ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 1999. Серия 1. Том 6, № 1, 44–64

УДК 519.714.23

ДИАГНОСТИКА ЧАСТЕЙ СХЕМ В АВТОМАТНЫХ БАЗИСАХ*)

В. Н. Носков

Предлагается метод преобразования любой части произвольной схемы в автоматном базисе в подсхему, для которой возможна диагностика с хорошей локализацией возникающих неисправностей. Описано тестовое множество. Класс допустимых неисправностей весьма широк.

§ 1. Постановка задачи. Формулировка основного результата

Поиск методов синтеза схем, удобных для диагностики неисправностей и реализующих логические или автоматные функции, представляется важным и перспективным направлением в теории контроля и надежности дискретных устройств. С. Редди [12], В. И. Шевченко [10], А. П. Горяшко [2], Н. П. Редькин [8] разработали несколько методов построения удобных для тестирования схем из функциональных элементов. Авторы этих методов рассматривают неисправности, связанные с неправильной работой базисных элементов в схемах (чаще всего это константные неисправности на входах и выходах элементов схемы). При этом обычно накладываются ограничения на выбор элементного базиса. Нами в [3–7] также предложены новые методы синтеза схем из функциональных элементов, реализующих булевы функции и удобные для контроля неисправностей, когда допускаются неисправности более разнообразные, а элементный базис является полным и произвольным. Главным достоинством этих методов является то, что они обеспечивают построение схем, в которых с помощью тестовых процедур можно добиться детальной локализации неисправностей, т. е. достаточно точно указать в схеме те области, в которых имеются неисправные элементы. В настоящей статье мы обобщаем предложенный в [5] метод преобразования

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01634) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (код проекта 473).

логических схем на случай, когда схема состоит из базисных элементов, реализующих логические и автоматные функции.

Пусть имеется произвольная схема S, реализующая ограниченно-детерминированную функцию и являющаяся композицией базисных элементов — сильно связных конечных автоматов Мили (в статье используется терминология теории автоматов, принятая в [1, 9]). В настоящей работе описано такое преобразование схемы S в схему S', при котором произвольная подсхема B схемы S преобразуется в подсхему C, а оставшаяся часть схемы S не изменяется. В схеме S' имеется больше входов и выходов, чем в S (см. рис. 1; здесь и ниже $\widetilde{x}_t = (x_1, \ldots, x_t)$). Если на последние три входа исправной схемы S' подаются нули, то S' реализует ту же ограниченно-детерминированную функцию, что и схема S. Если в S' возникают неисправности из заданного класса, то с помощью предложенных ниже тестовых процедур можно выявить все такие неисправности в подсхеме C схемы S', устранение которых приведет к восстановлению правильной работы подсхемы C. В конце параграфа эти результаты сформулированы более четко в виде теоремы.

Перейдем к более точной постановке задачи.

Базис схем. Рассмотрим семейство $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1,\ldots,g}$ таких неинициальных сильно связных конечных автоматов Мили, что входным алфавитом автомата φ_i является множество $r(i)$-разрядных булевых векторов, а на выходе реализуется булева переменная, $1 \leqslant i \leqslant g$. (Автомат называется сильно связным, если для любой упорядоченной пары (σ', σ'') его внутренних состояний существует входное слово, которое переводит автомат из состояния σ' в состояние σ''.) Пусть $k(i)$ — число внутренних состояний автомата φ_i, $k = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant g} k(i)$ и $r = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant g} r(i)$. Семейство Φ состоит из g автоматов, каждый из которых имеет не более k внутренних состояний. Будем считать, что в Φ содержатся и тривиальные автоматы, т. е. автоматы с одним внутренним состоянием. При этом предполагается, что набор тривиальных автоматов является полным базисом в классе всех булевых функций (например, содержит конъюнкцию, дизъюнкцию двух переменных и отрицание переменной).

Пусть изображенная на рис. 1 схема S есть схема в базисе Φ, а B — произвольно выделенная ее часть (подсхема). Схему, образованную элементами из S, которые не входят в B, обозначим через A. Полагаем, что если схема S состоит из d базисных элементов, занумерованных числами $1, \ldots, d$, то в каждый момент времени ее внутреннее состояние можно задать d-разрядным вектором, i-й разряд которого есть внутреннее состояние i-го элемента схемы, $1 \leqslant i \leqslant d$. Таким образом, внутреннее состояние всей схемы S есть макросостояние, образованное внутренними

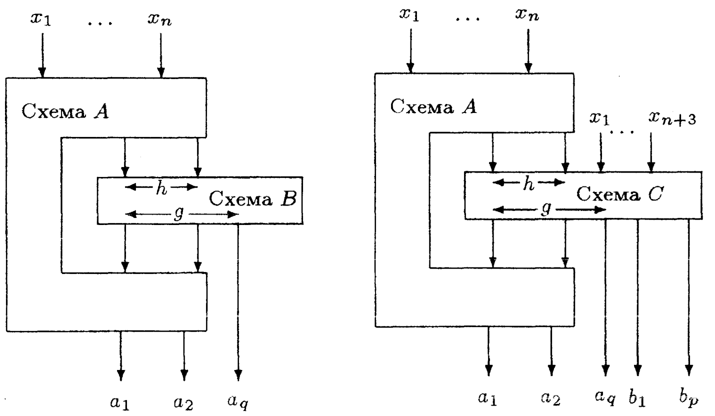

Схема $S = S(A, B, \tilde{x}_n)$ Схема $S' = S(A, C, \tilde{x}_{n+3})$

Рис. 1

состояниями ее базисных элементов. На рис. 1 справа изображена схема S', в которую преобразуется схема S, когда в ней подсхема B заменена на C. Схемы S и S' с выделенными в них частями A, B и C будем обозначать через $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ и $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$.

Допустимые неисправности. Обозначим через β произвольный базисный элемент схемы S.

a) Пусть β — тривиальный автомат с t входами, а $v_1, \ldots, v_t$ — входные полюсы элемента β, на которые в схеме могут поступать 0 и 1. Полюсы $v_1, \ldots, v_t$ будем отождествлять с одноименными булевыми переменными. В схеме $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$ на выходе элемента β реализуется булева функция $\beta(v_1, \ldots, v_t)$, а при появлении в $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$ неисправностей элемент β может превратиться в элемент β^*, реализующий произвольную булеву функцию β^* от переменных $v_1, \ldots, v_t$.

b) Пусть β — нетривиальный автомат с p входами и числом внутренних состояний $k(\beta)$. Тогда полагаем, что в неисправной схеме автомат β может превратиться в произвольный автомат Мили β^* с тем же входным алфавитом, что и у автомата β, и не более чем с $k(\beta)$ внутренними состояниями.

Таким образом, во всех случаях считаем, что появление неисправностей в автомате не увеличивает числа его внутренних состояний. Это касается как тривиальных, так и нетривиальных автоматов.

Аналогично определяются допустимые неисправности в схеме $S(A, B, \widetilde{x}_n)$.

Полагаем, что число неисправных элементов в схеме C не превышает m.

