ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 1999. Серия 1. Том 6, № 2, 62–69

УДК 519.1

О ЦИКЛИЧЕСКИХ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯХ ДВОИЧНЫХ НАБОРОВ ЧЕРЕЗ ЗАДАННЫЕ РАССТОЯНИЯ*)

А. Л. Пережогин

Рассматривается задача такого циклического перечисления всех двоичных наборов длины n, при котором соседние в перечислении наборы находятся на заданных расстояниях Хемминга друг от друга. Получены необходимые и достаточные условия существования таких перечислений при циклическом повторении одного, двух или четырех расстояний.

Одной из активно изучаемых задач в области комбинаторных алгоритмов является задача такого эффективного порождения объектов некоторого множества, чтобы каждый объект порождался ровно один раз. Частный случай этой общей задачи — порождение объектов в порядке минимального изменения, при котором соседние в перечислении объекты различаются на малую величину. Классическим примером является двоично-отраженный код Грея [4], который так линейно упорядочивает все двоичные наборы длины n, что соседние наборы различаются только в одной позиции. В [5] введен термин «комбинаторный код Грея», который теперь используется для любого порождения комбинаторных объектов при некотором линейном порядке. Обзор по комбинаторным кодам Грея содержится в [6].

Многие задачи существования и эффективного задания кодов Грея для двоичных наборов решаются на языке символьных последовательностей с запретами на подслова [1–3]. Вместо самого кода Грея при таком подходе рассматривается его переходная последовательность, а ограничения на порядок двоичных наборов формулируются с помощью запретов на подслова. Этот метод используется и в данной работе.

Ниже рассматривается следующая задача. Пусть задан список расстояний $D = \langle d_1, d_2, \ldots, d_{2^n} \rangle$. Существует ли такое перечисление $\bar{b}_0, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{2^n-1}$ всех двоичных наборов длины n, при котором

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00531) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 1997 г. № 473).

$\rho(\bar{b}_i, \bar{b}_{(i+1) \bmod 2^n}) = d_{i+1}$, где ρ — расстояние Хемминга. Получены необходимые и достаточные условия существования таких перечислений в случае, когда список D является циклическим повторением одного, двух или четырех расстояний. При решении этой задачи используются обобщенные переходные последовательности.

Введем некоторые определения и обозначения. Под n-буквенным алфавитом A_n будем понимать множество $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Пусть $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — произвольный двоичный набор длины n. Тогда через $MI(\bar{b})$ обозначим множество индексов единиц в наборе $\bar{b}$, т. е. $MI(\bar{b}) = \{i \mid b_i = 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Для произвольного множества $X \subset A_n$ через e_X обозначим двоичный набор, в котором единицы находятся только на позициях с номерами из X, т. е. $e_X = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, где $b_i = 1$ тогда и только тогда, когда $i \in X$.

Последовательность n-мерных двоичных наборов $\bar{b}_0,\ \bar{b}_1,\ \ldots,\ \bar{b}_{2^n-1}$ назовем $(d_1, d_2, \ldots, d_{2^k}; n)$-перечислением, если выполнены следующие условия:

(i) $\bar{b}_i \neq \bar{b}_j$ при любых $i \neq j$;

(ii) $\rho(\bar{b}_{2^k i+j}, \bar{b}_{2^k i+j+1}) = d_{j+1}$ при любых i и j, $0 \leqslant i < 2^{n-k}$ и $0 \leqslant j < 2^k$, где $\bar{b}_{2^n} = \bar{b}_0$.

Соответствующую последовательность множеств

$$MI(\bar{b}_0 \oplus \bar{b}_1),\quad MI(\bar{b}_1 \oplus \bar{b}_2), \ldots, MI(\bar{b}_{2^n-2} \oplus \bar{b}_{2^n-1}),\quad MI(\bar{b}_{2^n-1} \oplus \bar{b}_0)$$

будем называть $(d_1, d_2, \ldots, d_{2^k}; n)$-перечисляющей, где $\oplus$ — операция покомпонентного сложения по модулю 2.

