldots, x_m)$ есть отношение (14), где $F_1 = \ldots = F_m$, $|F_1| = 2$, а

$$\rho_2(x_l, \ldots, x_n) \equiv (x_l \in G_l)\& \ldots \&(x_n \in G_n)\&\tau(x_l, \ldots, x_n),$$

где $G_l = \ldots = G_n$, $|G_l| = 2$, $1 \leqslant l \leqslant m \leqslant n$. Тогда при $F_1 = G_l$ отношение

$$\rho_1(x_1, \ldots, x_m)\&\rho_2(x_l, \ldots, x_n) \tag{15}$$

имеет тот же вид, что и отношения ρ_1, ρ_2. При $F_1 \cap G_l = \varnothing$ отношение (15) пусто, а при $F_1 \cap G_l = \{a\}$ эквивалентно отношению

$$(x_l = a)\& \ldots \&(x_m = a)\&\rho_1(x_1, \ldots, x_{l-1}, a, \ldots, a)\&$$
$$\rho_2(a, \ldots, a, x_{m+1}, \ldots, x_n),$$

которое представимо в виде конъюнкции отношений, имеющих требуемый в лемме вид.

Аналогичным образом поступаем, когда отношение ρ_2 имеет вид (1).

Пусть $k = 4$, все неодноместные отношения из R содержатся в множестве $\{\lambda_4, \mu_4^2, \kappa_4, \kappa_4^1, \zeta_4, \xi_4, \chi_4^2\}$ и $R \cap \{\kappa_4, \kappa_4^1, \zeta_4, \xi_4\} \neq \varnothing$. Ясно, что если $\tau \in \{\kappa_4, \kappa_4^1, \zeta_4, \xi_4\}$, $E \subseteq E_4$, $|E| = 2$ и отношению $(x_1 \in E) \& \tau(x_1, x_2)$ удовлетворяют два набора, то это отношение можно представить в виде (1), где либо $\pi(E) = E$, либо $\pi(E) \cup E = E_4$.

Теперь покажем, что множество $[R]_A$ содержит все требуемые отношения вида (14). Как установлено в лемме 8 из [15], в $[\{\lambda_k, \chi_k^i\}]_A$ входят все отношения вида (14), где $F_1 = \ldots = F_m = E_i$. Соображения двойственности дают сразу более широкий класс, когда $F_1 = \ldots = F_m$ и $|F_1| = i$. Тем самым, в частности, полностью рассмотрен случай, когда все неодноместные отношения из R содержатся в множестве $\{\lambda_k, \mu_k^2, \chi_k^2\}$.

Пусть $k = 4$, все неодноместные отношения из R входят в множество $\{\lambda_4, \mu_4^2, \kappa_4, \kappa_4^1, \zeta_4, \xi_4, \chi_4^2\}$ и $R \cap \{\kappa_4, \kappa_4^1, \zeta_4, \xi_4\} \neq \varnothing$. Тогда из отношения $E_4^2(x)$ и любого из отношений $\kappa_4, \kappa_4^1, \zeta_4, \xi_4$ можно легко получить такое отношение $\rho_3(x_1, x_2)$ вида (1), что $E = \{2, 3\}$ и $\pi(E) = E_2$. В самом деле, если, например, $\rho_4 \in \{\kappa_1, \kappa_4^1, \zeta_4\}$ и

$$\rho_5(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in \{0, 2\}) \& \rho_4(x_1, x_2),$$

то в качестве ρ_3 можно взять отношение, двойственное к ρ_5 относительно четной подстановки (013)(2). Аналогично рассматривается случай, когда $\rho_4 = \xi_4$. Чтобы построить теперь отношение вида (14), где, например, $F_1 = \ldots = F_l = E_2$ и $F_{l+1} = \ldots = F_m = \{2, 3\}$, достаточно выбрать подходящее отношение $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ вида (14), удовлетворяющее условию $F_1 = \ldots = F_m = E_2$, и образовать отношение

$$(\exists y_{l+1}) \ldots (\exists y_m)(\rho_3(x_{l+1}, y_{l+1}) \& \ldots \& \rho_3(x_m, y_m) \& \\ \varphi(x_1, \ldots, x_l, y_{l+1}, \ldots, y_m)).$$

Остальные отношения этого типа можно получить путем перехода к двойственным отношениям.