Введем следующие обозначения:

- $\diamond$ A^* и C^* — схемы, в которые преобразуются схемы A и C при появлении в них допустимых неисправностей; $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ — схема, в которую переходит схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$, когда ее подсхемы A и C преобразуются в схемы A^* и C^*.
- $\diamond$ $L(F)$ — сложность схемы F, т. е. число ее элементов.
- $\diamond$ $r = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant g} r(i)$, где $r(i)$ — число входов базисного элемента φ_i.
- $\diamond$ Пусть $\vec{\mathscr{P}}$ — последовательность n-разрядных булевых векторов. Обозначим через $\vec{\mathscr{P}}_{(000)}$ последовательность, полученную из $\vec{\mathscr{P}}$ заменой каждого n-разрядного вектора на $(n+3)$-разрядный: значения первых n разрядов в новом векторе те же, что и в заменяемом, а последние три разряда имеют нулевые значения.
- $\diamond$ $S_a(A, B, \sigma(A), \sigma(B), \vec{\mathscr{P}})$ — последовательность, реализуемая на выходах $a_1, \ldots, a_q$ схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$, если на ее входы подается последовательность $\vec{\mathscr{P}}$ и в начальный момент подсхемы A и B находились в состояниях $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ соответственно. Аналогично определяются последовательности

$$S_a(A, C, \sigma(A), \sigma(C), \vec{\mathscr{P}}_{(000)}), \quad S_b(A, C, \sigma(A), \sigma(C), \vec{\mathscr{P}}_{(000)}),$$
$$S_a(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{\mathscr{P}}_{(000)}), \quad S_b(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{\mathscr{P}}_{(000)}).$$

Здесь $S_b(\ldots)$ обозначает последовательность векторов, появляющихся в соответствующей схеме на выходах $b_1, \ldots, b_p$ (p — число дополнительных выходов в $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$).

Теорема. *Пусть $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ — схема в автоматном базисе, входными наборами которой являются n-разрядные булевы векторы, c — некоторое число, зависящее лишь от базиса, и $r < n$. Тогда существуют такая последовательность $\vec{\mathscr{Q}}$ длины $\lceil 6 \cdot 4^{rk+1} k^2 \ln(2k) \rceil$, состоящая из $(n+3)$-разрядных булевых векторов, и такая схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$ над автоматным базисом с выделенными в C частями $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \ldots, \mathscr{D}_s$, $s < cmL(B)$, что*

(a) *любой элемент из C содержится хотя бы в одной из частей $\mathscr{D}_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, и при этом $L(C) < cmL(B)$, $L(D_i) < c$, $p < cmL(B)$;*

(b) *для любых состояний $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ подсхем A и B схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ найдется такое состояние $\sigma(C)$ схемы C, что для любой последовательности $\vec{\mathscr{P}}$, состоящей из n-разрядных булевых векторов, справедливо равенство*

$$S_a(A, B, \sigma(A), \sigma(B), \vec{\mathscr{P}}) = S_a(A, C, \sigma(A), \sigma(C), \vec{\mathscr{P}}_{(000)});$$

(c) *при любых* $A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*)$ *по последовательности* $S_b(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{\mathscr{Q}})$ *множество частей* $\{\mathscr{D}_i\}_{1\leqslant i\leqslant s}$ *в схеме* C^* *можно разбить на два класса (* $\mathscr{D}(1, C^*)$ *и* $\mathscr{D}(2, C^*)$ *) такие, что*

— *если множество* $\mathscr{D}(1, C^*)$ *непусто, то любая часть* $\mathscr{D}_i$ *из* $\mathscr{D}(1, C^*)$ *содержит неисправный элемент из* C^*;

— *если множество* $\mathscr{D}(1, C^*)$ *пусто, то для произвольных состояний* $\sigma(A^*)$ *и* $\sigma(B)$ *подсхем* A^* *и* B *схемы* $S(A^*, B, \widetilde{x}_n)$ *найдется такое состояние* $\sigma(C^*)$ *схемы* C^*, *что для любой последовательности* $\vec{\mathscr{P}}$, *состоящей из* n*-разрядных булевых векторов, справедливо равенство*

$$S_a(A^*, B, \sigma(A^*), \sigma(B), \vec{\mathscr{P}}) = S_a(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{\mathscr{P}}_{(000)}).$$

Неравенства из (a) ограничивают сложность схемы C и размеры частей $\mathscr{D}_i$. Эти размеры характеризуют степень точности, с которой указывается место неисправного элемента в схеме. Предложение (b) утверждает, что при $x_{n+1} \equiv x_{n+2} \equiv x_{n+3} \equiv 0$ схема C моделирует схему B, т. е. $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$ превращается в схему, функционально эквивалентную схеме $S(A, B, \widetilde{x}_n)$. Утверждение (c) дает представление о полноте диагностики схемы: указываются места расположения неисправных элементов (с точностью до нескольких элементов, расположенных вместе с неисправным элементом в одной из частей $\mathscr{D}_i$). Если во всех частях из $\mathscr{D}(1, C^*)$ провести замену всех неисправных элементов на исправные, то схема C^* превратится в такую схему C^{**}, что класс $\mathscr{D}(1, C^{**})$ окажется пустым. Согласно второму утверждению из (c) схема C^{**} может моделировать работу схемы B из $S(A^*, B, \widetilde{x}_n)$, если установить C^{**} в подходящее состояние.

Доказательство теоремы конструктивно:

— указывается последовательность преобразований, которые превращают схему $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ в схему $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$, обладающую свойствами (a), (b) и (c) из утверждения теоремы;

— приведен алгоритм, позволяющий с использованием лишь последовательности $S_b(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{\mathscr{Q}})$ разбить множество частей схемы C^* на классы $\mathscr{D}(1, C^*)$ и $\mathscr{D}(2, C^*)$.

В основе преобразований схемы B в схему C лежит установка в B на линиях между внутренними полюсами специальных подсхем, которые играют роль коммутаторов, работающих в двух режимах. При работе в первом режиме коммутаторы проводят без изменения сигналы от некоторых своих входов к выходам. Этот режим работы коммутаторов используется при функционировании схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$, когда на ее основных выходах реализуется система функций, которую должна реализовать схема $S(A, B, \widetilde{x}_n)$. При работе во втором режиме коммутаторы позволяют передать значения с входных полюсов схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$

на входы некоторых ее элементов. Этот режим работы коммутаторов используется при диагностике неисправностей схемы. Он позволяет добиться на выходах всех элементов схемы C слабой зависимости значений друг от друга, что обеспечивает должный уровень локализации неисправностей в контролируемой схеме. Переключение режимов работы коммутаторов осуществляется подачей подходящих значений дополнительных переменных на их входы.

Ниже через $c_1, c_2, \ldots$ обозначаются константы, зависящие только от базиса.

§ 2. Схема C в $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$

Ниже предполагается, что $r < n$.

Схему C как часть схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$ можно получить двумя последовательными преобразованиями схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$.

Первое преобразование. Опишем подсхемы Q и D схемы R (рис. 2).

Схема Q. Если на первый, второй и третий входы схемы Q подаются k, v и w, то на ее выходе реализуется функция $\overline{k}v \vee kw$.

Схема D. Эта схема осуществляет отображение $(a_1, \ldots, a_{2m+1}) \to b(a_1, \ldots, a_{2m+1})$, где

$$b(a_1, \ldots, a_{2m+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{i=1}^{2m+1} a_i > m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

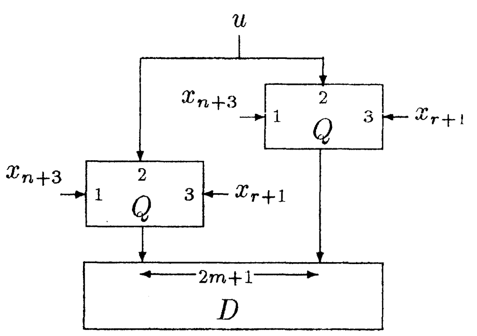

Рис. 2. Схема R

Ясно, что если схема D исправна, а в R содержится не более m неисправных схем Q, то R — самокорректирующаяся схема.