Например, последовательность

$$(000),\ (110),\ (010),\ (100),\ (101),\ (011),\ (111),\ (001)$$

является (2,1;3)-перечислением, а соответствующая последовательность множеств

$$\{1,2\},\ \{1\},\ \{1,2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1\},\ \{1,2\},\ \{3\}$$

является (2,1;3)-перечисляющей.

Очевидно, что если все числа d_i четны, то $(d_1, d_2, \ldots, d_{2^k}; n)$-перечисления не существует.

Основным результатом настоящей работы является установление необходимых и достаточных условий существования таких перечислений при $k \in \{0, 1, 2\}$. Предварительно установим некоторые вспомогательные факты.

Предложение 1. *Последовательность множеств $SX = X_1, X_2, \dots, X_{2^n}$ в алфавите A_n является $(d_1, d_2, \dots, d_{2^k}; n)$-перечисляющей тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

(a) $|X_{2^k i+j}| = d_j$ *при любых i и j таких, что $0 \leqslant i < 2^{n-k} - 1$ и $0 < j \leqslant 2^k$;*

(b) $e_{X_i} \oplus e_{X_{i+1}} \oplus \dots \oplus e_{X_j} \neq \overline{0} = (0, 0, \dots, 0)$ *при любых i и j таких, что $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2^n - 1$;*

(c) $e_{X_1} \oplus e_{X_2} \oplus \dots \oplus e_{X_{2^n}} = \overline{0}$.

Предложение 2. *Если последовательность $SX = X_1, X_2, \dots, X_{2^n}$ является $(d_1, d_2, \dots, d_{2^k}; n)$-перечисляющей, то последовательность двоичных наборов $V(SX) = \overline{b}_0, \overline{b}_1, \dots, \overline{b}_{2^n-1}$ такая, что*

$$\overline{b}_0 = \overline{0},$$
$$\overline{b}_i = \overline{b}_{i-1} \oplus e_{X_i}, \quad i \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\},$$

является $(d_1, d_2, \dots, d_{2^k}; n)$-перечислением.

Заметим, что $(1; n)$-перечисление — это n-мерный код Грея. Пусть $\{y_1\}, \{y_2\}, \dots \{y_{2^n}\}$ — его $(1; n)$-перечисляющая последовательность. Тогда слово $y_1\ y_2\ \dots\ y_{2^n}$ обычно называется переходной последовательностью размерности n.

Лемма 1. *Если существует $(d_1, d_2, \dots, d_{2^k}; n)$-перечисление, то существует $(d_1, d_2, \dots, d_{2^k}; n + 1)$-перечисление.*

Доказательство. Пусть последовательность $SX = X_1, X_2, \dots, X_{2^n}$ является $(d_1, d_2, \dots, d_{2^k}; n)$-перечисляющей и пусть a — произвольный элемент множества X_{2^n}. Тогда нетрудно видеть, что последовательность

$$(X_1, X_2, \dots, X_{2^n} \cup \{n+1\} \backslash \{a\})^2$$
$$= X_1, X_2, \dots, X_{2^n} \cup \{n+1\} \backslash \{a\}, X_1, X_2, \dots, X_{2^n} \cup \{n+1\} \backslash \{a\}$$

является искомой $(d_1, d_2, \dots, d_{2^k}; n + 1)$-перечисляющей последовательностью.

Заметим, что эта лемма является обобщением простейшей конструкции, позволяющей с помощью конкатенации двух переходных последовательностей размерности n получать переходную последовательность размерности $n + 1$.

Лемма 2. *Если существует $(d_1, d_2, \dots, d_{2^k}; n)$-перечисление, то существует $(d'_1, n+1, d'_2, n+1, \dots, d'_{2^k}, n+1; n+1)$-перечисление при любом $d'_i \in \{d_i,\ n - d_i + 1\}$, $1 \leqslant i \leqslant 2^k$.*

Доказательство. Пусть последовательность $SX = X_1, X_2, \dots, X_{2^n}$ является $(d_1, d_2, \dots, d_{2^k}; n)$-перечисляющей и пусть

$$X_i' = \begin{cases} X_i, & \text{если } d_i' = d_i, \\ A_n \backslash X_i & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда нетрудно видеть, что последовательность множеств

$$X_1', A_n, X_2', A_n, \dots, X_{2^n}', A_n$$

является искомой $(d_1', n+1, d_2', n+1, \dots, d_{2^k}', n+1; n+1)$-перечисляющей последовательностью.

