ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 1999. Серия 1. Том 6, № 1, 65–85

УДК 519.714

О СРАВНЕНИИ СЛОЖНОСТЕЙ НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВЕТВЯЩИХСЯ k-ПРОГРАММ*)

Е. А. Окольнишникова

Проводится сравнение сложностей реализации булевых функций недетерминированными синтаксическими ветвящимися k- и s_k-программами. Показывается, что для любого натурального k, $k \geqslant 2$, существует последовательность булевых функций такая, что сложность реализации каждой функции из этой последовательности в классе недетерминированных синтаксических ветвящихся k-программ в экспоненциальное число раз (по числу переменных булевой функции) превосходит сложность реализации той же функции в классе недетерминированных синтаксических ветвящихся $\lceil k \ln k / \ln 2 + C \rceil$-программ, где C — константа, не зависящая от k. Кроме того, показано, что для любых натуральных N и $k(N)$, где $4 \leqslant k(N) < C_2\sqrt{\ln N}/\ln\ln N$, а $C_2 < \sqrt{2}$ — не зависящая от k и N константа, существует булева функция от N переменных такая, что сложность реализации этой функции в классе недетерминированных синтаксических ветвящихся k-программ в экспоненциальное число раз (по N) превосходит сложность реализации той же функции в классе недетерминированных синтаксических ветвящихся $\lceil k \ln k / \ln 2 + C \rceil$-программ.

Введение

Проблема нахождения нетривиальных нижних оценок сложности реализации конкретных последовательностей булевых функций — одна из наиболее важных в математической теории синтеза и сложности схем. Получение таких оценок является сложной задачей. В настоящее время лишь для небольшого числа функций получены нетривиальные нижние оценки сложности реализации. Поэтому представляет интерес выявление факторов, в той или иной мере влияющих на сложность схем, реализующих булевы функции.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00848) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (код проекта 473).

В настоящей работе изучаются факторы, влияющие на сложность недетерминированных ветвящихся программ. Ветвящиеся программы — это логические схемы, которые хорошо моделируют вычисления с помощью одного процессора, читающего не более одного бита информации в единицу времени (определение недетерминированной ветвящейся программы будет дано в § 1, см. также [5–7]).

Недетерминированная ветвящаяся программа называется недетерминированной синтаксической ветвящейся *k-программой*, если в ней вдоль любого пути от входной вершины к выходной каждая переменная встречается не более k раз. Возможное альтернативное определение k-программы состоит в том, что ограничение на число проверок накладывается не на все пути программы от входа к выходу, а только на пути, в которых не встречаются одновременно дуги, помеченные некоторой переменной и ее отрицанием (ненулевые пути). Такие ветвящиеся программы называются несинтаксическими ветвящимися k-программами.

Более подробный обзор результатов по сложности ветвящихся программ можно найти в [9, 6, 10].

Данная работа посвящена сравнению сложностей синтаксических недетерминированных ветвящихся k-программ и s_k-программ и является развитием работ [3, 7]. В [3] аналогичное сравнение проводилось для детерминированных программ. Было показано, что для любого натурального k, $k \geqslant 2$, существует такая последовательность булевых функций, что сложность реализации каждой функции из этой последовательности в классе детерминированных ветвящихся k-программ в экспоненциальное число раз (по числу переменных булевой функции) превосходит сложность реализации той же функции в классе детерминированных ветвящихся k^2-программ. Данная работа содержит полные доказательства всех утверждений по сравнению сложностей для недетерминированных ветвящихся программ, приведенных в [7]. (В [7] из-за ограничения на объем статьи были даны лишь наброски некоторых доказательств.)

В настоящей работе показано, что для любого натурального k, $k \geqslant 2$, существует такая последовательность булевых функций, что сложность реализации каждой функции из этой последовательности в классе недетерминированных синтаксических ветвящихся k-программ в экспоненциальное число раз (по числу переменных функции) превосходит сложность реализации той же функции в классе недетерминированных синтаксических ветвящихся $\lceil k \ln k / \ln 2 + C \rceil$-программ, где C — не зависящая от k константа.

Кроме того, показано, что для любых натуральных N и $k(N)$, где $4 \leqslant k(N) < C_2 \sqrt{\ln N} / \ln \ln N$, а $C_2 < \sqrt{2}$ — не зависящая от k и N константа, существует булева функция от N переменных такая, что сложность

реализации этой функции в классе недетерминированных синтаксических ветвящихся k-программ в экспоненциальное число раз (по N) превосходит сложность реализации той же функции в классе недетерминированных синтаксических ветвящихся $\lceil k \ln k / \ln 2 + C \rceil$-программ.

Доказательство этих утверждений существенно опирается на доказательство утверждений из [3]. Кроме того, при доказательстве леммы 1 мы используем фрагмент из доказательства теоремы 1 из [5].

Уже после сдачи в печать текста настоящей статьи автору стало известно о существовании электронного варианта технического отчета J. Thathachar [11], в котором было показано существование булевых функций, сложность реализации которых ветвящимися k-программами может быть в экспоненциальное число раз больше, чем сложность реализации тех же функций ветвящимися $(k+1)$-программами. Предложенный в [11] метод доказательства является в некотором роде частным случаем метода, предложенного ранее автором данной статьи в [2, 7]. Этот метод позволяет получать высокие нижние оценки сложности реализации булевых функций ветвящимися k-программами для функций, у которых любая из подфункций, зависящая от переменных из множества $(X_1 \cup X_2)$, плохо представима в виде $\bigvee_i (f_i(X_1) \wedge g_i(X_2))$, где множества X_1 и X_2 попарно не пересекаются и мощности множеств X_1 и X_2 сравнительно велики. Метод, примененный для получения результата в [7] и в данной работе, позволяет получать высокие нижние оценки не только для функций, у которых такое плохое представление в виде $\bigvee_i (f_i(X_1) \wedge g_i(X_2))$ существует по всем переменным, а также для функций, у которых это свойство наблюдается для групп переменных, обладающих тем или иным свойством. В частности, это может быть удобно для характеристических функций графов. И хотя в подготовленной к печати статье (с учетом технического отчета [11]) содержится не рекордный результат, тем не менее представляют интерес как рассматриваемая в данной статье функция, так и метод получения высоких нижних оценок сложности ветвящихся k-программ.

§ 1. Определения и предварительные сведения

Прежде всего напомним определение контактно-вентильной схемы, которое можно найти, например, в работе О. Б. Лупанова [1]. Под *контактно-вентильной схемой* понимается электрическая схема, состоящая из замыкающих и размыкающих контактов и вентилей и реализующая булеву функцию как функцию проводимости. Под сложностью контактно-вентильной схемы понимается общее число контактов и вентилей [1]. Для контактно-вентильных схем известна асимптотика функции Шеннона, полученная О. Б. Лупановым [1].

Для удобства доказательства леммы 1, а также для того, чтобы без всяких модификаций можно было воспользоваться фрагментом доказательства теоремы 1 из [5], в статье доказательство будет проведено для ациклических контактно-вентильных схем (switching-and-rectifier network [5, 6], или directed contact network [8, 4], или contact gating schema [8]). Данное определение несколько отлично от традиционного определения недетерминированной ветвящейся программы, которое вводит недетерминизм в ветвящиеся программы добавлением вершин выбора ("guessing nodes"), но тем не менее сложность реализации булевых функций недетерминированными синтаксическими ветвящимися k-программами с точностью до мультипликативной константы совпадает со сложностью реализации этих функций ациклическими контактно-вентильными схемами [5, 6]. Поэтому в дальнейшем ациклические контактно-вентильные схемы будем называть недетерминированными ветвящимися программами.