Рассмотрим оставшиеся случаи. Предположим сначала, что $\nu_k^2 \in [R]_A$. Так же, как в лемме 8 из [15], показываем, что множеству $[R]_A$ принадлежат все отношения вида (14), где $\sigma(x_1, \ldots, x_m)$ — произвольное отношение на E_k, а $|F_1| = \ldots = |F_m| = i$. Исследуем теперь, в каких случаях отношение ν_k^2 входит в $[R]_A$. Согласно лемме 8 из [15] при $i \geqslant 3$ имеем, в частности, $\nu_k^2 \in [\{\lambda_k, \chi_k^i\}]_A$. Ясно, что множеству $[R]_A$ принадлежит отношение $E_k^2(x)$. Поэтому если $r \geqslant 3$ и $\mu_k^r \in R$ или $\nu_k^r \in R$, то $\nu_k^2 \in [R]_A$, поскольку

$$\nu_k^2(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in \{0, 2, \}) \& \mu_k^r(x_1, x_2) \equiv (x_1 \in \{0, 2\}) \& \nu_k^r(x_1, x_2).$$

Применяя лемму 11 из [13], получаем: если $r \geqslant 3$, то ν_k^2 входит в множества

$$[\{E_k^2(x_1)\&\eta_k^r(x_1,x_2)\}]_A, \quad [\{E_k^2(x_1)\&\theta_k(x_1,x_2)\}]_A;$$

если $k \geqslant 5$, то ν_k^2 входит в множества

$$[\{(x_1 \in \{0,2\})\&\kappa_k(x_1,x_2)\}]_A, \quad [\{(x_1 \in \{0,2\})\&\zeta_k(x_1,x_2)\}]_A$$

и

$$[\{(x_1 \in \{0,2\})\&\xi_k(x_1,x_2)\}]_A.$$

Лемма 10 доказана.

3. Основной результат

Теорема. *Пусть $k \geqslant 4$ и ρ — произвольное отношение на E_k. Тогда множество $\{E_k^1(x),\rho\}$ A-эквивалентно некоторому набору основных отношений.*

Доказательство. Обозначим через Q множество $[\{E_k^1(x),\rho\}]_A$. Сначала покажем, как прийти к случаю, когда отношение $E_k^2(x)$ входит в Q и Q не содержит (при $k=4$) отношения $x_1+x_2=x_3+x_4$.

Можно считать, что $\rho \notin [\{E_k^1(x)\}]_A$. Если $k \geqslant 5$, то соотношение $E_k^2(x) \in Q$ установлено в лемме 8. Пусть $k=4$. Тогда в силу леммы 8 множество Q содержит одно из отношений $E_k^2(x),\kappa_4$. Если $\rho \in [\{E_k^1(x),\kappa_4\}]_A$, то теорема доказана. Предположим, что $\kappa_4 \in Q$ и $\rho \notin [\{E_k^1(x),\kappa_4\}]_A$. Тогда согласно лемме 9 множество $[\{E_k^1(x),\kappa_4,\rho\}]_A$ содержит одно из отношений $E_k^2(x), x_1+x_2=x_3+x_4$ или η_4^4. Если множество $[\{E_k^1(x),\kappa_4,\rho\}]_A$ содержит отношение $E_k^2(x)$ и не содержит отношения $x_1+x_2=x_3+x_4$, то мы получили сформулированный выше случай. Если $\rho \in [\{E_k^1(x), x_1+x_2=x_3+x_4\}]_A$, то теорема доказана, поскольку $\kappa_4 \in [\{E_k^1(x), x_1+x_2=x_3+x_4\}]_A$:

$$\kappa_4(x_1,x_2) \equiv (\exists x_3)(\exists x_4)(E_k^1(x_3)\&(x_4=1)\&(x_1+x_2=x_3+x_4)).$$

Если $\rho \notin [\{E_k^1(x), x_1+x_2=x_3+x_4\}]_A$, то на основании леммы 9 множество $[\{E_k^1(x), x_1+x_2=x_3+x_4\}]_A$ содержит отношение η_4^4. Если $\rho \in [\{\eta_4^4\}]_A$, то теорема доказана, поскольку отношения $E_k^1(x)$ и κ_4 входят в множество $[\{\eta_4^4\}]_A$. Если же $\rho \notin [\{\eta_4^4\}]_A$, то в силу леммы 9 множеству $[\{\eta_4^4,\rho\}]_A$ принадлежит одно из отношений $E_k^2(x), x_1+x_2=x_3+x_4$.