Утверждение 1. *При любых n и d, $d < n$, $(d; n)$-перечисление существует тогда и только тогда, когда d нечетно.*

Доказательство. Используя лемму 1, достаточно показать, что при любом нечетном d существует $(d; d+1)$-перечисление. Рассмотрим произвольную переходную последовательность $x_1 x_2 \dots x_{2^{d+1}}$ в алфавите A_{d+1}. Пусть $X_i = A_{d+1} \backslash \{x_i\}$ при каждом $i \in \{1, 2, \dots, 2^{d+1}\}$. Тогда $X = X_1, X_2, \dots, X_{2^{d+1}}$ — искомая $(d; d+1)$-перечисляющая последовательность. Действительно, достаточно показать, что при любых i и j, $1 \leqslant i \leqslant j < 2^{d+1}$, верно неравенство $e_{X_i} \oplus e_{X_{i+1}} \oplus \dots \oplus e_{X_j} \neq \overline{0}$. Если $j - i$ является четным числом, то последнее неравенство верно, так как d нечетно, а в случае, когда $j - i$ является нечетным числом, неравенство $e_{X_i} \oplus e_{X_{i+1}} \oplus \dots \oplus e_{X_j} = e_{x_i} \oplus e_{x_{i+1}} \oplus \dots \oplus e_{x_j} \neq \overline{0}$ следует из свойств переходной последовательности кода Грея.

Из утверждения 1, лемм 1 и 2 непосредственно вытекает следующее

Утверждение 2. *При любых n, d_1 и d_2, $d_1 < d_2 \leqslant n$, $(d_1, d_2; n)$-перечисление существует тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел d_1 или d_2 является нечетным.*

Набор параметров $\langle d_1, d_2, \dots, d_{2^k}; n\rangle$ назовем *допустимым*, если

(a) $d_i \leqslant n$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant 2^k$;

(b) хотя бы одно d_i является нечетным;

(c) если $d_i = n$, то $d_{i+1} \neq n$ (полагаем $d_{2^k+1} = d_1$);

(d) если $\{i_1, i_2, \dots, i_r\} = \{i \mid d_i \text{ — нечетное}, \ 1 \leqslant i \leqslant 2^k\}$ таково, что $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, и r четно, то

$$\sum_{j=1}^{r/2} (i_{2j} - i_{2j-1}) = \sum_{j=1}^{r/2-1} (i_{2j+1} - i_{2j}) + 2^k - i_r + i_1.$$

Условие (d) обеспечивает «равномерность» перечисления наборов различной четности. В случае $k = 2$ это условие можно сформулировать в следующем виде:

(d$'$) если два из четырех параметров d_1, d_2, d_3 и d_4 являются нечетными, то d_1 и d_3 имеют одинаковую четность.

Нетрудно видеть, что если не выполнено хотя бы одно из перечисленных выше четырех условий, то $(d_1, d_2, \dots, d_{2^k}; n)$-перечисления не существует. Из утверждений 1 и 2 следует, что при $k \in \{0, 1\}$ совокупность этих условий является необходимой и достаточной для существования $(d_1, d_2, \dots, d_{2^k}; n)$-перечислений. Следующая теорема показывает, что это верно и при $k = 2$.

Теорема 1. *При любом $n \geqslant 3$ $(d_1, d_2, d_3, d_4; n)$-перечисление существует тогда и только тогда, когда набор параметров $\langle d_1, d_2, d_3, d_4; n\rangle$ является допустимым.*

При доказательстве теоремы используется конструкция, описанная в следующей лемме.