Недетерминированной ветвящейся программой (*ациклической контактно-вентильной схемой*) *) называется ориентированный граф без циклов с двумя выделенными вершинами: *входной* (нет входящих дуг) и *выходной* (нет выходящих дуг) и двумя типами дуг: помеченными ($x_i = d$, $d = 0, 1$) и непомеченными. Дуги без меток называются *свободными*. Ветвящаяся программа *вычисляет* булеву функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ следующим образом. Для каждого набора $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ входных переменных $a_i \in \{0,1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, полагаем $f(\tilde{a}) = 1$ тогда и только тогда, когда существует по крайней мере один (ориентированный) путь от входной к выходной вершине (*принимающий путь* для $\tilde{a}$) такой, что все метки вдоль этого пути не противоречат набору $\tilde{a}$ (т. е. если на этом пути встретилась метка $x_i = d$, то $a_i = d$).

Недетерминированная ветвящаяся программа называется *синтаксической* k-программой тогда и только тогда, когда для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, и любого пути от входной к выходной вершине каждая метка вида $x_i = d$ вдоль этого пути встречается не более k раз.

Недетерминированная ветвящаяся программа называется *несинтаксической* k-программой тогда и только тогда, когда для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, и любого пути, принимающего для некоторого входного набора переменных, каждая метка вида $x_i = d$ вдоль этого пути встречаются не более k раз.

По аналогии с однородными детерминированными k-программами [2, 3] недетерминированную k-программу будем называть *однородной*, если для любой вершины и для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, число дуг с метками вида $x_i = d$ на любом пути, идущем от входа к рассматриваемой

*) Аналогичное определение дано в [5].

вершине, не зависит от пути (для разных значений i эти числа могут быть различными). Кроме того, для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, число дуг с метками вида $x_i = d$ на любом пути, идущем от входной вершины к выходной, должно быть равным k.

Сложность $B(\mathscr{P})$ ветвящейся программы $\mathscr{P}$ определяется как число помеченных дуг *) в ветвящейся программе $\mathscr{P}$. Через $Bk(f)$ обозначается сложность минимальной k-программы, реализующей функцию f. Через $UBk(f)$ обозначается сложность минимальной однородной k-программы, реализующей функцию f.

Рассмотрим ветвящуюся программу $\mathscr{P}_f$, реализующую булеву функцию f. Каждому пути в ветвящейся программе, идущему от входной вершины к выходной, естественным образом можно поставить в соответствие конъюнкцию K: если на этом пути есть дуга с меткой $x_i = 1$, то в конъюнкцию K включается x_i; если есть дуга с меткой $x_i = 0$, то включается $\bar{x}_i$. При этом конъюнкции, соответствующие некоторым путям ветвящейся программы $\mathscr{P}_f$, могут содержать одновременно переменную и ее отрицание, т. е. могут быть тождественно равны нулю.

Ясно, что если конъюнкция K соответствует некоторому пути ветвящейся программы $\mathscr{P}_f$, то K является *допустимой* для функции f, т. е. $N_K \subseteq N_f$. (Здесь, как обычно, через N_f обозначено множество точек n-мерного единичного куба, в которых булева функция f равна единице.)

Будем говорить, что вершина a_i *предшествует* вершине a_j в ветвящейся программе $\mathscr{P}$, если в $\mathscr{P}$ существует путь, идущий от a_i к a_j.

Множество вершин $a_1, \ldots, a_t$ (не обязательно различных) ветвящейся программы $\mathscr{P}$ назовем *последовательностью вершин*, если в $\mathscr{P}$ существует путь от входной вершины к выходной, проходящий через вершины $a_1, \ldots, a_t$, и на этом пути вершина a_i предшествует вершине a_j при $i < j$ или a_i совпадает с a_j .

Лемма 1. *Любую k-программу $\mathscr{P}$, реализующую булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_N)$, можно преобразовать в такую однородную k-программу $\mathscr{P}_0$, реализующую ту же самую функцию, что*

$$Bk(\mathscr{P}_0) \leqslant (2kN)(2NB(\mathscr{P}))^2.$$

Доказательство проводится по аналогии с доказательством леммы 1 из [3]. Пусть $\mathscr{P}$ — недетерминированная синтаксическая ветвящаяся k-программа, реализующая булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. В [5]

*) В данном выше традиционном определении контактно-вентильных схем под сложностью понимается общее число контактов (помеченных ребер) и вентилей (не помеченных ребер).

(теорема 1) было показано, что любую недетерминированную синтаксическую ветвящуюся k-программу $\mathscr{P}$ можно преобразовать в недетерминированную синтаксическую ветвящуюся k-программу $\mathscr{P}_1$ с тем же числом помеченных дуг, в которой общее число дуг (включая свободные дуги) не превосходит $(2NB(\mathscr{P}))^2$.

В программе $\mathscr{P}_1$ через $l_q(a)$ обозначим максимальное число дуг с меткой $x_q = d$ на произвольном пути от входной вершины к вершине a. Ясно, что если вершина a_i предшествует вершине a_j в $\mathscr{P}_1$, то при любом q, $1 \leqslant q \leqslant N$, выполняется неравенство

$$l_q(a_i) \leqslant l_q(a_j).$$

Пусть (a_i, a_j) — дуга в $\mathscr{P}_1$ с меткой $x_q = d$. Без ограничения общности можно считать, что это дуга с меткой $x_1 = 1$. Тогда $l_1(a_i) < l_1(a_j)$. Дугу (a_i, a_j) заменим на дугу (a_i, a') и на цепочку дуг, соединяющих вершины a' и a_j и реализующих фиктивные проверки переменных $x_1, x_2, \dots, x_N$: $l_1(a_j) - l_1(a_i) - 1$ проверок переменной x_1, $l_q(a_j) - l_q(a_i)$, $2 \leqslant q \leqslant N$, проверок переменной x_q (см. рисунок).

Пусть (a_i, a_j) — свободная дуга в $\mathscr{P}_1$. Если $l_p(a_j) = l_p(a_i)$ для каждого p, $1 \leqslant p \leqslant N$, то вершины a_i и a_j соединим свободной дугой (a_i, a_j). Если существует p, $1 \leqslant p \leqslant N$, такое, что $l_p(a_j) \neq l_p(a_i)$, то дугу (a_i, a_j) заменим на цепочку дуг, соединяющих вершины a_i и a_j и реализующих фиктивные проверки переменных $x_1, x_2, \dots, x_N$: $l_q(a_j) - l_q(a_i)$, проверок переменной x_q, $1 \leqslant q \leqslant N$.