Функция $b(a_1, \ldots, a_{2m+1})$ является симметрической булевой функцией от $2m+1$ переменных. Известно ([11], с. 369), что такую функцию можно реализовать схемой в базисе $\{\wedge, \vee, ^-\}$, содержащей не более $c_1 m$ элементов. Отсюда следует, что в произвольном базисе можно построить схему R такую, что

$$L(R) \leqslant c_2 m. \tag{2.1}$$

Пусть $w_{i_1}, \ldots, w_{i_s}$ — полюсы схемы A, не являющиеся входными полюсами схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$, и пусть к полюсам $w_{i_1}, \ldots, w_{i_s}$ схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ подключены входные полюсы схемы B. Выполним следующие преобразования. Вход схемы B, подключенный к полюсу w_{i_1}, переключим на выход схемы R, а к полюсу w_{i_1} подключим вход схемы R. Аналогичные переключения выполним для полюсов $w_{i_2}, \ldots, w_{i_s}$, используя каждый раз новый экземпляр схемы R. В результате между полюсами $w_{i_1}, \ldots, w_{i_s}$ и входными полюсами схемы B появится s одинаковых схем R.

На этом первое преобразование схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ заканчивается. Схему, в которую превратилась схема B после первого преобразования, обозначим через B_1. Эта схема B_1 состоит из схемы B и h схем R. Отсюда и из (2.1) следует, что

$$L(B_1) \leqslant c_3 m r L(B). \tag{2.2}$$

Второе преобразование. Это преобразование схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ связано с размещением схем K на линиях, соединяющих некоторые пары элементов в подсхеме B_1. При этом схема B_1 преобразуется в схему C. Некоторые подсхемы схемы C получают метки, являющиеся трехразрядными векторами. Эти преобразования показаны на рис. 3. Пусть φ_i, φ_q — базисные элементы. На рис. 3 справа приведены фрагменты схемы C, в которые преобразуются соответствующие фрагменты схемы B_1, изображенные на рисунке слева. При этом во всех фрагментах схемы B_1, указанных в левых частях рис. 3 и схемах, полученных из B_1 после таких преобразований, проводятся аналогичные преобразования до тех пор, пока в полученной схеме не исчезнут фрагменты, показанные в левых частях рассматриваемых рисунков. Преобразования проводятся при условии, что базисные элементы φ_i и φ_q, изображенные в левых частях рис. 3, находится вне схем Q и K.

Схема K. Эта схема имеет три входа и один выход. Если на ее входы с номерами 1, 2, 3 подаются x, y, z, то на выходе схемы K реализуется функция $\bar{x}y \vee xz$.

Обозначим через C схему, полученную после указанных преобразований. Элементы схемы C, находящиеся вне схем K и Q, будем называть *выделенными*. Всем схемам Q, K и выделенным элементам ставятся в соответствие метки (трехразрядные векторы) по следующему правилу (см. рис. 3).

- Каждая схема Q получает метку $(Q, *, r+1)$.
- Выделенный элемент φ_i получает метку $(\varphi_i, K, *)$, $1 \leqslant i \leqslant g$.
- Схема K получает метку:

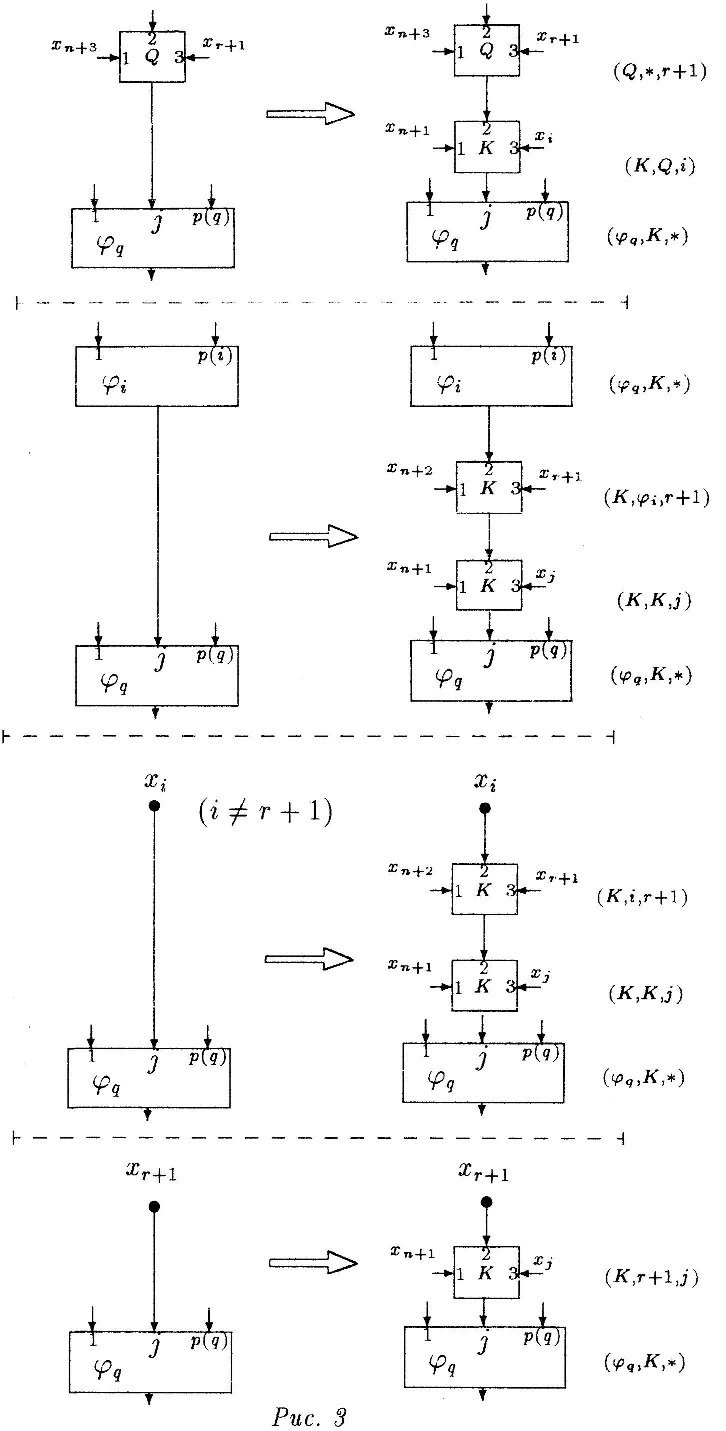
x_{n+3}
1 Q 3
x_{r+1}
$(Q,*,r+1)$
x_{n+1}
1 K 3
x_i
(K,Q,i)
$p(q)$
φ_q
$(\varphi_q,K,*)$
$p(i)$
φ_i
x_{n+2}
$(K,\varphi_i,r+1)$
x_j
(K,K,j)
$(i \neq r+1)$
$(K,i,r+1)$
x_{r+1}
$(K,r+1,j)$

Рис. 3

(K, Q, i), если вход схемы K подключен к выходу схемы Q, а выход схемы K — к i-му входу выделенного элемента;

$(K, \varphi_i, r+1)$, если ее вход подключен к выходу базисного элемента φ_i, $1 \leqslant i \leqslant g$;

$(K, i, r+1)$, если ее вход подключен к полюсу x_i, $i \neq r+1$;

$(K, r+1, j)$, если ее вход подключен к полюсу x_{r+1}, а ее выход — к j-му входу выделенного элемента;

(K, K, j), если ее вход подключен к полюсу с меткой $(K, i, r+1)$ или к полюсу с меткой $(K, \varphi_i, r+1)$, а ее выход — к j-му входу выделенного элемента.