Так как $E_k^1(x) \in [\{\eta_4^4\}]_A$, то остается исследовать случай, когда $\rho \notin [\{x_1+x_2=x_3+x_4,\eta_4^4\}]_A$.

Множество $[\{x_1+x_2=x_3+x_4,\eta_4^4\}]_A$ определяет в P_4 класс квазилинейных функций [29], самодвойственных относительно подстановок группы $\mathbf{A}_4$. В работе [7] этот класс обозначен через $A_4^4L_4$. Там же

доказано, что единственным предполным классом в $A_4^4L_4$ является замкнутый класс $S_4^4L_4$ квазилинейных функций, самодвойственных относительно подстановок группы $\mathbf{S}_4$. По определению этот класс задается множеством отношений $[\{x_1+x_2=x_3+x_4,\mu_4^4\}]_A$. Класс $S_4^4L_4$ имеет только один собственный замкнутый подкласс — класс всех селекторных функций [26, 4]. Итак, множество $[\{x_1+x_2=x_3+x_4,\eta_4^4,\rho\}]_A$ может совпадать лишь с двумя A-замкнутыми множествами отношений: $[\{x_1+x_2=x_3+x_4,\mu_4^4\}]_A$ и Π_4, где, например, $\Pi_4=[\{\lambda_4,\chi_4^4\}]_A$.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что $E_k^2(x)\in Q$ и Q не содержит (при $k=4$) отношения $x_1+x_2=x_3+x_4$. Обозначим через R множество всех основных отношений, входящих в Q. По предположению $E_k^2(x)\in R$ и $(x_1+x_2=x_3+x_4)\notin R$. Доказательство теоремы будем вести индукцией по числу переменных у отношения $\rho(x_1,\dots,x_n)$. Случай $n=1$ тривиален. Если $n=2$, то согласно теореме 2 из [15] множество $\{E_k^1(x),\rho\}$ A-эквивалентно набору основных отношений R.

Пусть $n\geqslant 3$. Для набора R существуют три возможности: набор R не содержит отношения λ_k, набор R не содержит отношений χ_k^i, набор R содержит отношение λ_k и некоторое отношение χ_k^i. В первых двух случаях если $\rho\notin[R]_A$, то в силу лемм 6, 7 в множество $[R\cup\{\rho\}]_A$ входит двуместное отношение, не принадлежащее множеству $[R]_A$. Получаем противоречие с определением набора R и теоремой 2 из [15]. В связи с этим далее рассматриваем только третью возможность, причем параметр i выбираем максимально возможным. Предполагаем также, что $\rho\notin[R]_A$.

Согласно лемме 8 из [15] (см. также лемму 10) множество $[\{\lambda_k,\chi_k^i\}]_A$ содержит все отношения вида (14), где $F_1=\ldots=F_m$ и $|F_1|=i$. Сначала рассмотрим случай, когда в $[R]_A$ входят все отношения вида (14), где $|F_1|=\ldots=|F_m|=i$.

Для любого j, $1\leqslant j\leqslant n$, полагаем

$$G_j=\{a\mid \rho(x_1,\dots,x_{j-1},a,x_{j+1},\dots,x_n)\ \text{непусто}\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $|G_1|\leqslant\ldots\leqslant|G_n|$. Поскольку $\rho\notin[R]_A$, имеем $|G_n|>i$. Переходя, если необходимо, к двойственному отношению, можно предполагать, что $G_1=E_t$. Если $t=1$, то

$$\rho(x_1,\dots,x_n)\equiv E_k^1(x_1)\&\rho(0,x_2,\dots,x_n).$$

Так как $E_k^1(x)\in R$ и

$$\rho(0,x_2,\dots,x_n)\equiv(\exists x_1)(E_k^1(x_1)\&\rho(x_1,x_2,\dots,x_n)),$$

то множеству $[R]_A$ не принадлежит $(n-1)$-местное отношение $\rho(0,x_2,\dots,x_n)$. Поэтому далее можно считать, что $t\geqslant 2$.