Проделаем эту процедуру со всеми дугами в $\mathscr{P}_1$. Кроме того, для того чтобы число дуг, помеченных каждой переменной на любом пути от входной вершины к выходной, было равно k, введем новую выходную вершину и соединим бывшую и новую выходные вершины цепочкой дуг, реализующей необходимое количество фиктивных проверок переменных. В результате получим однородную ветвящуюся k-программу $\mathscr{P}_0$, сложность которой не более чем в $2kN$ раз превышает общее число дуг (включая свободные) ветвящейся k-программы $\mathscr{P}_1$. Из этих рассмотрений следует, что

$$B(\mathscr{P}_0) \leqslant (2kN)(2NB(\mathscr{P}))^2.$$

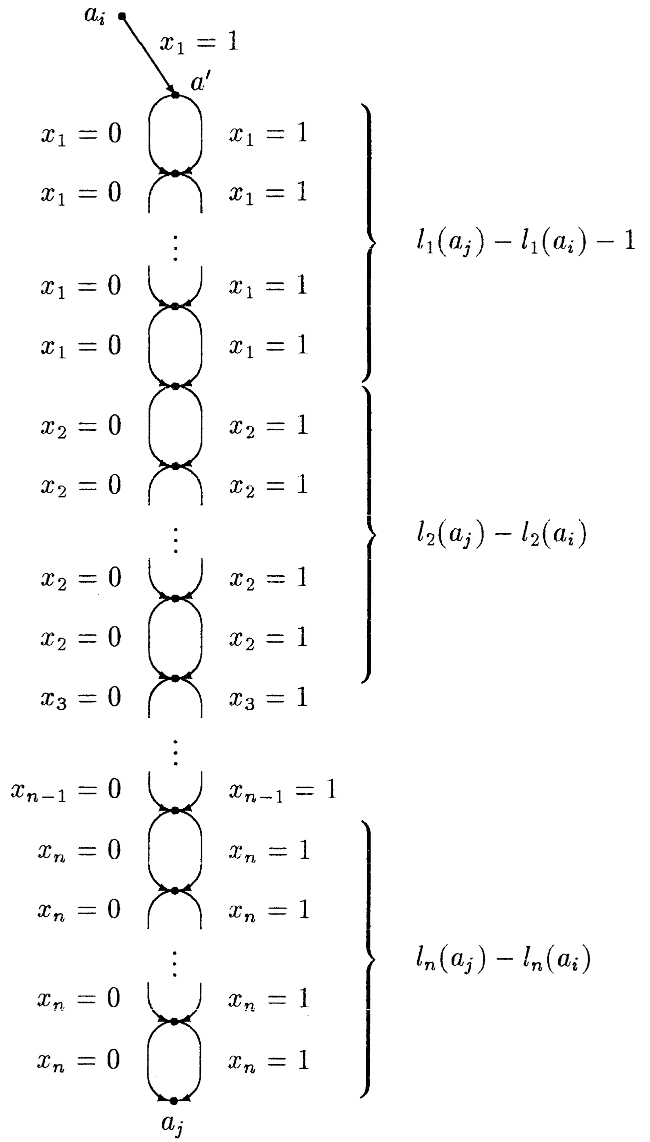
Лемма 1 доказана.

Из этой леммы получаем

Следствие 1. *Для любой булевой функции $f(x_1, \dots, x_N)$ справедливо следующее соотношение сложностей ветвящихся k-программ:*

$$UBk(f) \leqslant (2kN)(2NBk(f))^2.$$

Напомним определение булевой функции $F_{n,s}$ из [8] и некоторые понятия, связанные с этой функцией.



Пусть n и s — натуральные числа, n кратно s, и пусть $X_{n,s} = \{x_{i_1,i_2,\ldots,i_s} \mid 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n\}$ — множество переменных. Ясно, что

$$|X_{n,s}| = \binom{n}{s}. \tag{1}$$

Через W_i обозначим множество переменных из $X_{n,s}$, у которых один из индексов равен i. Определим булеву функцию $F_{n,s}(X_{n,s})$ следующим

образом:

$$F_{n,s} = \bigwedge_{i=1}^{n} \Big(\bigvee_{x_{i_1,\dots,i_s} \in W_i} x_{i_1,\dots,i_s} \Big).$$

Нетрудно видеть, что функция $F_{n,s}$ может быть реализована детерминированной ветвящейся s-программой сложности не более чем

$$n\,|W_i| = n\binom{n-1}{s-1} = s\binom{n}{s} = s|X_{n.s}|. \tag{2}$$

Пусть $D \subset X_{n,s}$. Через $V(D)$ обозначим множество индексов (без учета кратности) у переменных из D. В частности, $V(X_{n,s}) = \{1, 2, \dots, n\}$.

Для конъюнкции K, содержащей некоторые переменные или отрицания переменных из $X_{n,s}$, через $R(K)$ обозначим множество переменных, которые входят в конъюнкцию K без отрицания. Через $V(K)$ обозначим множество индексов у переменных из $R(K)$. Ясно, что

$$V(K) = V(R(K)).$$

Конъюнкцию K, зависящую от всех переменных из множества $X_{n,s}$, назовем *непересекающейся*, если любое число от 1 до n встречается в качестве индекса у переменных из $R(K)$ только один раз. Ясно, что $V(K) = \{1, 2, \dots, n\}$ для любой непересекающейся конъюнкции.

Пусть $\Phi(n, s)$ обозначает число непересекающихся конъюнкций от переменных из $X_{n,s}$. Легко проверить, что

$$\Phi(n, s) = \frac{n!}{(s!)^{n/s}(n/s)!}. \tag{3}$$

Поясняющие эти определения примеры можно найти в [3].

Рассмотрим некоторые свойства как функции $F_{n,s}$, так и конъюнкций, получаемых на выходе произвольной недетерминированной ветвящейся программы, реализующей функцию $F_{n,s}$.

Лемма 2 (лемма 1 из [3]). *Конъюнкция K, зависящая от некоторых переменных из множества $X_{n,s}$, является допустимой для $F_{n,s}$ тогда и только тогда, когда $V(K) = \{1, 2, \dots, n\}$.*

Из леммы 2 вытекает

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{P}_0$ — однородная k-программа, реализующая функцию $F_{n,s}$. Тогда для любой непересекающейся конъюнкции K в программе $\mathscr{P}_0$ существует путь от входной вершины к выходной, по которому реализуется конъюнкция K.*

Пусть $\mathscr{P}_0$ — однородная k-программа, реализующая булеву функцию f. Тогда в k-программе $\mathscr{P}_0$ любой путь реализует либо некоторую элементарную конъюнкцию от переменных из X, либо конъюнкцию, тождественно равную нулю. Пусть α — путь в $\mathscr{P}_0$, реализующий ненулевую конъюнкцию K. Будем говорить, что *переменная x встречается на отрезке (b, c)* пути α, *если на отрезке (b, c) пути* α между вершинами b и c есть дуга, которая исходит из вершины ветвящейся программы, помеченной переменной x. Аналогично *переменная y без отрицания встречается на отрезке* (b, c) пути α, *если на отрезке* (b, c) *пути* α между вершинами b и c есть дуга, помеченная 1, которая исходит из вершины ветвящейся программы, помеченной переменной y. Ясно, что $y \in R(K)$.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ — последовательность вершин однородной k-программы $\mathscr{P}_0$, лежащих на пути α. Введем следующие обозначения:

$R^1_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_{2m})$ (соответственно $Q^1_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_{2m})$) — множество переменных без отрицания (соответственно множество переменных как с отрицаниями, так и без них), которые встречаются хотя бы на одном из отрезков $(a_1, a_2), \ldots, (a_{2m-1}, a_{2m})$ пути α и не встречаются вне этих отрезков на этом пути.