На этом второе преобразование заканчивается.

Функции, реализуемые схемой $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$. Поскольку при построении схемы C все добавляемые к B элементы являются тривиальными автоматами, получаем очевидное утверждение.

Лемма 1. *Для любых состояний $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ подсхем A и B схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ найдется такое состояние $\sigma(C)$ схемы C, что для любой последовательности $\vec{\mathscr{P}}$, состоящей из n-разрядных булевых векторов, справедливо равенство*

$$S_a(A, B, \sigma(A), \sigma(B), \vec{\mathscr{P}}) = S_a(A, C, \sigma(A), \sigma(C), \vec{\mathscr{P}}_{(000)}).$$

Блоки в схеме. Все части схемы C, отмеченные метками, будем называть *блоками схемы.* Таким образом, блоками являются все схемы Q и K, а также некоторые базисные элементы.

Выходы схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$. Будем считать, что выход каждого блока в C является выходом схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$. Таким образом, схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$ имеет выходы, которых нет в $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ (на рис. 1 они обозначены $b_1, \dots, b_p$). Поскольку C получается из B_1 добавлением не более $2rL(B)$ схем K сложности 4 (в базисе $\wedge, \vee, \bar{\ }$), то из (2.2) следует

$$p \leqslant L(C) < c_4 m L(B). \tag{2.3}$$

§ 3. Контроль схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$

Пусть β — произвольная подсхема схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$. Обозначим через β' схему, в которую превращается схема β при появлении в $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$ допустимых неисправностей, т. е. при преобразовании схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$ в схему $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$. Ниже используются одинаковые обозначения для схем β и β'; например, обе схемы могут быть обозначены через β. Это не будет приводить к неоднозначности в рассуждениях, поскольку будет указано, для какой из схем, $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$ или $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$, схема β является подсхемой. Будем считать, что если схема β из $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$ является блоком, то β из $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ также является блоком. Если блок δ входит в окрестность блока β из $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$, то в этом и только в этом случае соответствующий блок δ из $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ входит в окрестность блока β из $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$.

Окрестность блока. Пусть блок β имеет вектор-метку (U, V, W). *Окрестностью блока* β называется

- блок β и блок Q, выход которого подключен к входу блока β и $(U, V, W) = (K, Q, j)$, $1 \leqslant j \leqslant r$;
- множество блоков в C, состоящее из блока β и всех блоков K, выходы которых подключены к входам блока β и $(U, V, W) = (\varphi_i, K, *)$;
- множество блоков в C, состоящее из блока β, блока φ_i, выход которого подключен к входу блока β, и всех блоков K, выходы которых подключены к входам рассматриваемого блока φ_i и $(U, V, W) = (K, \varphi_i, r+1)$;
- блок β и блок K, если его выход подключен к входу блока β и $(U, V, W) = (K, K, j)$;
- блок β, если он имеет метку $(K, i, r+1)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, либо метку $(K, r+1, j)$, $1 \leqslant j \leqslant r$, либо метку $(Q, *, r+1)$.

Входная последовательность, остаточно различающая все автоматы с k состояниями. Пусть U — множество инициальных автоматов Мили и пусть входная последовательность $\mathscr{P}$ такова, что для любых двух автоматов M_1 и M_2 из U справедливо: или M_1 и M_2 при подаче слова $\mathscr{P}$ выдают различные выходные слова, или M_1 и M_2 после подачи слова $\mathscr{P}$ реализуют одинаковые функции. Тогда будем говорить, что входное слово $\mathscr{P}$ *остаточно различает* автоматы из множества U.

Если множество U состоит из всех инициальных автоматов Мили, каждый из которых имеет не более k состояний, то соответствующая входная последовательность $\mathscr{P}$ называется последовательностью, *остаточно различающей все автоматы с k состояниями.* (Подробнее об остаточной различимости см. в [9, с. 263].)

Последовательности $\vec{\mathscr{Q}}$, $\vec{\mathscr{Q}}_{01}$, $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$, $\vec{\mathscr{Q}}_{11}$. Пусть $\widetilde{a}_r(1), \widetilde{a}_r(2), \ldots, \widetilde{a}_r(t)$ — последовательность r-разрядных булевых векторов, остаточно различающая все автоматы с k состояниями.

Рассмотрим следующую таблицу:

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \dots \\ r \\ r+1 \\ r+2 \\ \dots \\ n \\ n+1 \\ n+2 \\ n+3 \end{array}
\left\| \begin{array}{llllllll}
a_1(1) & a_1(2) & \dots & a_1(t) & a_1(1) & a_1(2) & \dots & a_1(t) \\
a_2(1) & a_2(2) & \dots & a_2(t) & a_2(1) & a_2(2) & \dots & a_2(t) \\
\dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & \\
a_r(1) & a_r(2) & \dots & a_r(t) & a_r(1) & a_r(2) & \dots & a_r(t) \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
a_1(1) & a_1(2) & \dots & a_1(t) & a_1(1) & a_1(2) & \dots & a_1(t) \\
\dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & \\
a_1(1) & a_1(2) & \dots & a_1(t) & a_1(1) & a_1(2) & \dots & a_1(t) \\
c & c & \dots & c & c & c & \dots & c \\
d & d & \dots & d & d & d & \dots & d \\
1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1
\end{array} \right\|$$

Часть таблицы, заключенная в прямые скобки, определяет последовательность $\vec{\mathscr{Q}}_{cd}$, образованную $(n+3)$-разрядными вектор-столбцами. Число векторов в $\vec{\mathscr{Q}}_{cd}$ равно $2t$. Слева указаны номера строк.

Придавая параметрам c и d значения 0 и 1, определим последовательности $\vec{\mathscr{Q}}_{01}$, $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$, $\vec{\mathscr{Q}}_{11}$, каждая из которых имеет длину $2t$.

Каждой метке (U,V,W) поставим в соответствие последовательность $\vec{\mathscr{Q}}(U,V,W)$ следующим образом:

$$\vec{\mathscr{Q}}(U,V,W) = \begin{cases} \vec{\mathscr{Q}}_{10}, & \text{если } (U,V,W) \in \{(Q,*,r+1), \\ & (\varphi_i, K, *) \mid 1 \leqslant i \leqslant p\}; \\ \vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}, & \text{если } (U,V,W) \in \{(K,K,j),(K,Q,j), \\ & (K,r+1,j) \mid 1 \leqslant j \leqslant r\}; \\ \vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}, & \text{если } (U,V,W) \in \{(K,\varphi_i,r+1),(K,j,r+1) \mid \\ & 1 \leqslant i \leqslant p, j = 1,\dots,r,\ r+2,\dots,n\}. \end{cases}$$

Здесь выражение $\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$ означает последовательность длины $4t$, в которой начальный отрезок длины $2t$ есть последовательность $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$, а оставшийся отрезок является последовательностью $\vec{\mathscr{Q}}_{11}$. Аналогично определяется $\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$. Положим $\vec{\mathscr{Q}} = \vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$.