При любом j, $j \in E_t$, положим

$$\rho_j(x_2, \dots, x_n) \equiv \rho(j, x_2, \dots, x_n).$$

Поскольку отношения $x = j$ принадлежат множеству $[\{E_k^1(x)\}]_A$, по аналогии с предыдущими рассуждениями можно предполагать, что для любого j, $j \in E_t$, отношение ρ_j входит в $[R]_A$.

Если для любого j из E_t отношению

$$(\exists x_2) \dots (\exists x_{n-1}) \rho_j(x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \tag{16}$$

удовлетворяет только один элемент, то в силу неравенства $|G_1| \leqslant |G_n|$ получаем, что $|G_1| = |G_n| = t$ и существует такая подстановка π на E_k, что $\pi(E_t) = G_n$ и

$$\rho(x_1, \dots, x_n) \equiv E_k^t(x_1) \& (\pi(x_1) = x_n) \& (\exists x_n) \rho(x_1, \dots, x_n).$$

Так как, очевидно,

$$E_k^t(x_1) \& (\pi(x_1) = x_n) \equiv (\exists x_2) \dots (\exists x_{n-1}) \rho(x_1, \dots, x_n),$$

то ввиду рассмотренного случая $n = 2$ отношение $E_k^t(x_1) \& (\pi(x_1) = x_n)$ можно считать принадлежащим множеству $[R]_A$. Следовательно, этому множеству не принадлежит отношение $(\exists x_n) \rho(x_1, \dots, x_n)$.

Далее предполагаем, что среди отношений (16) есть отношение, которому удовлетворяет более одного элемента.

Пусть среди отношений (16) имеются различные. Тогда отношение $(\exists x_2) \dots (\exists x_{n-1}) \rho(x_1, \dots, x_n)$ отлично от конъюнкции одноместных отношений, не имеет вида (1) и в силу неравенства $|G_n| > i$ и леммы 10 не принадлежит множеству $[R]_A$.

Допустим, что все отношения (16) совпадают и, следовательно, равны отношению $x_n \in G_n$. Так как $|G_n| > i$, в силу предположения $\{\rho_0, \dots, \rho_{t-1}\} \subset [R]_A$ и леммы 10 получаем, что каждое из отношений $\rho_0, \dots, \rho_{t-1}$ удовлетворяет одному из условий: оно представимо либо в виде конъюнкции отношения $x_n \in G_n$ и отношения от переменных $x_2, \dots, x_{n-1}$, либо в виде конъюнкции, содержащей сомножитель

$$(x_j \in G_j) \& (\pi_j(x_j) = x_n), \tag{17}$$

причем проекция отношения по всем переменным, отличным от x_j, x_n, совпадает с отношением (17).

Если каждое из отношений $\rho_0, \dots, \rho_{t-1}$ удовлетворяет первому условию, то ясно, что отношение ρ представимо в виде

$$\rho(x_1, \dots, x_n) \equiv (x_n \in G_n) \& (\exists x_n) \rho(x_1, \dots, x_n).$$

Отсюда следует, что множеству $[R]_A$ не принадлежит $(n-1)$-местное отношение $(\exists x_n) \rho(x_1, \dots, x_n)$.

Пусть отношение ρ_s удовлетворяет первому условию, а отношение ρ_p — второму условию с конъюнктивным сомножителем (17). В множестве G_j выберем такой элемент a, чтобы отношение

$$(\exists x_2)\dots(\exists x_{j-1})(\exists x_{j+1})\dots(\exists x_{n-1})\rho_s(x_2,\dots,x_{j-1},a,x_{j+1},\dots,x_n) \quad (18)$$

совпадало с отношением $x_n \in G_n$. Тогда в силу неравенства $|G_n| > i$ и леммы 10 множеству $[R]_A$ не принадлежит двуместное отношение

$$(\exists x_2)\dots(\exists x_{j-1})(\exists x_{j+1})\dots(\exists x_{n-1})\rho(x_1,x_2,\dots,x_{j-1},a,x_{j+1},\dots,x_n). \quad (19)$$