$R^2_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_{2m})$ (соответственно $Q^2_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_{2m})$) — множество переменных без отрицания (соответственно множество переменных как с отрицаниями, так и без них), которые встречаются только вне указанных выше отрезков пути α.

$R^0_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_{2m})$ (соответственно $Q^0_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_{2m})$) — множество переменных без отрицания (соответственно множество переменных как с отрицаниями, так и без них), которые встречаются как на указанных выше отрезках пути α, так и вне их.

Ясно, что множества $R^j_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_{2m})$ $(j = 0, 1, 2)$ попарно не пересекаются и их объединение совпадает с множеством всех переменных без отрицания, которые встречаются на пути α. Множества R^j_α зависят не только от последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$, но и от пути α, которому эта последовательность принадлежит.

Так как $\mathscr{P}_0$ — однородная k-программа, то на любом пути, проходящем через ее вершины b и c, множество переменных, которые встречаются на этом пути на отрезке (b, c), не зависит от пути. Поэтому множества $Q^j_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_{2m})$ $(j = 0, 1, 2)$ зависят только от последовательности вершин $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ и не зависят от пути. Следовательно, индекс α при Q^j_α можно опустить. Ясно, что множества $Q^j(a_1, a_2, \ldots, a_{2m})$ $(j = 0, 1, 2)$ попарно не пересекаются и их объединение совпадает с множеством всех переменных функции f. Очевидно, что $R^j_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_{2m}) \subseteq$

$Q^j(a_1, a_2, \dots, a_{2m})$ $(j = 0, 1, 2)$ для любого пути α, содержащего последовательность вершин $a_1, a_2, \dots, a_{2m}$.

Лемма 3. *Пусть $\mathscr{P}_0$ — однородная k-программа, реализующая функцию $F_{n,s}$, а m и t — натуральные числа такие, что $k \leqslant m \leqslant t$. Тогда любой непересекающейся конъюнкции K можно поставить в соответствие последовательность $\Psi(K)$ из $2m$ вершин такую, что*

(а) *все вершины последовательности $\Psi(K)$ принадлежат некоторому пути $\alpha(K)$, реализующему конъюнкцию K;*

(б)
$$|R^1_\alpha(\Psi(K))| = \left\lceil (n/s)\binom{t-k}{m-k}\Big/\binom{t}{m}\right\rceil;$$
$$|R^2_\alpha(\Psi(K))| \geqslant n/s - m\lceil kn/(ts)\rceil + (k-1)\left\lceil (n/s)\binom{t-k}{m-k}\Big/\binom{t}{m}\right\rceil;$$
$$|R^0_\alpha(\Psi(K))| \leqslant m\lceil kn/(ts)\rceil - k\left\lceil (n/s)\binom{t-k}{m-k}\Big/\binom{t}{m}\right\rceil.$$

Доказательство. Поскольку в доказательстве леммы 2 из [3] нигде не используется тот факт, что из любой вершины должны исходить только две дуги, одна из которых имеет метку $x_i = 1$, а другая метку $x_i = 0$, и, кроме того, наличие свободных дуг в программе $\mathscr{P}_0$ не влияет на значение величин $R^j_\alpha(a_1, a_2, \dots, a_{2m})$ $(j = 0, 1, 2)$, то доказательство леммы 2 из [3] проходит без изменений и для случая недетерминированной ветвящейся k-программы.

Пусть ψ — последовательность вершин недетерминированной ветвящейся k-программы, реализующей функцию $F_{n,s}$ от переменных из $X_{n,s}$. Из определения множеств $Q^j(\psi)$ $(j = 0, 1, 2)$ следует, что $X_{n,s} = Q^0(\psi) \cup Q^1(\psi) \cup Q^2(\psi)$ и $Q^i(\psi) \cap Q^j(\psi) = \varnothing$ при $i \neq j$. Пусть $\mathscr{K}$ — конъюнкция, существенно зависящая от всех переменных из множества $X_{n,s}$. Тогда $\mathscr{K}$ единственным образом можно представить в виде $\mathscr{K} = \mathscr{K}^0(Q^0(\psi))\&\mathscr{K}^1(Q^1(\psi))\&\mathscr{K}^2(Q^2(\psi))$, где конъюнкция $\mathscr{K}^i(Q^i(\psi))$ существенно зависит от всех переменных из множества $Q^i(\psi)$, т. е. конъюнкция $\mathscr{K}$ по последовательности ψ однозначно определяет конъюнкции $\mathscr{K}^i(Q^i(\psi))$, $i = 0, 1, 2$.

Пусть ψ — последовательность вершин ветвящейся программы. Через $T(\psi)$ обозначим множество непересекающихся конъюнкций (существенно зависящих от всех переменных из $X_{n,s}$), каждая из которых реализуется на некотором пути (от входной вершины к выходной), проходящем через последовательность вершин ψ.

Лемма 4. *Пусть $\psi = (a_1, a_2, \dots, a_{2m})$ — последовательность вершин однородной k-программы $\mathscr{P}_0$, а пути $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ из $T(\psi)$ являются*

такими, что $\mathscr{A} = \mathscr{A}^0(Q^0(\psi))\&\mathscr{A}^1(Q^1(\psi))\&\mathscr{A}^2(Q^2(\psi))$ *и* $\mathscr{B} = \mathscr{B}^0(Q^0(\psi))\&\mathscr{B}^1(Q^1(\psi))\&\mathscr{B}^2(Q^2(\psi))$. *Тогда если* $\mathscr{A}^0(Q^0(\psi)) = \mathscr{B}^0(Q^0(\psi))$, *то* $V(\mathscr{A}^1(Q^1(\psi))) = V(\mathscr{B}^1(Q^1(\psi)))$ *и* $V(\mathscr{A}^2(Q^2(\psi))) = V(\mathscr{B}^2(Q^2(\psi)))$.

Доказательство совпадает с доказательством леммы 3 из [3].

Ниже всюду будем полагать, что

$$n_1 = s\left\lceil (n/s)\binom{t-k}{m-k}\Big/\binom{t}{m}\right\rceil; \tag{4}$$

$$n_0 = sm\lceil kn/(ts)\rceil - sk\left\lceil (n/s)\binom{t-k}{m-k}\Big/\binom{t}{m}\right\rceil; \tag{5}$$

$$n_2 = n - n_0 - n_1. \tag{6}$$

Лемма 5. *Пусть* $B = (b_1, b_2, \dots, b_{2m})$ — *последовательность вершин однородной* k-*программы* $\mathscr{P}_0$, *реализующей функцию* $F_{n,s}$. *Тогда при фиксированных значениях* k, m, t $(k \leqslant m)$ *таких, что величины* n_0, n_1 *и* n_2 *положительны, справедливо соотношение*

$$\Psi^{-1}(B) \leqslant \binom{n}{n_0}\Phi(n_0, s)\Phi(n_1, s)\Phi(n_2, s),$$

где Φ *задается формулой* (3).

Доказательство. При доказательстве леммы 4 из [3] условие $km \leqslant t$ использовалось только для обеспечения положительности величин n_0, n_1 и n_2. Кроме того, тот факт, что $\mathscr{P}_0$ — однородная *недетерминированная* ветвящаяся k-программа (а не однородная *детерминированная* k-программа как в [3]), не влияет на возможность повторения доказательства леммы 4 из [3]. Лемма 5 доказана.