Схема, правильная относительно блока. Предположим, что β имеет метку (U,V,W). Пусть окрестность $O(\beta)$ элемента β состоит из блоков $\gamma_1,\dots,\gamma_{s(\beta)}$. В окрестности $O(\beta)$ может содержаться не более одного нетривиального блока. Рассмотрим варианты (i) и (ii).

(i) В $O(\beta)$ есть нетривиальный блок. Обозначим этот блок через γ_1, а остальные блоки из $O(\beta)$ через $\gamma_2,\dots,\gamma_{s(\beta)}$. Блок β — это блок γ_i при некотором значении $i \in \{1,\dots,s(\beta)\}$. Пусть на входы схемы

$S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ подается последовательность $\vec{\mathscr{Q}}$. Обозначим через $\gamma_i^*(\vec{\mathscr{Q}}, \beta)$ последовательность, появляющуюся на выходе блока γ_i в то время, когда на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ подается подпоследовательность $\vec{\mathscr{Q}}(U, V, W)$ из $\vec{\mathscr{Q}}$. Если здесь вместо схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ рассмотреть схему $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$, то соответствующую последовательность, появляющуюся в этой схеме на выходе блока γ_i, обозначим через $\gamma_i(\vec{\mathscr{Q}}, \beta)$.

Предположим, что в $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$ можно указать такое состояние q нетривиального элемента γ_1 из $O(\beta)$, что если γ_1 установить в состояние q и подать $\vec{\mathscr{Q}}$ на входы схем $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$ и $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$, то будет выполняться равенство

$$\gamma_i(\vec{\mathscr{Q}}, \beta) = \gamma_i^*(\vec{\mathscr{Q}}, \beta), \ 1 \leqslant i \leqslant s(\beta). \tag{3.1}$$

В этом случае схема $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ называется *$\vec{\mathscr{Q}}$-правильной относительно β*.

(ii) В $O(\beta)$ нет нетривиальных блоков. В этом случае схема $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ называется ***$\vec{\mathscr{Q}}$-правильной относительно блока β***, если в процессе подачи на входы схем $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$ и $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ последовательности $\vec{\mathscr{Q}}$ при прохождении ее подпоследовательности $\vec{\mathscr{Q}}(U, V, W)$ на выходах блоков $\gamma_1, \ldots, \gamma_{s(\beta)}$ из $O(\beta)$, принадлежащих этим схемам, выполняется соотношение (3.1).

Последовательность, полная относительно блока.

1. Пусть β — тривиальный блок из C^* с p входами. Обозначим через S_β множество всех наборов из $\{0,1\}^p$, появляющихся на входах блока β, когда на входы схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$ подаются всевозможные последовательности наборов из $\{0,1\}^{n+3}$. Последовательность $\vec{\mathscr{Q}}$ векторов из $\{0,1\}^{n+3}$ называется *полной относительно тривиального блока β*, если при подаче $\vec{\mathscr{Q}}$ на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ на входах блока β появляются все наборы из S_β.

2. Будем считать, что если нетривиальный блок имеет p входов и $p < r$, то элементами входного алфавита такого блока служат r-разрядные булевы векторы, т. е. кроме имеющихся p входов автомат имеет еще $r - p$ фиктивных входов, на которые подаются значения переменных $x_{p+1}, \ldots, x_r$. Этот способ изменения числа входов блока никак не влияет на его функционирование, зато существенно облегчает дальнейшее изложение. Пусть β — нетривиальный блок из C. Последовательность $\vec{\mathscr{Q}}$, состоящая из векторов множества $\{0,1\}^{n+3}$, называется ***полной относительно нетривиального блока β***, если при подаче последовательности $\vec{\mathscr{Q}}$ на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ на входах β появляется

последовательность, содержащая отрезок, являющийся последовательностью r-разрядных векторов, остаточно различающей все автоматы с k состояниями.

Утверждение 1. *Последовательность, остаточно различающая все автоматы с k состояниями, для которых входными наборами служат все r-разрядные булевы векторы, должна содержать все эти векторы.*

Это утверждение очевидно.

Известно (см. [9], с. 266), что существует последовательность длины $\lceil 4k^2h^{2k}\ln(2k)\rceil$, остаточно различающая все инициальные автоматы не более чем с k состояниями (здесь h — мощность входного алфавита). Отсюда, а также из определения последовательности $\vec{\mathscr{Q}}$ и того факта, что в рассматриваемом случае $h = 2^r$, получаем

Утверждение 2. *В качестве последовательности $\vec{\mathscr{Q}} = \vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$ можно взять последовательность длины $\lceil 6 \cdot 4^{rk+1}k^2\ln(2k)\rceil$.*

Обозначим через $\mathscr{E}(C^*)$ совокупность блоков в C^*, не являющихся блоками типа Q. Пусть (U,V,W) — метка блока $\beta \in \mathscr{E}(C^*)$.

$\vec{\mathscr{Q}}$-СОВЕРШЕННАЯ СХЕМА ОТНОСИТЕЛЬНО БЛОКА. Схема $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ называется *$\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной относительно блока β*, если $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ является $\vec{\mathscr{Q}}(U,V,W)$-правильной относительно β.

Лемма 2. *Пусть $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ является $\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной схемой относительно блока β из $\mathscr{E}(C^*)$ и β имеет метку (U,V,W). Тогда последовательность $\vec{\mathscr{Q}}(U,V,W)$ является полной относительно β.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть β — произвольный блок из $\mathscr{E}(C^*)$ с меткой (U,V,W) и $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ есть $\mathscr{P}(U,V,W)$-правильная схема относительно β. Возможны следующие случаи выбора метки блока β из $\mathscr{E}(C^*)$.

СЛУЧАЙ 1. $(U,V,W) = (K,Q,i)$. Тогда $\vec{\mathscr{Q}}(U,V,W)=\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$, а β является блоком типа K, которому в схеме непосредственно предшествует блок типа Q. Пусть $\widetilde{x}_{n+3}$ из $\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$ подается на входы схемы $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$. В этом случае $x_{n+3} = 1$, и в силу $\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$-правильности схемы относительно β на входы блока β с номерами 1, 2, 3 подаются значения переменных x_{n+1}, x_{r+1}, x_i $(i \leqslant r)$ соответственно. Из таблицы видно, что если $\widetilde{x}_{n+3}$ принимает все значения из $\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$, то вектор (x_{n+1}, x_{r+1}, x_i) принимает все восемь значений. Поэтому последовательность $\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$ полна относительно β.