Предположим, что для любого p из E_t найдется такое j, $2 \leqslant j \leqslant n-1$, что отношение ρ_p удовлетворяет второму условию с конъюнктивным сомножителем (17). Если все эти сомножители совпадают, то

$$\rho(x_1,\dots,x_n) \equiv (x_j \in G_j)\&(\pi_j(x_j) = x_n)\&(\exists x_n)\rho(x_1,\dots,x_n).$$

Так как отношение (17) содержится в множестве $[\{\rho\}]_A$, оно должно входить в множество $[R]_A$ согласно рассмотренному случаю $n=2$. Следовательно, в $[R]_A$ не входит $(n-1)$-местное отношение $(\exists x_n)\rho(x_1,\dots,x_n)$.

Пусть среди отношений (17) имеются различные. Сначала рассмотрим случай, когда для некоторых отношений ρ_s, ρ_p $(s \neq p)$ переменная x_j одна и та же. В множестве G_j выберем такое i-элементное подмножество G, чтобы выполнялось неравенство $\pi_{j_s}(G) \neq \pi_{j_p}(G)$, где подстановки π_{j_s}, π_{j_p} удовлетворяют отношениям ρ_s, ρ_p. Тогда $|\pi_{j_s}(G) \cup \pi_{j_p}(G)| > i$. Следовательно, согласно лемме 10 множеству $[R]_A$ не принадлежит отношение

$$(\exists x_2)\dots(\exists x_{n-1})((x_j \in G)\&\rho(x_1,\dots,x_n)).$$

Наконец предположим, что отношения ρ_s, ρ_p удовлетворяют второму условию с конъюнктивными сомножителями от переменных x_j, x_n и x_l, x_n, где $j \neq l$. Будем также предполагать, что переменные x_j, x_n в отношении ρ_p не связаны отношением (17). Иными словами, пусть отношение

$$(\exists x_2)\dots(\exists x_{j-1})(\exists x_{j+1})\dots(\exists x_{n-1})\rho_p(x_2,\dots,x_n) \quad (20)$$

не имеет вида (17). Так как проекция отношения (20) по переменной x_j дает отношение $x_n \in G_n$, то согласно лемме 10 отношение (20) как элемент из $[R]_A$ может быть лишь конъюнкцией отношений $x_j \in H_j$ и $x_n \in G_n$, где $H_j \subseteq G_j$. Поэтому, как и выше, выбрав элемент a из H_j, получим, что отношение (19) не принадлежит множеству $[R]_A$.

Обратимся теперь к случаю, когда $k=4$, все неодноместные отношения из R содержатся в множестве $\{\lambda_4, \mu_4^2, \kappa_4, \kappa_4^1, \zeta_4, \xi_4, \chi_4^2\}$ и $R \cap \{\kappa_4, \kappa_4^1, \zeta_4, \xi_4\} \neq \varnothing$. При $|G_n| > 2$ справедливы приведенные выше рассуждения. Пусть $|G_n| = 2$. Если среди множеств $G_1,\dots,G_n$ имеется не

более двух взаимодополнительных (до E_4) множеств, то в силу леммы 10 получаем $\rho \in [R]_A$, что противоречит сделанному выше предположению. Допустим, что среди множеств $G_1, \dots, G_n$ имеются различные пересекающиеся множества и, например, G_{n-1}, G_n — такие два множества. Также будем предполагать, что $G_1 = E_2$ и ρ_0, ρ_1 принадлежат множеству $[R]_A$.

Пусть отношение ρ_0 как отношение из $[R]_A$ содержит конъюнктивно сомножитель (17), где $|G_j \cap G_n| = 1$, причем проекция отношения ρ_0 по всем переменным, отличным от x_j и x_n, совпадает с отношением (17). Тогда из отношения (17) (и, следовательно, из отношения ρ) на основании леммы 11 из [13] можно получить отношение ν_4^2. Это противоречит предположению о том, что все неодноместные отношения из R содержатся в $\{\lambda_4, \mu_4^2, \kappa_4, \kappa_4^1, \zeta_4, \xi_4, \chi_4^2\}$. Аналогичные рассуждения применимы для отношения ρ_1.