Пусть k — натуральное число и $\mathscr{P}_0$ — однородная k-программа, реализующая функцию $F_{n,s}$. Через $\omega_{\mathscr{P}_0}(n, s, k, 2m)$ обозначим число $2m$-элементных последовательностей в $\mathscr{P}_0$.

Положим

$$m_k = k^k, \quad s_k = \lceil k \ln k / \ln 2 + 6\rceil. \tag{7}$$

Лемма 6. *Пусть* $k \geqslant 4$, $n \geqslant k^{2k+4}$ *и* $\mathscr{P}_0$ — *однородная* k-*программа, реализующая функцию* F_{n,s_k}. *Тогда*

$$\omega_{\mathscr{P}_0}(n, s_k, k, 2m_k) \geqslant \frac{\exp(0,78n/(sk^k))}{(3en/k^k)^{sk^k}}.$$

Доказательство. Поскольку в лемме значение k как функции от n предполагается фиксированным, то индекс k при m_k и s_k можно опустить. Поэтому полагаем (см. (7)), что

$$m = m_k = k^k, \quad s = s_k = \lceil k \ln k / \ln 2 + 6\rceil. \tag{8}$$

Очевидно, что если $k \geqslant 4$, то

$$s < k^2. \tag{9}$$

Ясно, что общее число $2m$-элементных последовательностей в программе $\mathscr{P}_0$ больше общего число тех $2m$-элементных последовательностей, которые поставлены в соответствие непересекающимся конъюнкциям (см. лемму 3).

Положим

$$t = mk(1-\Delta) = k^{k+1}(1-\Delta), \tag{10}$$

где

$$\Delta = (k-2)/k^k. \tag{11}$$

По лемме 3 при $k \leqslant m \leqslant t$ каждой непересекающейся конъюнкции K в программе $\mathscr{P}_0$ можно поставить в соответствие $2m$-элементную последовательность вершин $\Psi(K)$. Общее число непересекающихся конъюнкций задается формулой (3). При фиксированных значениях k, m, t $(k \leqslant m)$ лемма 5 позволяет оценить сверху число непересекающихся конъюнкций, которым поставлена в соответствие $2m$-элементная последовательность B. Это дает возможность получить нижнюю оценку для общего числа $2m$-элементных последовательностей в $\mathscr{P}_0$.

Для того чтобы иметь возможность воспользоваться леммой 5, проверим, что выполняются условия применения этой леммы. Ясно, что $k \leqslant m$. Кроме того, надо проверить, что при выбранных выше значениях k, m, t величины n_0, n_1 и n_2, определяемые по формулам (4)–(6), положительны.

Представим n_1 в виде $n_1 = an$. Тогда из (4)–(6) следует, что

$$n_0 = sm\lceil kn/(ts)\rceil - kan;$$
$$n_2 = n - sm\lceil kn/(ts)\rceil - (k-1)an.$$

Из этих соотношений, а также из (4) и (10) следует, что

$$n_1 = an = s\left\lceil n/s\binom{t-k}{m-k}\Big/\binom{t}{m}\right\rceil; \tag{12}$$

$$n/(1-\Delta) - kan \leqslant n_0 \leqslant n/(1-\Delta) - kan + sm; \tag{13}$$

$$(k-1)an - \Delta n/(1-\Delta) - sm \leqslant n_2 \leqslant (k-1)an - \Delta n/(1-\Delta). \tag{14}$$

В свою очередь, пользуясь равенствами (12), (10) и (8), при $k \geqslant 4$ получаем

$$\begin{aligned} a &\geqslant \binom{t-k}{m-k}\Big/\binom{t}{m} = \prod_{i=0}^{k-1}\frac{m-i}{t-i} \geqslant \prod_{i=0}^{k-1}\frac{m-i}{km} \\ &= \frac{1}{k^k}\prod_{i=0}^{k-1}\Big(1-\frac{i}{m}\Big) > \frac{1}{k^k}\Big(1-\frac{k}{m}\Big)^{k/2} > \frac{1}{k^k}\Big(1-\frac{k^2}{2m}\Big). \end{aligned} \tag{15}$$

С другой стороны, из (12) и (9)–(11) следует, что если n и k удовлетворяют условию леммы, то

$$
\begin{aligned}
a &\leqslant \prod_{i=0}^{k-1} \frac{m-i}{mk(1-\Delta)-i} + \frac{s}{n} < \frac{1}{k^k(1-\Delta)^k} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1-i/m}{1-i/(km(1-\Delta))} + \frac{k^2}{k^{2k+4}} \\
&< \frac{1}{k^k(1-\Delta)^k} + \frac{1}{k^{2k+2}} < \frac{(1+(k-1)/k^k)^k}{k^k} + \frac{1}{k^{2k+2}} \\
&\leqslant \frac{1}{k^k}(1+k^2/k^k) + \frac{1}{k^{2k+2}} \leqslant \frac{1}{k^k}(1+2k^2/k^k).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Теперь покажем, что если n и k удовлетворяют условию леммы, т. е. $k \geqslant 4$ и $n \geqslant k^{2k+4}$, то величины n_0, n_1 и n_2 положительны. В самом деле, из (13), (11) и (16) имеем

$$
n_0 \geqslant n/(1-\Delta) - kan \geqslant n(1-ka) \geqslant n\Big(1 - \frac{k}{k^k} - \frac{2k^3}{k^{2k}}\Big) > 0,98n \geqslant 1. \tag{17}
$$

Из (14), (15), (11), (8) и (9) следует, что

$$
\begin{aligned}
n_2 &\geqslant (k-1)an - \frac{\Delta n}{1-\Delta} - sm \\
&> n\bigg(\frac{k-1}{k^k}\Big(1-\frac{k^2}{2k^k}\Big) - \frac{(k-2)}{k^k}\Big(1+\frac{k-1}{k^k}\Big) - \frac{k^{k+2}}{k^{2k+4}}\bigg) \\
&\geqslant n\Big(\frac{1}{k^k} - \frac{k^3}{2k^{2k}} - \frac{k^2}{k^{2k}} - \frac{1}{k^{k+2}}\Big) > \frac{0,87n}{k^k} \geqslant 1.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Из (12) и (15) получаем

$$
n_1 = an > \frac{n}{k^k}\Big(1 - \frac{k^2}{2k^k}\Big) \geqslant \frac{0,96n}{k^k} \geqslant 1. \tag{19}
$$

Таким образом, положительность величин n_0, n_1 и n_2 доказана. Поэтому можно воспользоваться леммой 5.