СЛУЧАЙ 2. $(U,V,W) = (\varphi_i, K, *)$. Тогда $\vec{\mathscr{Q}}(U,V,W) = \vec{\mathscr{Q}}_{10}$, а β есть базисный элемент φ_i с $p = p(i)$ входами. Блок φ_i может быть либо тривиальным, либо нетривиальным. Рассмотрим эти варианты.

a) φ_i — нетривиальный блок. Если $\widetilde{x}_{n+3}$ из $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$ подается на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$, то в силу равенства $x_{n+1} = 1$ и $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$-правильности схемы относительно β на входы блока β с номерами $1, 2, \ldots, p(i)$ подаются значения переменных $x_1, \ldots, x_p(i)$ соответственно. Из таблицы видно, что когда $\widetilde{x}_{n+3}$ принимает первые t значений из $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$, вектор $\widetilde{x}_p(i)$ принимает значения $\widetilde{\alpha}_{p(i)}(1), \widetilde{\alpha}_{p(i)}(2), \ldots, \widetilde{\alpha}_{p(i)}(t)$, т. е. на входы блока β подается последовательность, остаточно различающая все автоматы с k состояниями. Это означает, что последовательность $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$ полна относительно β.

b) φ_i — тривиальный блок. Если вектор $\widetilde{x}_{n+3}$ последовательно принимает значения из последовательности $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$, то вектор $(x_1, \ldots, x_{p(i)})$ дважды пробегает значения последовательности $\widetilde{\alpha}_{p(i)}(1), \widetilde{\alpha}_{p(i)}(2), \ldots, \widetilde{\alpha}_{p(i)}(t)$. Согласно утверждению 1 эта последовательность в качестве своих членов содержит все $p(i)$-разрядные булевы векторы. Это означает, что вектор $\widetilde{x}_p$ пробегает все 2^p своих возможных значений. Следовательно, последовательность $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$ полна относительно β.

Случай 3. $(U, V, W) = (K, \varphi_i, r+1)$. Тогда $\vec{\mathscr{Q}}(U, V, W) = \vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$, а β есть тривиальный блок типа K; в рассматриваемой схеме ему непосредственно предшествует блок φ_i. Пусть $\widetilde{x}_{n+3}$ из $\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$ подается на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$. Тогда $x_{n+1} = 1$. В силу $\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$-правильности схемы относительно β на входы блока β с номерами 1, 2, 3 подаются значения переменных x_{n+2}, $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{p(i)})$, x_{r+1} соответственно. Из таблицы видно, что когда $\widetilde{x}_{n+3}$ принимает все значения из $\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$, набор $(x_{n+2}, \varphi_i(x_1, \ldots, x_{p(i)}), x_{r+1})$ принимает все значения из S_β. Это означает, что последовательность $\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$ полна относительно β.

Случай 4. $(U, V, W) = (K, i, r+1)$, $i \neq r+1$. Тогда $\vec{\mathscr{Q}}(U, V, W) = \vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$, а β является тривиальным блоком типа K, на входы которого подаются значения переменных x_{n+2}, x_i, x_{r+1}. Если $\widetilde{x}_{n+3}$ принимает все значения из множества $\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$, то тройка его компонент x_{n+2}, x_i, x_{r+1} принимает все восемь значений, что свидетельствует о полноте последовательности $\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$ относительно β.

Случай 5. $(U, V, W) = (K, r+1, j)$, $j \leqslant r$. Тогда $\vec{\mathscr{Q}}(U, V, W) = \vec{\mathscr{Q}}_{10}$, а β является тривиальным блоком типа K, на входы которого подаются значения переменных x_{n+1}, x_{r+1}, x_j. Когда $\widetilde{x}_{n+3}$ принимает все значения из множества $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$, тройка переменных x_{n+1}, x_{r+1}, x_j принимает восемь значений. Следовательно, последовательность $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$ полна относительно β.

Случай 6. $(U, V, W) = (K, K, j)$. Тогда $\vec{\mathscr{Q}}(U, V, W) = \vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$, а β является тривиальным блоком типа K; ему в схеме C предшествует блок K с меткой либо $(K, i, r+1)$, либо $(K, \varphi_t, r+1)$, где $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant t \leqslant g$. При $x_{n+2} = 1$ в силу $\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$-правильности схемы относительно β на входы блока β подаются значения переменных x_{n+1}, x_{r+1}, x_j. Если $\widetilde{x}_{n+3}$ принимает все значения из $\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$, то $x_{n+2} = 1$, а тройка переменных x_{n+1}, x_{r+1}, x_j принимает восемь значений. Это означает, что последовательность $\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$ полна относительно β.

Мы убедились, что во всех случаях последовательность $\vec{\mathscr{Q}}(U, V, W)$ полна относительно блока β. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ не является $\mathscr{P}$-совершенной схемой относительно β из $\mathscr{E}(C^*)$, то в окрестности блока β найдется неисправный блок.*

Доказательство. Пусть схема $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ не является $\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной относительно β из $\mathscr{E}(C^*)$. Предположим, что блок β имеет метку (U, V, W) и в его окрестности найдется блок γ_1, являющийся нетривиальным автоматом. Тогда согласно определению $\mathscr{Q}$-совершенной схемы при любом внутреннем состоянии блока γ_1 из $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$ в $O(\beta)$ схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ имеется блок γ_i в $O(\beta)$ такой, что

$$\gamma_i(\vec{\mathscr{Q}}, \beta) \neq \gamma_i^*(\vec{\mathscr{Q}}, \beta). \tag{3.2}$$

Последовательности $\gamma_i(\vec{\mathscr{Q}}, \beta)$ и $\gamma_i^*(\vec{\mathscr{Q}}, \beta)$ описаны выше в определении $\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной схемы.

Рассмотрим всевозможные варианты выбора метки (U, V, W), когда γ_i и β различны (вариант A) и когда γ_i и β совпадают (вариант B).

Вариант A. γ_i — отличный от β блок из окрестности β.

Случай A.1. $(U, V, W) = (K, Q, j)$. Тогда γ_i есть блок типа Q и $\vec{\mathscr{Q}}(U, V, W) = \vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$. Если на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ подается любой вектор $\widetilde{a}_{n+3}$ из $\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{10}$, то $a_{n+3} = 1$. Если блок γ_i исправный, то независимо от значения, подаваемого на второй вход блока γ_i, на выходе должно появиться значение a_{r+1}. Если блок γ_i удовлетворяет (3.2), то, очевидно, он неисправен.

Случай A.2. $(U, V, W) = (\varphi_l, K, *)$. Тогда $\vec{\mathscr{Q}}(U, V, W) = \vec{\mathscr{Q}}_{10}$ и γ_i — блок типа K, выход которого соединен в схеме с некоторым j-м входом блока φ_l. Если на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ подается вектор $\widetilde{a}_{n+3}$ из $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$, то на первый вход блока γ_i подается значение $a_{n+1} = 1$. Если блок γ_i исправный, то независимо от значения, подаваемого на его второй вход, на выходе блока γ_i должно появиться значение a_j. Поскольку имеет место соотношение (3.2), блок γ_i неисправный.

Случай A.3. $(U, V, W) = (K, \varphi_l, r+1)$. Тогда $\vec{\mathscr{Q}}(U, V, W) = \vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$. В окрестности блока β находятся блок φ_l и $p(l)$ блоков типа K, где $p(l)$ —

число входов блока φ_l. Блок γ_i может быть одним из этих $p(l)$ блоков либо блоком φ_l. Рассмотрим эти случаи.

Случай A.3.1. Пусть γ_i — блок типа K и его выход подключен к j-му входу блока φ_l. Если на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ подается вектор $\widetilde{z}$ из $\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$, то $z_{n+1} = 1$ и это значение подается на первый вход блока γ_i. Если блок γ_i исправный, то на его выходе должно появиться значение z_j, не зависящее от значения, подаваемого на его второй вход. Если выполняется (3.2), то блок γ_i, очевидно, неисправен.