Таким образом, на основании леммы 10 можно считать, что каждое из отношений ρ_0, ρ_1 представимо в виде конъюнкции отношений типа (14), причем переменные этих отношений (14) не пересекаются, а любые два множества из $\{F_1 \dots, F_m\}$ либо совпадают, либо взаимодополнительны. Пусть для ρ_0 этими отношениями будут $\varphi_1(\tilde{x})$, $\varphi_2(\tilde{y}, x_{n-1})$, $\varphi_3(\tilde{z}, x_n)$, а для ρ_1 они равны $\psi_1(\tilde{u})$, $\psi_2(\tilde{v}, x_{n-1})$, $\psi_3(\tilde{w}, x_n)$ (для E_4 существует лишь три пары двухэлементных взаимодополнительных множеств).

Если каждому из отношений

$$(\exists \tilde{z})\varphi_3(\tilde{z}, x_n), \ (\exists \tilde{w})\psi_3(\tilde{w}, x_n) \tag{21}$$

удовлетворяет по одному элементу (которые, очевидно, различны), то отношение ρ представимо в виде

$$E_k^2(x_1)\&(\tau(x_1) = x_n)\&(\exists x_n)\rho(x_1, \dots, x_n),$$

где τ — подстановка на E_4 и $\tau(E_2) = G_n$. Как и выше, из этого представления легко следует, что множеству $[R]_A$ не принадлежит $(n-1)$-местное отношение $(\exists x_n)\rho(x_1, \dots, x_n)$.

Далее предполагаем, что хотя бы одному из отношений (21) удовлетворяют только два элемента. Аналогичное предположение будем считать выполненным для отношений $(\exists \tilde{y})\varphi_2(\tilde{y}, x_{n-1})$ и $(\exists \tilde{v})\psi_2(\tilde{v}, x_{n-1})$.

Так как $|G_n \cap G_{n-1}| = 1$, пусть, например, $|G_n \cap E_2| = 1$. Если отношения $\varphi_3(\tilde{z}, x_n)$ и $\psi_3(\tilde{w}, x_n)$ совпадают, то для некоторого отношения ω имеем

$$\rho(x_1, \dots, x_n) \equiv \omega(x_1, \tilde{x}, \tilde{y}, x_{n-1})\&\varphi_3(\tilde{z}, x_n).$$

Так как $\{x_1, \tilde{x}, \tilde{y}, x_{n-1}\} \cap \{\tilde{z}, x_n\} = \varnothing$, каждое из отношений $\omega(x_1, \tilde{x}, \tilde{y}, x_{n-1})$, $\varphi_3(\tilde{z}, x_n)$ принадлежит множеству $[\{\rho\}]_A$ и поэтому в множество $[R]_A$ отношения $\omega(x_1, \tilde{x}, \tilde{y}, x_{n-1})$, $\varphi_3(\tilde{z}, x_n)$ одновременно входить не

могут. Если же отношения $\varphi_3(\tilde{z}, x_n)$ и $\psi_3(\tilde{w}, x_n)$ различны, то пусть a — такой элемент, что оба значения $(\exists\tilde{y})\varphi_2(\tilde{y}, a)$, $(\exists\tilde{v})\psi_2(\tilde{v}, a)$ истинны (такой элемент существует, поскольку по предположению хотя бы одному из этих отношений удовлетворяют два элемента). Тогда в силу леммы 10 множеству $[R]_A$ не принадлежит отношение $\rho(x_1, \ldots, x_{n-2}, a, x_n)$, поскольку $|G_n \cap E_2| = 1$ и в конъюнктивные представления отношений $\rho_0(x_2, \ldots, x_{n-2}, a, x_n)$, $\rho_1(x_2, \ldots, x_{n-2}, a, x_n)$ входят различные непустые сомножители $\varphi_3(\tilde{z}, x_n)$, $\psi_3(\tilde{w}, x_n)$.

