ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 1999. Серия 1. Том 6, № 2, 82–96

УДК 519.1

АФФИННЫЕ СИММЕТРИИ МНОГОГРАННИКА СИСТЕМЫ НЕЗАВИСИМОСТИ С ЕДИНИЧНЫМ СДВИГОМ

О. В. Червяков

В терминах неразделимых множеств получен критерий существования симметрии [3] многогранника системы независимости. Этот вопрос сводится к вопросу о существовании симметрии со сдвигом, являющимся вектором инциденций одноэлементных множеств. Для последнего случая рассмотрены приложения к многогранникам паросочетаний, матроидов и остовных деревьев. При условии существования симметрии многогранника системы независимости разработан алгоритм понижения размерности соответствующей оптимизационной задачи с аддитивной целевой функцией.

Введение

Пусть $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — множество мощности n. *Системой независимости* на множестве E называется непустое семейство $\mathscr{J}$ его подмножеств, удовлетворяющее условию: если $J \in \mathscr{J}$ и $I \subseteq J$, то $I \in \mathscr{J}$.

Множества из семейства $\mathscr{J}$ называются *независимыми множествами.* Максимальные по включению множества из $\mathscr{J}$ называются *базисами.* Каждому элементу e из E поставим в соответствие действительное положительное число v_e — *вес элемента* e. Во многих приложениях рассматривается задача нахождения независимого множества максимального веса: найти максимальное значение функции

$$v(I) = \sum_{e \in I} v_e \text{ при } I \in \mathscr{J}. \tag{1}$$

Под размерностью этой задачи будем понимать размерность множества E.

Пусть R^E — евклидово пространство, ассоциированное с E посредством взаимооднозначного соответствия между множеством координатных осей пространства R^E и множеством E. Иными словами, R^E можно понимать как совокупность вектор-столбцов размерности n с вещественными компонентами, индексированными элементами множества E. Каждому $S \subseteq E$ поставим в соответствие его *вектор инциденций* по правилу: $x_e^S = 1$ при $e \in S$, $x_e^S = 0$ при $e \notin S$. Очевидно, что это правило задает взаимооднозначное соответствие между 2^E и вершинами единичного куба в R^E. *Многогранник системы независимости* $\mathscr{J}$ определим как $P(\mathscr{J}) = Conv(x^I \mid I \in \mathscr{J})$ [7]. Ясно, что только векторы инциденций независимых множеств из $\mathscr{J}$ являются вершинами многогранника $P(\mathscr{J})$.

Интерес к многограннику системы независимости обусловливается тем, что вектор инциденций решения задачи (1) является решением следующей задачи в R^E: найти максимум скалярного произведения

$$v \cdot x \quad \text{при} \quad x \in P(\mathscr{J}), \tag{2}$$

где v — вектор, компонентами которого являются веса соответствующих элементов.

Пусть $P \subset R^E$ — произвольный многогранник. *Симметрией многогранника* P назовем такое невырожденное аффинное преобразование φ пространства R^E, что $\varphi(P) = \{\varphi(x) \mid x \in P\} = P$. Как известно, всякое невырожденное аффинное преобразование φ определяется невырожденной квадратной матрицей A порядка n и сдвигом $h \in R^E$, т. е. $\varphi(x) = Ax + h$ при $x \in R^E$ [1]. Очевидно, что невырожденное аффинное преобразование ψ пространства R^E является симметрией многогранника $P(\mathscr{J})$ тогда и только тогда, когда для любого $I \in \mathscr{J}$ существует такое $J \in \mathscr{J}$, что $\psi(x^I) = x^J$. Кроме того, в [5] было доказано, что сдвиг симметрии многогранника системы независимости является вектором инциденций некоторого независимого множества.

Симметрию с нулевым сдвигом будем называть *линейной симметрией*. Очевидно, что множество всех симметрий многогранника P является группой относительно суперпозиции отображений, а множество линейных симметрий — ее подгруппой. Группу всех симметрий многогранника $P(\mathscr{J})$ будем обозначать через $S(\mathscr{J})$, а ее подгруппу линейных симметрий — через $L(\mathscr{J})$.

Интерес к симметриям многогранников обусловливается большим количеством факторов. Например, легко доказать следующие утверждения.