Лемма 3. *Пусть $SX = X_1, X_2, \dots, X_8$ — такая $(l_1, l_2, l_3, l_4; 3)$-перечисляющая последовательность в алфавите $\{1, 2, a\}$, что $a \in X_i$ тогда и только тогда, когда $a \in X_{i+4}$ при любом $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Далее, пусть $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ таково, что l_j является нечетным. Тогда $(d_1, d_2, d_3, d_4; n)$-перечисление существует, если выполнены следующие условия:*

(a) *$d_j = d + |X_j \backslash \{a\}|$ при некотором нечетном d, $d < n - 2$;*

(b) *$d_i = d'_i + |X_i \backslash \{a\}|$ при любом $i \in \{1, 2, 3, 4\} \backslash \{j\}$, где $d'_i \equiv l_i \pmod 2$, $0 \leqslant d'_i \leqslant n - 2$.*

Доказательство. Из леммы 1 следует существование $(d; n-2)$-перечисляющей последовательности $Z_1, Z_2, \dots, Z_{2^{n-2}}$ в алфавите $A_n \backslash \{1, 2\}$. Для каждого $i \in \{1, 2, 3, 4\} \backslash \{j\}$ пусть $Y_i \subset \{3, 4, \dots, n\}$ и $|Y_i| = d_i - |X_i \backslash \{a\}|$. Построим последовательность $ST' = T'_1, T'_2, \dots, T'_{2^n}$ следующим образом. Пусть при всех $s \in \{0, 1, \dots, 2^{n-3} - 1\}$ и $i \in \{1, 2, 3, 4\} \backslash \{j\}$

$$\begin{aligned} T'_{j+8s} &= X_j \cup Z_{2s+1}, \\ T'_{j+8s+4} &= X_{j+4} \cup Z_{2s+2}, \\ T'_{i+8s} &= X_i \cup Y_i, \\ T'_{i+8s+4} &= X_{i+4} \cup Y_i. \end{aligned}$$

Пусть $T_i = T'_i \backslash \{a\}$ при всех i, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$. Тогда последовательность $ST = T_1, T_2, \dots, T_{2^n}$ является $(d_1, d_2, d_3, d_4; n)$-перечисляющей. Действительно, ST удовлетворяет условиям (a) и (c) из предложения 1. Предположим, что условие (b) не выполнено, т. е. для некоторых p и q, $1 \leqslant p < q \leqslant 2^n$, выполнено равенство $e_{T_p} \oplus e_{T_{p+1}} \oplus \dots \oplus e_{T_{q-1}} = \overline{0}$. Тогда в последовательности $T_p, T_{p+1}, \dots, T_{q-1}$ имеется четное число множеств нечетной мощности. Но по построению $|T_i|$ нечетно тогда и только тогда, когда $a \in T'_i$, т. е. в множествах $T'_p, T'_{p+1}, \dots, T'_{q-1}$ каждая буква 1, 2 и a встречается четное число раз. Следовательно, $q - p \equiv 0 \pmod 8$. Но тогда число множеств, подмножеством которых является Y_i, в последовательности $T_p, T_{p+1}, \ldots, T_{q-1}$ четно при любом $i \in \{1,2,3,4\} \backslash \{j\}$. Поэтому существуют такие i_1 и i_2, $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant 2^{n-2}$, что верно равенство

$$e_{T_p} \oplus e_{T_{p+1}} \oplus \cdots \oplus e_{T_{q-1}} = e_{Z_{i_1}} \oplus e_{Z_{i_1+1}} \oplus \cdots \oplus e_{Z_{i_2-1}}.$$

Но последовательность $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{2^{n-2}}$ является $(d; n-2)$-перечисляющей. Следовательно,

$$e_{Z_{i_1}} \oplus e_{Z_{i_1+1}} \oplus \cdots \oplus e_{Z_{i_2-1}} \neq \overline{0}.$$

Противоречие. Поэтому последовательность ST порождает искомое перечисление.