Аналогичным образом рассматривается случай, когда все неодноместные отношения из R входят в множество $\{\lambda_k, \mu_k^2, \chi_k^2\}$. Теорема доказана.

Сравнение с результатами из [10, 14] показывает, что при $k \geqslant 4$ A-классификация множества P_k отличается от соответствующей S-классификации только для значений k, кратных четырем. В этом случае в A-классификации появляются новые A-замкнутые классы, в определении которых участвует основное отношение ξ_k.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.** Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. № 3. С. 1–10; № 5. С. 1–9.
2. **Марченков С. С.** О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1979. Вып. 36. С. 5–22.
3. **Марченков С. С.** Об однородных алгебрах // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 4. С. 787–790.
4. **Марченков С. С.** Однородные алгебры // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1982. Вып. 39. С. 85–106.
5. **Марченков С. С.** О классификации алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265, № 3. С. 533–536.
6. **Марченков С. С.** О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики. II // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1983. С. 261–266.
7. **Марченков С. С.** Классификация алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1989. Вып. 2. С. 100–122.
8. **Марченков С. С.** О замкнутых классах в k-значной логике, содержащих переключательную однородную функцию // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, №2. С. 49–61.
9. **Марченков С. С.** Основные отношения S-классификации функций многозначной логики // Дискрет. математика. 1996. Т. 8, вып. 1. С. 99–128.

10. **Марченков С. С.** S-Классификация идемпотентных алгебр с конечным носителем // Докл. РАН. 1996. Т. 348, № 5. С. 587–589.

11. **Марченков С. С.** G-Предполные классы многозначной логики // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 3. С. 47–70.

12. **Марченков С. С.** Клоновая классификация дуально дискриминаторных алгебр с конечным носителем // Мат. заметки. 1997. Т. 61, вып. 3. С. 359–366.

13. **Марченков С. С.** A-Классификация конечных инъективных функций // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1997. Т. 4, № 2. С. 15–42.

14. **Марченков С. С.** S-Классификация функций многозначной логики // Дискрет. математика. 1997. Т. 9, вып. 3. С. 125–152.

15. **Марченков С. С.** A-Замкнутые классы идемпотентных функций многозначной логики, определяемые двуместными отношениями // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1998. Т. 5, № 1. С. 32–59.

16. **Марченков С. С.** A-Замкнутые классы многозначной логики, содержащие константы // Дискрет. математика. 1998. Т. 10, вып. 3. С. 10–26.

17. **Нгуен Ван Хоа.** О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики P_3 // Дискрет. математика. 1992. Т. 4, вып. 4. С. 82–95.

18. **Нгуен Ван Хоа.** О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискрет. математика. 1993. Т. 5, вып. 4. С. 87–108.

19. **Нгуен Ван Хоа.** Описание замкнутых классов, сохраняемых всеми внутренними автоморфизмами // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 3. С. 16–19.

20. **Нгуен Ван Хоа.** О структуре замкнутых классов k-значной логики, самодвойственных относительно транзитивных групп // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 6. С. 17–20.

21. **Нгуен Ван Хоа.** О замкнутых классах k-значной логики, самодвойственных относительно транзитивных групп // Дискрет. математика. 1996. Т. 8, вып. 1. С. 129–156.

22. **Риге Ж.** Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа // Кибернетический сб. М.: Мир, 1963. Вып. 7. С. 129–185.

23. **Яблонский С. В.** Введение в теорию функций k-значной логики // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974. С. 9–66.

24. **Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.** Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

25. **Янов Ю. И., Мучник А. А.** О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.
26. **Csákány B., Gavalcová T.** Finite homogeneous algebras. I // Acta Sci. Math. 1980. V. 42, N 1–2. P. 57–65.
27. **Post E. L.** Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. V. 43. P. 163–185.
28. **Post E. L.** Two-valued iterative systems of mathematical logic // Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.
29. **Rosenberg I. G.** Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpravy Československe Akad. Věd Řada Math. Přir. Věd. 1970. Bd 80. S. 3–93.

Адрес автора:

Институт прикладной
математики
им. М. В. Келдыша РАН,
Миусская площадь, 4,
125047 Москва, Россия.
E-mail:
marchen@applmat.msk.su

Статья поступила
27 октября 1998 г.