1) Пусть $P \subset R^E$ — многогранник, $F = \{x \in P \mid a^T x = \alpha\}$ — его грань (см. [1]). Если φ — симметрия многогранника P с матрицей A и сдвигом h, то $H = \{x \in P \mid (a^T A^{-1})x = \alpha + a^T A^{-1} h\}$ также является гранью многогранника P, причем размерности граней F и H одинаковы. Отсюда, например, следует, что при симметрии вершина

переходит в вершину; возникает возможность «тиражирования» неравенств, порождающих фасеты *) многогранника [1, 6].

2) Симметрии позволяют «вносить корректировку» в целевую функцию оптимизационной задачи, а именно, если $\overline{x}$ — максимальное значение функции

$$(w^T A)x \quad \text{при} \quad x \in P, \tag{3}$$

где $w \in R^E$ и $\varphi(x) = Ax + h$ — симметрия многогранника P, то на векторе $x^* = A\overline{x} + h$ функция $w^T x (x \in P)$ принимает максимальное значение.

В [5] было доказано, что при существовании симметрии со сдвигом x^H задача (1) сводится к задаче, размерность которой не превосходит $|E| - |H|$. Алгоритм понижения размерности будет представлен в настоящей статье.

Кроме приведенных утверждений информация о группе симметрий может быть использована при анализе смежности вершин многогранника, при разработке процедур локальной оптимизации и во многих других случаях.

Пусть $H \in \mathscr{J}$. *H-отображением* будем называть линейное невырожденное преобразование ψ пространства R^E, удовлетворяющее условию: для любого $I \in \mathscr{J}$ существует такое $J \in \mathscr{J}$, что $\psi(x^I) = x^{J \triangle H}$, где под $J \triangle H$ подразумевается симметрическая разность множеств J и H. Напомним, что симметрическая разность обладает свойством $(J \triangle H) \triangle H = J$. Положим $\mathscr{J} \triangle H = \{I \triangle H \mid I \in \mathscr{J}\}$. Так как $|\mathscr{J} \triangle H| = |\mathscr{J}|$, то невырожденное преобразование ψ является H-отображением тогда и только тогда, когда для любого $J \in \mathscr{J} \triangle H$ вектор $\psi^{-1}(x^J)$ является вектором инциденций независимого множества.

В [5] были получены следующие результаты о структуре группы $S(\mathscr{J})$. Группу $S(\mathscr{J})$ можно разбить на непересекающиеся классы $\{S_H\}_{H \in \mathscr{J}}$, где S_H — класс симметрий многогранника $P(\mathscr{J})$, имеющих сдвиг x^H. Это позволяет свести описание группы $S(\mathscr{J})$ к описанию классов $\{S_H\}_{H \in \mathscr{J}}$. Каждый класс S_H является левым классом смежности группы $S(\mathscr{J})$ по подгруппе $L(\mathscr{J})$, которая изоморфна группе автоморфизмов системы независимости $\mathscr{J}$ [4]. Следовательно, класс S_H можно получить, зная хотя бы одного его представителя и подгруппу $L(\mathscr{J})$. Исследования этой подгруппы проводились ранее в [4] для системы независимости и, в частности, для матроидов, и в [1] для семейства паросочетаний. Кроме того, в [5] доказано

Утверждение 1. *Преобразование φ принадлежит классу S_H тогда*

*) *Фасетой* многогранника P называется максимальная по включению собственная грань.

и только тогда, когда $\varphi = \varphi_1\varphi_2$, *где*

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 1-2x_1^H & & & \mathbf{0} \\ & 1-2x_2^H & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1-2x_n^H \end{pmatrix} x + x^H,$$

а φ_2 *является* H*-отображением.*

Таким образом, существование H-отображения эквивалентно существованию симметрии со сдвигом x^H. Следовательно, для описания класса S_H достаточно знать какое-либо H-отображение.

В настоящей работе в терминах неразделимых множеств получен критерий существования H-отображения для произвольного $H \in \mathcal{J}$. Приведен критерий существования H-отображения для одноэлементных H, который позволяет строить H-отображение и соответствующую симметрию. Рассмотрено несколько случаев применения этого критерия для некоторых специальных систем независимости.

Ниже приведены понятия и факты, необходимые для дальнейшего изложения.