Доказательство теоремы 1. Используя лемму 1, достаточно показать, что искомое перечисление существует при следующих вариантах допустимых наборов параметров (с точностью до циклического сдвига и обращения):

1. $d_1 = n > d_i$, $2 \leqslant i \leqslant 4$.
   - 1.1. n — четное.
     - 1.1.a. d_2 и d_4 нечетные, d_3 четное;
     - 1.1.b. d_2 нечетное, d_3 и d_4 четные;
     - 1.1.c. d_3 нечетное, d_2 и d_4 четные;
     - 1.1.d. все d_i нечетные;
   - 1.2. n — нечетное.
     - 1.2.a. d_2 и d_4 четные, d_3 нечетное;
     - 1.2.b. d_2 четное, d_3 и d_4 нечетные;
     - 1.2.c. d_3 четное, d_2 и d_4 нечетные;
     - 1.2.d. все d_i четные;
     - 1.2.e. все d_i нечетные;
2. $d_1 = d_3 = n > d_i$, $i \in \{2,4\}$.
3. $n > d_1 = d_2 \geqslant d_i$, $i \in \{3,4\}$.
   - 3.a. d_1 и d_3 четные, d_4 нечетное;
   - 3.b. d_1 и d_3 нечетные, d_4 четное;
   - 3.c. все nd_i нечетные.

Существование искомого перечисления в случае 2 вытекает из утверждения 2 и леммы 2. В остальных случаях будем использовать лемму 3. Ниже для каждого набора параметров приведены последовательность SX и номер j, при которых выполняются условия леммы 3, а следовательно, обеспечивается существование соответствующего перечисления.

1.1.a. $SX = (\{1,2\},\{1,a\},\{1\},\{1,a\})^2$, $j = 3$.

1.1.b. $SX = (\{1,2\},\{1,a\},\{1,2\},\{1\})^2$, $j = 4$.

1.1.c. Если $d_3 \geqslant 3$, то $SX = (\{1,2\},\{1\},\{1,2,a\},\{1\})^2$, $j = 3$. Если же $d_3 = 1$, то $SX = (\{1,2\},\{1\},\{a\},\{1\})^2$, $j = 3$.

1.1.d. Если $d_3 \geqslant 3$, то $SX = (\{1,2\},\{1,a\},\{1,2,a\},\{1,a\})^2$, $j = 3$. Если же $d_3 = 1$, то $SX = (\{1,2\},\{1,a\},\{a\},\{1,a\})^2$, $j = 3$.

1.2.a. Если $d_3 \geqslant 3$, то $SX = (\{1,2,a\},\{1\},\{1,2,a\},\{2\})^2$, $j = 3$. Если же $d_3 = 1$, то $SX = (\{1,2,a\},\{1\},\{a\},\{1\})^2$, $j = 3$.

1.2.b. Если $d_3 \geqslant 3$, то $SX = (\{1,2,a\},\{1\},\{1,2,a\},\{1,a\})^2$, $j = 3$. Если же $d_3 = 1$, то $SX = \{1,2,a\},\{1\},\{a\},\{2,a\}\{1,2,a\},\{2\},\{a\},\{1,a\}$, $j = 3$.

1.2.c. $SX = (\{1,2,a\},\{a\},\{1\},\{a\})^2$. Если $d_2 < n-2$, то $j = 2$; если $d_2 = n-2$ и $d_3 < n-1$, то $j = 3$; если $d_2 = n-2$, $d_3 = n-1$ и $d_4 < n-2$, то $j = 4$.

Случай $d_2 = n-2$, $d_3 = n-1$ и $d_4 = n-2$ рассмотрим отдельно. Пусть $x_1x_2\dots x_{2^{n-2}}$ — произвольная переходная последовательность кода Грея в алфавите $\{3,4,\dots,n\}$. Тогда последовательность $SW = W_1, W_2, \dots, W_{2^n}$ такая, что

$$
\begin{aligned}
W_{4s+1} &= \{1,2,\dots,n\},\\
W_{4s+2} &= \{1,4,5,\dots,n\},\\
W_{4s+3} &= \{1,2,\dots,n\}\setminus\{x_{s+1}\},\\
W_{4s+4} &= \{1,4,5,\dots,n\},
\end{aligned}
$$