Перейдем к установлению нижней оценки числа $2m$-элементных последовательностей вершин в программе $\mathscr{P}_0$. Из лемм 3, 5 и соотношения (3) следует, что

$$
\begin{aligned}
\omega_{\mathscr{P}_0}(n,s,k,2m) &\geqslant \frac{\Phi(n,s)}{\binom{n}{n_0}\Phi(n_0,s)\Phi(n_1,s)\Phi(n_2,s)} \\
&= \frac{(n_0/s)!(n_1/s)!(n_2/s)!(n_1+n_2)!}{(n/s)!n_1!n_2!}.
\end{aligned}
$$

Отсюда, используя неравенства Стирлинга $\sqrt{2\pi v}\left(\frac{v}{e}\right)^v < v! < \sqrt{2\pi v}\left(\frac{v}{e}\right)^v e^{1/(12v)}$, получаем

$$\begin{aligned}\omega_{\mathscr{P}_0}(n,s,k,2m) &\geqslant \sqrt{\frac{2\pi n_0(n_1+n_2)}{ns^2}}\,\frac{n_0^{n_0/s}n_1^{n_1/s}n_2^{n_2/s}(n_1+n_2)^{n_1+n_2}}{n^{n/s}n_1^{n_1}n_2^{n_2}e^{s/(12n)+1/(12n_1)+1/(12n_2)}}\\ &\geqslant \sqrt{\frac{2n_0(n_1+n_2)}{ns^2}}\,\frac{n_0^{n_0/s}n_1^{n_1/s}n_2^{n_2/s}(n_1+n_2)^{n_1+n_2}}{n^{n/s}n_1^{n_1}n_2^{n_2}}.\end{aligned} \tag{20}$$

Оценим снизу первый множитель в формуле (20). Если n и k удовлетворяют условию леммы 6, т. е. $n \geqslant k^{2k+4}$ и $k \geqslant 4$, то из (9) и (17)–(19) имеем

$$\sqrt{\frac{n_0(n_1+n_2)}{ns^2}} \geqslant \sqrt{\frac{0,98n\left(\frac{0,96n}{k^k}+\frac{0,87n}{k^k}\right)}{nk^4}} \geqslant \sqrt{\frac{k^{2k+4}}{k^{k+2}}} > 1. \tag{21}$$

При любом $b > 0$ функция x^{bx} возрастает при $x > 1/e$. Поэтому из (20), (21) и (12)–(14) следует, что

$$\begin{aligned}\omega_{\mathscr{P}_0} &\geqslant \frac{\left(\frac{n}{1-\Delta}-kan\right)^{\left(\frac{n}{1-\Delta}-kan\right)/s}\left(kan-\frac{\Delta n}{1-\Delta}-ms\right)^{kan-\frac{\Delta n}{1-\Delta}-ms}}{n^{n/s}(na)^{na(1-1/s)}\left((k-1)an-\frac{\Delta n}{1-\Delta}\right)^{\left((k-1)an-\frac{\Delta n}{1-\Delta}\right)(1-1/s)}}\\ &= \left(\frac{\left(\frac{1}{1-\Delta}-ka\right)^{\left(\frac{1}{1-\Delta}-ka\right)}\left(ka-\frac{\Delta}{1-\Delta}\right)^{s\left(ka-\frac{\Delta}{1-\Delta}\right)}}{a^{a(s-1)}\left((k-1)a-\frac{\Delta}{1-\Delta}\right)^{\left((k-1)a-\frac{\Delta}{1-\Delta}\right)(s-1)}}\right)^{n/s}\cdot\frac{1}{n^{ms}}\\ &\times\frac{\left(1-sm/\left(kan-\frac{\Delta n}{1-\Delta}\right)\right)^{kan-\frac{\Delta n}{1-\Delta}-sm}}{\left(ka-\frac{\Delta}{1-\Delta}\right)^{ms}}.\end{aligned} \tag{22}$$

Оценим значение последнего множителя в (22). При n и k, удовлетворяющих условию леммы, из (8), (9), (11) и (15) следует, что

$$\begin{aligned}sm/(n(ka-\Delta/(1-\Delta))) &< \frac{k^{k+2}}{k^{2k+4}(ak-\Delta/(1-\Delta))}\\ &< \frac{1}{k^{k+2}\left(\frac{k}{k^k}\left(1-\frac{k^2}{2k^k}\right)-\frac{k-2}{k^k}\left(1+\frac{k-1}{k^k}\right)\right)}\\ &\leqslant \frac{1}{k^2(2-k^3/(2k^k)-(k-1)(k-2)/k^k)} < 1/16.\end{aligned}$$

Поэтому при $k \geqslant 4$ имеем

$$
\begin{aligned}
&(1 - sm/(kan - \Delta n/(1-\Delta)))^{kan - \Delta n/(1-\Delta) - sm}/(ka - \Delta/(1-\Delta))^{ms} \\
&= \exp\left(- \left(kan - \frac{\Delta n}{1-\Delta} - sm\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \left(\frac{sm}{kan - \frac{\Delta n}{1-\Delta}}\right)^i \right) (ka - \Delta)^{-ms} \\
&\geqslant \exp\left(- \left(kan - \frac{\Delta n}{1-\Delta} - sm\right) \left(\frac{sm}{kan - \frac{\Delta n}{1-\Delta}} + \frac{1}{2}\left(\frac{sm}{kan - \frac{\Delta n}{1-\Delta}}\right)^2\right) \right. \\
&\times \left(\frac{k}{k^k}\left(1 + \frac{2k^2}{k^k}\right) - \frac{k-2}{k^k}\right)\Bigg)^{-ms} \\
&\geqslant \exp\left(- sm + \frac{1}{2} \frac{(sm)^2}{kan - \Delta n/(1-\Delta n)} \right) (k^k/3)^{ms} \geqslant (k^k/(3e))^{ms}.
\end{aligned}
$$

Из (20), (22) и последнего факта следует, что

$$
\omega_{\mathscr{P}_0} \geqslant (k^k/(3en))^{ms} \exp\{(n/s) f(n,k,a)\}, \tag{23}
$$

где

$$
\begin{aligned}
f(n,k,a) &= (1/(1-\Delta) - ak) \ln(1/(1-\Delta) - ak) + a \ln a \\
&+ (a(k-1) - \Delta/(1-\Delta)) \ln((a(k-1) - \Delta/(1-\Delta)) \\
&+ s((ka - \Delta/(1-\Delta)) \ln(ka - \Delta/(1-\Delta)) - a \ln a \\
&- ((k-1)a - \Delta/(1 - \Delta/(1-\Delta))) \ln((k-1)a - \Delta/(1-\Delta)).
\end{aligned} \tag{24}
$$

Введем обозначение

$$
\varepsilon = \Delta/(1-\Delta) - (k-2)a. \tag{25}
$$

Тогда из (11), (15) и (16) следует, что

$$
\varepsilon \leqslant \frac{k-2}{k^k}\left(1 + \frac{k-1}{k^k}\right) - \frac{k-2}{k^k}\left(1 - \frac{k^2}{2k^k}\right) < \frac{k^3}{2k^{2k}} \tag{26}
$$

и

$$
\varepsilon \geqslant \frac{k-2}{k^k}\left(1 + \frac{k-2}{k^k}\right) - \frac{k-2}{k^k}\left(1 + \frac{2k^2}{k^k}\right) > -\frac{2k^3}{k^{2k}}. \tag{27}
$$