Случай A.3.2. $K_1, \ldots, K_{p(l)}$ — блоки из окрестности блока β, выходы которых подключены к входам блока φ_l, принадлежащего окрестности блока β. Предположим, что при подаче вектора $\widetilde{z}$ из $\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$ на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ на выходах упомянутых блоков типа K появились правильные значения (вариант, когда неверные значения появляются на выходах этих блоков, уже рассмотрен). Тогда можно утверждать, что неисправен блок φ_l. Действительно, если на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ подается последовательность $\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$, то на вход блока φ_l с $p(l)$ входами должна поступить последовательность, остаточно расшифровывающая автоматы с k состояниями. В силу (3.2) автомат γ_i из схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$ не имеет ни одного состояния, эквивалентного тому, в котором находился блок γ_i в схеме $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$. Значит, в схеме $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ блок γ_i неисправен.

Случай A.4. $(U, V, W) = (K, K, j)$. Тогда $\vec{\mathscr{Q}}(U, V, W) = \vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$ и γ_i есть блок типа K. Если на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ подается $\widetilde{z}$ из $\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$, то $z_{n+2} = 1$ подается на первый вход блока K. Тогда на выходе этого блока должно появиться значение переменной z_{r+1}, не зависящее от того, какие значения поступят на второй вход блока γ_i. Отсюда следует, что если выполняется (3.2), то γ_i — неисправный блок, так как при правильных значениях на входе блока появляются неправильные значения на его выходе.

Случай A.5. Если $(U, V, W) \in \{(K, i, r+1), (K, r+1, j)\}$, где $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant r$, то в окрестности блока β нет других блоков.

Мы рассмотрели все варианты, когда в окрестности блока β есть отличный от β блок γ_i, для которого выполняется соотношение (3.2).

Вариант B. Схема $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ не является $\vec{\mathscr{Q}}(U, V, W)$-правильной относительно β и в то же время является $\vec{\mathscr{Q}}(U, V, W)$-правильной относительно всех остальных блоков из окрестности β. Соотношение (3.2) можно переписать так:

$$\beta(\vec{\mathscr{Q}}, \beta) \neq \beta^*(\vec{\mathscr{Q}}, \beta). \tag{3.3}$$

Рассмотрим варианты, связанные со значениями (U, V, W).

Случай B.1. $(U,V,W)=(K,Q,j)$, $j=1,\dots,r$. В этом случае $\vec{\mathscr{Q}}(U,V,W)=\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$. Схема $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ является $\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$-правильной относительно каждого отличного от β блока γ_i из окрестности β. Поэтому если на входы схемы $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ подается вектор $\widetilde{z}$ из $\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$, то на входах блока β появляется тройка значений переменных z_{n+1}, z_{r+1}, z_j, не зависящих от того, есть ли в C^* вне окрестности β неисправные блоки. Отсюда следует, что если выполняется (3.3), то β — неисправный блок, так как при правильных значениях на входе этого блока появляются неправильные значения на его выходе.

Случай B.2. $(U,V,W)=(\varphi_l,K,*)$, $l=1,\dots,g$. В этом случае $\vec{\mathscr{Q}}(U,V,W)=\vec{\mathscr{Q}}_{10}$. Схема $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ является $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$-правильной относительно каждого отличного от β блока γ_i из окрестности блока β. Поэтому если на входы схемы $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ подается последовательность $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$ и β имеет $p(l)$ входов, то на его $p(l)$ основных и $r-p(l)$ фиктивных входах появляется последовательность $\tilde{a}_{p(l)}(1),\tilde{a}_{p(l)},(2)\dots,\tilde{a}_r(t)$, $\tilde{a}_{p(l)}(1),\tilde{a}_{p(l)}(2),\dots,\tilde{a}_r(t)$, остаточно расшифровывающая автоматы с k состояниями. В силу (3.2) γ_i из схемы $S(A,C,\widetilde{x}_{n+3})$ не имеет ни одного состояния, эквивалентного тому, в котором находился блок γ_i в схеме $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$. Значит, в схеме $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ блок γ_i неисправен.

Случай B.3. $(U,V,W)=(K,\varphi_l,r+1)$, $i=1,\dots,p$. В этом случае $\vec{\mathscr{Q}}(U,V,W)=\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$. Схема $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ является $\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$-правильной относительно каждого отличного от β блока γ_i из окрестности β. Это означает, что есть такое состояние исправного автомата φ_l (единственное, если в нем нет двух эквивалентных состояний), при котором выполняется следующее условие. Если на входы схемы $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ подается последовательность $\widetilde{z}$ из $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$, то на входах блока β появляется последовательность трехразрядных векторов $\widetilde{b}(j)=(1,\varphi_l(\widetilde{e}(j)),e_{r+1}(j))$, $j=1,\dots,4t$; ($\widetilde{e}(j)$ есть $p(l)$-разрядный булевый вектор, образованный первыми $p(l)$ компонентами j-го вектора в последовательности $\mathscr{Q}_{10}\mathscr{Q}_{11}$; $e_{r+1}(j)$ — это $(r+1)$-я компонента j-го вектора из $\mathscr{Q}_{10}\mathscr{Q}_{11}$). Отсюда следует, что если имеет место (3.3), то β — неисправный блок, так как при правильных значениях на входе блока появляются неправильные значения на его выходе.

Случай B.4. $(U,V,W)=(K,i,r+1)$, $i=1,\dots,r,r+2,\dots,n$. Тогда $\vec{\mathscr{Q}}(U,V,W)=\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$. Схема $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ является $\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$-правильной относительно каждого отличного от β блока γ_i из окрестности β. Поэтому если на входы схемы $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ подается вектор $\widetilde{z}$ из $\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$, то на входах блока β появляется набор значений переменных z_{n+2}, z_i, z_{r+1}, не зависящий от того, есть ли вне окрестности β неисправные блоки. Отсюда следует, что если имеет место (3.3), то β — неисправный блок, так как при правильных значениях на входе блока появляются неправильные значения на его выходе.

Случай В.5. $(U,V,W)=(K,r+1,j)$, $j=1,\dots,r$. Тогда $\vec{\mathscr{D}}(U,V,W) = \vec{\mathscr{D}}_{11}\vec{\mathscr{D}}_{01}$. Схема $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ является $\vec{\mathscr{D}}_{11}\vec{\mathscr{D}}_{01}$-правильной относительно каждого отличного от β блока γ_i из окрестности β. Поэтому если на входы схемы $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ подается $\widetilde{z}$ из $\vec{\mathscr{D}}_{11}\vec{\mathscr{D}}_{01}$, то на входах блока β должен появиться набор значений переменных z_{n+1}, z_{r+1}, z_j, не зависящий от того, есть ли вне окрестности β неисправные блоки. Отсюда следует, что если имеет место (3.3), то β — неисправный блок, так как при правильных значениях на входе блока появляются неправильные значения на его выходе.

Случай В.6. $(U,V,W)=(K,K,j)$, $j=1,\dots,r$. Тогда $\vec{\mathscr{D}}(U,V,W) = \vec{\mathscr{D}}_{11}\vec{\mathscr{D}}_{01}$. Если вектор $\widetilde{z}$ из $\vec{\mathscr{D}}_{11}\vec{\mathscr{D}}_{01}$ подается на входы схемы $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$, то на входах блока β появляется набор значений z_{n+1}, z_{r+1}, z_j, не зависящий от того, есть ли неисправности вне окрестности β. Отсюда следует, что если имеет место (3.3), то β — неисправный блок, так как при правильных значениях на входе блока появляются неправильные значения на его выходе.