$0 \leqslant s \leqslant 2^{n-2}-1$, является $(n, n-2, n-1, n-2; n)$-перечисляющей. Предположим, что это не так. Тогда для некоторых p и q, $1 \leqslant p < q \leqslant 2^{n-2}$, выполнено равенство $e_{W_p} \oplus e_{W_{p+1}} \oplus \dots \oplus e_{W_{q-1}} = \overline{0}$. Отсюда следует, что в множествах $W_p, W_{p+1}, \dots, W_{q-1}$ каждая из букв 1 и 2 встречается четное число раз. Следовательно, $q - p \equiv 0 \pmod 4$. Поэтому существуют такие i_1 и i_2, $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant 2^{n-2}$, что верно равенство

$$e_{W_p} \oplus e_{W_{p+1}} \oplus \dots \oplus e_{W_{q-1}} = e_{x_{i_1}} \oplus e_{x_{i_1+1}} \oplus \dots \oplus e_{x_{i_2-1}}.$$

Но $x_1x_2\dots x_{2^{n-2}}$ является переходной последовательностью кода Грея. Следовательно,

$$e_{x_{i_1}} \oplus e_{x_{i_1+1}} \oplus \dots \oplus e_{x_{i_2-1}} \neq \overline{0}.$$

Противоречие.

1.2.d. $SX = (\{1,2,a\},\{1\},\{1,2\},\{1\})^2$. Если $d_2 < n-1$, то $j = 2$; если $d_2 = n-1$ и $d_4 < n-1$, то $j = 4$; если $d_2 = d_4 = n-1$ и $d_3 < n-1$, то $SX = (\{1,2,a\},\{1,2\},\{1\},\{1,2\})^2$, $j = 3$. При $d_2 = d_3 = d_4 = n-1$ искомое перечисление порождается последовательностью

$$W_1, W_2 \cup \{3\}, W_3, W_4 \cup \{3\}, \dots, W_{2^n-1}, W_{2^n} \cup \{3\}.$$

1.2.e. Если $d_3 \geqslant 3$, то $SX = (\{1,2,a\},\{a\},\{1,2,a\},\{1,a\})^2$, $j = 3$. Если же $d_3 = 1$, то $SX = (\{1,2,a\},\{1,a\},\{a\},\{1,a\})^2$, $j = 3$.

3.a. Если $d_4 \geqslant 3$, то $SX = (\{1\},\{2\},\{1\},\{1,2,a\})^2$, $j = 4$. Если же $d_4 = 1$, то $SX = (\{1\},\{2\},\{1\},\{a\})^2$, $j = 4$.

3.b. $SX = (\{1,a\},\{2,a\},\{1,a\},\{2\})^2$, $j = 4$.

3.c. Если $d_4 \geqslant 3$, то $SX = (\{1,a\},\{2,a\},\{1,a\},\{1,2,a\})^2$, $j = 4$. Если же $d_4 = 1$, то $SX = (\{1,a\},\{2,a\},\{1,a\},\{a\})^2$, $j = 4$.

Таким образом, для любого допустимого набора параметров $\langle d_1, d_2, d_3, d_4; n\rangle$ построено $(d_1, d_2, d_3, d_4; n)$-перечисление. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Евдокимов А. А.** О нумерации подмножеств конечного множества // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980. Вып. 34. С. 8–26.
2. **Евдокимов А. А.** Вложение цепей и циклов в гиперкуб. I // Методы дискретного анализа в решении экстремальных задач: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. Вып. 50. С. 10–25.
3. **Пережогин А. Л.** О локально изометрическом кодировании натуральных чисел // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 4. С. 69–76.
4. **Gray F.** Pulse code communications. U. S. Patent 2632058, March 1953.
5. **Joichi J. T., White D. E., Williamson S. G.** Combinatorial Gray codes // SIAM J. Comput. 1980. V. 9, N 1. P. 130–141.
6. **Savage C. D.** A survey of combinatorial Gray codes // SIAM Rev. 1997. V. 39, N 4. P. 605–629.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: pereal@math.ncs.ru

Статья поступила
10 марта 1999 г.