Используя обозначения (24) и (25), имеем

$$
\begin{aligned}
f(n,k,a) &= (1-2a+\varepsilon)\ln(1-2a+\varepsilon) + a\ln a + (a-\varepsilon)\ln(a-\varepsilon)\\
&\quad + s\Big((2a-\varepsilon)\ln(2a-\varepsilon) - a\ln a - (a-\varepsilon)\ln(a-\varepsilon)\Big)\\
&= -(1-(2a-\varepsilon))\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2a-\varepsilon)^i}{i} + a\ln a + (a-\varepsilon)\ln a\\
&\quad - (a-\varepsilon)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\Big(\frac{\varepsilon}{a}\Big)^i + s\bigg((2a-\varepsilon)\ln 2 + \ln a - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\Big(\frac{\varepsilon}{2a}\Big)^i\\
&\quad - a\ln a - (a-\varepsilon)\ln a + (a-\varepsilon)\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{\varepsilon}{a}\Big)^i\Big/i\bigg)\\
&= -(2a-\varepsilon) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2a-\varepsilon)^{i+1}}{i(i+1)} + (2a-\varepsilon)\ln a - \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{i+1}}{i(i+1)a^i}\\
&\quad + s\bigg((2a-\varepsilon)\ln 2 - \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{i+1}}{i(i+1)(2a)^i} + \varepsilon - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{i+1}}{i(i+1)a^i}\bigg)\\
&\geqslant -2a + (2a-\varepsilon)(\ln a + s\ln 2) - s\varepsilon^2/a.
\end{aligned}
$$

Далее, используя (15), (8), (9), (11), (16), (26) и (27), из последнего неравенства получаем

$$
\begin{aligned}
f(n,k,a) &\geqslant -2a + \Big(ka - \frac{\Delta}{1-\Delta}\Big)\bigg(-k\ln k + \ln\Big(1-\frac{k^2}{2k^k}\Big)\\
&\quad + \Big(\frac{k\ln k}{\ln 2} + 6\Big)\ln 2\bigg) - k^2\frac{\varepsilon^2}{a}\\
&\geqslant -\frac{2}{k^k}\Big(1+\frac{2k^2}{k^k}\Big) + \Big(\frac{2}{k^k} - \frac{k^3}{2k^{2k}} - \frac{(k-1)(k-2)}{k^{2k}}\Big)\\
&\quad \times\bigg(-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\Big(\frac{k^2}{2k^k}\Big)^i + 6\ln 2\bigg) - \frac{4k^{k+8}}{k^{4k}(1-k^2/2k^k)}\\
&\geqslant \frac{1}{k^k}\bigg(-2\Big(1+\frac{2k^2}{k^k}\Big) + \Big(2-\frac{k^3}{k^k}\Big)\Big(6\ln 2 - \frac{k^2}{k^k}\Big)\\
&\quad - \frac{4k^8}{k^{2k}(1-k^2/2k^k)}\bigg).
\end{aligned}
$$

Отсюда при $k \geqslant 4$ следует, что

$$
f(n,k,a) \geqslant 0,78/k^k.
$$

Из этого неравенства и (23) получаем

$$\omega_{\mathscr{P}_0}(n,s,k,2m) \geqslant \frac{\exp(0,78n/(sk^k))}{(3en/k^k)^{sk^k}}.$$

Лемма 6 доказана.

§ 2. Доказательство основного результата

Пусть $\lambda_{k,s}(f) = Bk(f)/Bs(f)$ и $\lambda_{k,s}(n) = \max \lambda_{k,s}(f)$, где максимум берется по всем булевым функциям от n переменных.

Если для функций $f(n)$ и $g(n)$ существует такая положительная константа C', что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \geqslant C'$, то будем использовать обозначение $f(n) \succeq g(n)$.

Теорема 1. *При любом фиксированном k, $k \geqslant 4$, для последовательности булевых функций F_{n,s_k} справедливо соотношение*

$$Bk(F_{n,s_k}) \succeq \exp(\alpha_k n),$$

где $\alpha_k = 0,19/(k^{2k+2})$.

Доказательство. При доказательстве как этой теоремы, так и последующих утверждений этого параграфа полагаем, что $s = s_k$, $m = m_k$, где s_k и m_k определены в (7). Число переменных функции $F_{n,s}$ равно мощности множества $X_{n,s}$ и задается (1). Ясно, что

$$|X_{n,s}| \leqslant n^s. \tag{28}$$

По следствию 1 имеем

$$Bk(F_{n,s}) \geqslant \frac{1}{2N}\sqrt{UBk(F_{n,s})(2k|X_{n,s}|)^{-1}}. \tag{29}$$

Пусть $\mathscr{P}_0$ — однородная k-программа минимальной сложности, реализующая функцию $F_{n,s}$, т. е. сложность $\mathscr{P}_0$ равна $UBk(F_{n,s_k})$. Тогда число различных $2m$-элементных последовательностей в $\mathscr{P}_0$ не превышает $UBk(F_{n,s})^{2m}$. Из этого факта, (7) и леммы 6 следует, что

$$(UBk(F_{n,s}))^{2m} \geqslant \frac{\exp(0,78n/(sk^k))}{(3en/k^k)^{sk^k}},$$

т. е.

$$UBk(F_{n,s}) \geqslant \frac{\exp(0,78n/(2sk^{2k}))}{(3en/k^k)^{s/2}}. \tag{30}$$

Из (28)–(30), (7) и (9) получаем

$$Bk(F_{n,s}) \geqslant \frac{1}{2n^s}\frac{\exp(0,195n/(sk^{2k}))}{(3en/k^k)^{s/4}\sqrt{2kn^s}}, \tag{31}$$

т. е.

$$Bk(F_{n,s}) \geqslant \frac{1}{2}\exp(0,195n/(k^{2k+2}))/n^{7k^2/4}. \tag{32}$$

Таким образом,

$$Bk(F_{n,s_k}) \succeq \exp(0,19n/k^{2k+2}).$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для последовательности функций* $F_{n,s_{k(n)}}$, *где* $4 \leqslant k(n) < C_1 \ln n/\ln\ln n$ *и* $C_1 < 1/2$ *— константа, не зависящая от* k *и* n, *справедливо соотношение*

$$Bk(F_{n,s_k}) \succeq \exp(\beta_k n^{1-2C_1}),$$

где $\beta_k = 0,19k^2$.

Доказательство. Так как $k(n)$ удовлетворяет условию $4 \leqslant k(n) < C_1 \ln n/\ln\ln n$, то при достаточно больших n величины n и k удовлетворяют условиям леммы 6. В самом деле,

$$\begin{aligned} k^{2k+4} &= \exp\{(2C_1 \ln n/\ln\ln n + 4)(\ln C_1 + \ln\ln n - \ln\ln\ln n)\} \\ &< \exp\{2C_1 \ln n - 2C_1 \ln n \ln\ln\ln n/\ln\ln n + 4\ln\ln n - 4\ln\ln\ln n\} \\ &\preceq \exp\{2C_1 \ln n\} = n^{2C_1} < n. \end{aligned} \tag{33}$$

Равенства (29)–(31) также справедливы и в этом случае. Из (31), (33) и (9) следует, что при $4 \leqslant k < C_1 \ln n/\ln\ln n$

$$\begin{aligned} Bk(F_{n,s_k}) &\geqslant \frac{1}{2N}\exp\Big(\frac{0,78n}{4k^{2k+2}} - \frac{k^2}{4}\ln(3en/k^k) - \frac{1}{2}\ln(2k) - \frac{k^2}{2}\ln n\Big) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\exp\Big(0,195k^2n^{1-2C_1} - 7k^2\ln n/4 - k^2\ln(3e)/4 + k^3\ln k/4 - \ln(2k)/2\Big) \\ &\succeq \exp(0,19k^2n^{1-2C_1}). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Так как $k(n) \geqslant 4$, то $\beta_k \geqslant 3$. Поэтому справедливо