Итак, мы установили, что во всех рассмотренных вариантах существует неисправный блок в окрестности блока β. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ является $\vec{\mathscr{D}}$-совершенной схемой относительно блока $\beta^* \in \mathscr{E}(C^*)$, то блок β^* исправен.*

Доказательство. Здесь мы будем использовать разные обозначения для блока, размещенного в исправной и неисправной схемах. Пусть β — блок в схеме $S(A,C,\widetilde{x}_n)$, который становится блоком β^* при появлении в схеме $S(A,C,\widetilde{x}_n)$ неисправностей, переводящих ее в схему $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$.

Пусть β — нетривиальный автомат. В этом случае для подтверждения справедливости леммы достаточно убедиться в эквивалентности автоматов β и β^*. Из определения $\vec{\mathscr{D}}$-совершенной схемы $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ относительно $\beta^* \in \mathscr{E}(C^*)$ и условия леммы следует, что в автомате β есть состояние σ, обладающее следующим свойством. Если β установить в состояние σ и на входы схем $S(A,C,\widetilde{x}_{n+3})$ и $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+3})$ подать последовательность $\vec{\mathscr{D}}$, то при прохождении ее отрезка $\vec{\mathscr{D}}(U,V,W)$ на выходах любых двух соответствующих друг другу блоков из $O(\beta)$ и $O(\beta^*)$ появляются одинаковые последовательности. Это означает, что на входы блоков β и β^* подается одна и та же последовательность. Ее начальный отрезок длины t представляет собой последовательность, остаточно различающую все автоматы с k состояниями. Ясно, что состояние σ автомата β эквивалентно состоянию, в котором перед началом эксперимента находился автомат β^*. Пусть это будет состояние σ'.

Теперь рассмотрим отдельно автоматы β и β^* с начальными состояниями σ и σ' соответственно. Пусть некоторая входная для этих автоматов последовательность $\vec{\mathscr{P}}$ переводит эти автоматы в состояния $\sigma(\vec{\mathscr{P}})$ и $\sigma'(\vec{\mathscr{P}})$ соответственно. Тогда, очевидно, состояния $\sigma(\vec{\mathscr{P}})$ и $\sigma'(\vec{\mathscr{P}})$ эквивалентны. Продолжая этот процесс и пользуясь сильной связностью автомата β, можно подобрать такие входные последовательности, что первый автомат пройдет через все его состояния и для каждого состояния можно будет найти эквивалентное ему состояние во втором автомате. Но по предположению о допустимых неисправностях автоматов число состояний второго автомата не больше числа состояний первого. Это означает эквивалентность автоматов β и β^*. Отсюда следует справедливость леммы для случая, когда β — нетривиальный автомат.

Справедливость утверждения леммы в случае, когда β является тривиальным автоматом, очевидна.

Лемма 5. *Если $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ является $\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной схемой относительно каждого блока β из $\mathscr{E}(C^*)$, то для произвольных состояний $\sigma(A^*)$ и $\sigma(B)$ подсхем A^* и B схемы $S(A^*, B, \widetilde{x}_n)$ найдется такое состояние $\sigma(C^*)$ схемы C^*, что для любой последовательности $\vec{\mathscr{P}}$, состоящей из n-разрядных булевых векторов, справедливо равенство*

$$S_a(A^*, B, \sigma(A^*), \sigma(B), \vec{\mathscr{P}}) = S_a(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{\mathscr{P}}_{(000)}).$$

Доказательство. Из описания схемы C видно, что если в ней все элементы работают правильно, то при значениях $x_{n+1} \equiv x_{n+2} \equiv x_{n+2} \equiv 0$ правильно функционирующие блоки K и Q работают просто как проводники, соединяющие их вторые входы с выходами этих блоков. Пользуясь леммой 3, можно считать, что в схеме C^* все тривиальные блоки из $\mathscr{E}(C^*)$ работают правильно. Кроме того, если каждый нетривиальный блок β из $\mathscr{E}(C^*)$ привести в то состояние, в котором находится соответствующий ему элемент в B, то β становится инициальным автоматом, эквивалентным соответствующему инициальному автомату из B. В схеме C^* вне части $\mathscr{E}(C^*)$ находятся только блоки Q (это тривиальные блоки). В условиях леммы только эти блоки могут работать не так, как работают соответствующие блоки в C, причем число неправильно работающих блоков Q не превышает m. Правильно работающие схемы D (состоящие из тривиальных блоков) исправляют в C^* все ошибки, связанные с неправильной работой блоков Q. Отсюда непосредственно следует утверждение леммы 5.

Заключение

Убедимся в том, что определенная в § 2 схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+3})$ обладает свойствами, перечисленными в утверждении теоремы. Пусть $\vec{\mathscr{Q}}$ (последовательность из теоремы) — последовательность $\vec{\mathscr{Q}} = \vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$, определенная в § 3. Ее длина равна $\lceil 6 \cdot 4^{rk+1}k^2 \ln(2k) \rceil$.

a) Из (2.3) следует $p \leqslant L(C) < c_4 m L(B)$. Пусть $\mathscr{D}_1, \dots, \mathscr{D}_s$ — окрестности блоков из $\mathscr{E}(C)$. Поскольку число блоков в $\mathscr{E}(C)$ не превышает $L(C)$, то из (2.3) следует, что $s < c_4 m L(B)$. Кроме того, при любом целом $r > 1$ найдется такая константа c_5, что $L(\mathscr{D}_i) < c_5 r$. Следовательно, справедливо утверждение (a) теоремы.

b) Утверждение (b) теоремы следует из леммы 1.

c) Определим разбиение множества частей $\{\mathscr{D}_i\}_{i=1,\dots}$ на классы $\mathscr{D}(1, C^*)$ и $\mathscr{D}(2, C^*)$ согласно следующему правилу. Пусть $\mathscr{D}_i$ есть окрестность блока β. Если $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+3})$ является $\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной схемой относительно блока β, то $\mathscr{D}_i$ относится к классу $\mathscr{D}(2, C^*)$. В противном случае $\mathscr{D}_i$ относится к классу $\mathscr{D}(1, C^*)$. При таком разбиении множества частей на классы из лемм 4 и 5 непосредственно следует утверждение (c) теоремы.

Таким образом, все утверждения теоремы доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гилл А.** Введение в теорию конечных автоматов. М.: Наука, 1966.
2. **Горяшко А. П.** Синтез диагностируемых схем вычислительных устройств. М.: Наука, 1987.
3. **Носков В. Н.** Метод синтеза удобных для контроля комбинационных схем // Дискрет. математика. 1993. Т. 5, вып. 4. С. 3–23.
4. **Носков В. Н.** Приведение схем из функциональных элементов к виду, удобному для контроля // Дискрет. анализ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1994. С. 142–165. (Тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 27).
5. **Носков В. Н.** Диагностика частей схем из функциональных элементов // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 3. С. 60–96.
6. **Носков В. Н.** О преобразованиях комбинационных схем, повышающих надежность их частей // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 2. С. 33–61.
7. **Носков В. Н.** О восстановлении правильной работы неисправных частей комбинационных схем // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1997. Т. 4, № 4. С. 47–74.

8. **Редькин Н. П.** О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискрет. математика. 1989. Т. 1, вып. 3. С. 71–76.
9. **Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М.** Конечные автоматы (поведение и синтез). М.: Наука, 1970.
10. **Шевченко В. И.** О синтезе самокорректирующихся схем с малой трудоемкостью тестирования // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1985. С. 133–143.
11. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
12. **Reddy S. M.** Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. 1972. V. 21, N 1. P. 124–141.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: noskov@math.nsc.ru

Статья поступила
23 июля 1998 г.