Следствие 3. *Для последовательности функций* $F_{n,s_{k(n)}}$ *где* $4 \leqslant k(n) < C_1 \ln n/\ln\ln n$ *и* $C_1 < 1/2$ *— константа, не зависящая от* k *и* n, *справедливо соотношение*

$$Bk(F_{n,s_k}) \succeq \exp(3n^{1-2C_1}).$$

Теорема 3. *Для любого фиксированного* k, $k \geqslant 4$, *существует такая положительная константа* α_k, *зависящая только от* k, *что*

$$\lambda_{k,s_k}(N) \succeq \exp(\alpha_k N^{1/s_k}).$$

Доказательство. По данному N и k выберем максимально возможное значение $n(k,N)$ такое, что число переменных функции $F_{n(k,N),s}$

(см. (1)) не превосходит N. Так как по определению функции $F_{n(k,N),s}$ величина n должна делиться на s, то имеем

$$\binom{n}{s} \leqslant N < \binom{n+s}{s}.$$

Из этого факта следует, что

$$\left(\frac{n}{s}\right)^s \leqslant N \leqslant n^s. \tag{34}$$

Из (1), (2) и (34) имеем

$$Bs(F_{n,s}) \leqslant sN. \tag{35}$$

Из этого факта, (34), (9) и (32) следует, что

$$\begin{aligned}\lambda_{k,s}(N) &\geqslant Bk(F_{n,s})/Bs_k(F_{n,s}) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\exp(0,195n/k^{2k+2})/(n^{7k^2/4}k^2n^{k^2}) \succeq \exp(\alpha_k N^{1/s_k}),\end{aligned}$$

где $\alpha_k = 0,19/k^{2k+2}$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Для любых натуральных N и $k(N)$, где $4 \leqslant k(N) < C_2\sqrt{\ln N}/\ln\ln N$, а $C_2 < \sqrt{2}$ — константа, не зависящая от k, существует такая положительная константа β_k, зависящая только от k, что*

$$\lambda_{k,s_k}(N) \succeq \exp(\beta_k N^{(1-C_2^2)/s_k}).$$

Доказательство. По данным N и k выберем максимально возможное значение $n(k,N)$ такое, что число переменных функции $F_{n(k,N),s}$ не превосходит N. Тогда $n(k,N)$ и N связаны соотношением (34). Из этого соотношения вытекает, что

$$N^{1/s} < n < sN^{1/s}. \tag{36}$$

Проверим, что таким образом выбранное $n(k,N)$ удовлетворяют условиям леммы 6, т. е. $n > k^{2k+4}$. Из (36) следует, что для этого достаточно проверить, что $k^{2k+4} < N^{1/s}$, т. е. $s(2k+4)\ln k < \ln N$. В самом деле, при $k \geqslant 4$ при достаточно больших N из (7) следует, что

$$\begin{aligned}&s(2k+4)\ln k < (k\ln k + 7)(2k+4)\ln k < (2k^2+20k)\ln^2 k \\ &< \left(2C_2^2\frac{\ln N}{\ln^2\ln N} + 20\frac{\sqrt{\ln 2N}}{\ln\ln N}\right)(\ln 2/2 + (\ln\ln N)/2 - \ln\ln\ln N)^2 < \frac{C_2^2}{2}\ln N.\end{aligned} \tag{37}$$

Отсюда, а также из (34) и (36) имеем

$$k^{2k+4} \leqslant N^{C_2^2/(2s)} < N^{1/s} < n. \tag{38}$$

Пользуясь этим фактом, соотношениями (9), (31), (36), (38), а также неравенством (35), получаем

$$\lambda_{k,s_k}(N) \geqslant \frac{Bk(F_{n,s_k})}{Bs_k(F_{n,s_k})} \geqslant \frac{\exp(0,195n/k^{2k+2})}{2((3en/k^k)^{s/4}\sqrt{2kn^s}sN}$$
$$\geqslant \frac{\exp(0,195N^{1/s}/(k^{2k+2}))}{2(3e/k^k)^{s/4}(sN^{1/s})^{s/4}\sqrt{2k}(N^{1/s})^{s/2}sN}$$
$$\geqslant \frac{\exp(0,195k^2N^{1/s}/(N^{C_2^2/(2s)}))}{2N^{7s/4}(3es/k^k)^{s/4}s\sqrt{2k}} \succeq \exp(\beta_k N^{(1-C_2^2/2)/s}),$$

где $\beta_k = 0,19k^2$. Теорема 4 доказана.

Так как $k(n) \geqslant 4$, то $\beta_k \geqslant 3$. Поэтому справедливо

Следствие 4. *При любых натуральных N и $k(n)$ таких, что $4 \leqslant k(n) < C_2\sqrt{\ln N}/\ln\ln N$ и $C_2 < \sqrt{2}$ — константа, не зависящая от k, справедливо соотношение*

$$\lambda_{k,s_k}(N) \succeq \exp(3N^{(1-(C_2)^2)/s_k}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лупанов О. Б.** О вентильных и контактно-вентильных схемах // Докл. АН СССР. 1956. Т. 111, № 6. С. 1171–1174.
2. **Окольнишникова Е. А.** Нижние оценки сложности реализации характеристических функций двоичных кодов бинарными программами // Методы дискретного анализа в синтезе реализаций булевых функций: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1991. Вып. 51. С. 61–83. (Пер.: **Okol'nishnikova E. A.** Lower bounds on branching programs // Siberian Adv. Math. 1993. V. 3, N 1. P. 152–166.)
3. **Окольнишникова Е. А.** О сравнении сложностей бинарных k-программ // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 54–73.
4. **Разборов А. А.** Нижние оценки сложности реализации симметрических булевых функций контактно-вентильными схемами // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 6. С. 79–90.
5. **Borodin A. B., Razborov A. A., Smolensky R.** On lower bounds for read-k-times branching programs // Comput. Complexity. 1993. V. 3, N 1. P. 1–18.
6. **Jukna S.** A note on read-k times branching programs // RAIRO Inform. Théor. Appl. 1995. V. 29, N 1. P. 75–83.

7. **Okol'nishnikova E. A.** On the hierarchy of nondeterministic branching k-programs // Fundamentals of computation theory. Berlin: Springer, 1997. P. 376–387. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 1279).
8. **Pudlák P.** The hierarchy of Boolean circuits // Comput. Artificial Intelligence. 1987. V. 6, N 5. P. 449–468.
9. **Razborov A. A.** Lower bounds for deterministic and nondeterministic branching programs // Fundamentals of computation theory. Berlin: Springer-Verl., 1991. P. 47–60. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 529).
10. **Sieling D., Wegener I.** New lower bounds and hierarchy results for restricted branching programs // Graph-theoretical concepts in computer science. Berlin: Springer-Verl., 1995. P. 359–370. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 903).
11. **Thathachar J. S.** On separating the read-k-times branching program hierarchy // Technical Report TR-98-002, Electronic Colloquium on Computational Complexity, 1998.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: okoln@math.nsc.ru

Статья поступила
1 июня 1998 г.