Пусть $\mathcal{M}$ — семейство подмножеств из E. Множество $I \in \mathcal{M}$ называется *разделимым относительно* $\mathcal{M}$, если существует такое непустое множество $S \subset I$, что $I \setminus S \neq \varnothing$, а S и $I \setminus S$ принадлежат семейству $\mathcal{M}$. В противном случае $\mathcal{J}$ называется *неразделимым.* Понятно, что в случае системы независимости неразделимыми множествами относительно $\mathcal{J}$ являются только одноэлементные множества.

Пусть $I \in \mathcal{M}$ — множество, разделимое относительно $\mathcal{M}$. *Разделением* множества I *относительно* $\mathcal{M}$ называется семейство, состоящее по крайней мере из двух непустых попарно непересекающихся подмножеств множества I, объединение которых равно I. Очевидно, что для каждого разделимого множества I существует разделение, элементами которого являются только неразделимые множества. Такое разделение будем называть *простым разделением.*

Для любых $e \in E$ и $H \in \mathcal{J}$ определим класс $\mathcal{I}_e^H$ множеств $\{e\} \cup (H \setminus B)$, где B — максимальное по включению множество, удовлетворяющее следующим условиям: $\{e\} \cup B \in \mathcal{J}$ и $B \subseteq H$. Очевидно, что каждый класс $\mathcal{I}_e^H$ не пуст. Понятно, что если $e \in H$, то $\mathcal{I}_e^H$ состоит из единственного множества $\{e\}$, а если $e \notin H$, то множества из класса $\mathcal{I}_e^H$ имеют вид $\{e\} + D$, где D — некоторое подмножество множества H. Поэтому никакие два множества из разных классов не равны. В дальнейшем для краткости вместо $D \cup \{e\}$ при $e \notin D$ и $D \setminus \{e\}$, где $e \in D$, будем писать $D + e$ и $D - e$ соответственно.

Без ограничения общности будем считать, что размерность многогранника P равна n, ибо в противном случае существует элемент $e \in$ E, не содержащийся ни в каком независимом множестве, и, следовательно, вместо E можно рассматривать множество $E \setminus \{e\}$.

1. Критерий существования H-отображения

Итак, пусть на множестве $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ зафиксирована система независимости $\mathscr{J}$.

Лемма 1. *Пусть φ является H-отображением, а $I \in \mathscr{J}$ и $J \in \mathscr{J} \triangle H$ таковы, что $\varphi(x^I) = x^J$. Тогда I является неразделимым относительно $\mathscr{J}$ тогда и только тогда, когда J неразделимо относительно $\mathscr{J} \triangle H$.*

Доказательство. Пусть I разделимо относительно $\mathscr{J}$ и $\{T,\ I \setminus T\}$ — его разделение. Тогда

$$\varphi(x^I) = \varphi(x^T + x^{I\setminus T}) = \varphi(x^I) + \varphi(x^{I\setminus T}) = x^{J_1} + x^{J_2} = x^{J_1+J_2} = x^J,$$

где $\{J_1, J_2\}$ в силу невырожденности φ есть разделение множества J относительно $\mathscr{J} \triangle H$. Пусть J разделимо относительно $\mathscr{J} \triangle H$ и $\{T,\ J \setminus T\}$ — его разделение. Тогда

$$\varphi^{-1}(x^J) = \varphi^{-1}(x^T + x^{J\setminus T}) = \varphi^{-1}(x^J) + \varphi^{-1}(x^{J\setminus T}) = x^{I_1} + x^{I_2} = x^{I_1+I_2} = x^I,$$

где $\{I_1, I_2\}$ есть разделение множества I относительно $\mathscr{J}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Каждый класс $\mathscr{I}_e^H$ содержит только неразделимые относительно $\mathscr{J} \triangle H$ множества.*

Доказательство. Пусть $J = \{e\} \cup (H \setminus B) \in \mathscr{I}_e^H$ (B — такое максимальное по включению множество, что $B \subseteq H$ и $\{e\} \cup B \in \mathscr{J}$). Из построения множества J ясно, что оно принадлежит множеству $\mathscr{J} \triangle H$. Если $e \in H$, то $B = H$ и, следовательно, $J = \{e\}$, т. е. J неразделимо относительно $\mathscr{J} \triangle H$. Предположим, что $e \notin H$ и J разделимо относительно $\mathscr{J} \triangle H$ ($\sigma = \{T, J \setminus T\}$ — его разделение). Так как $e \in J$, то без ограничения общности можно считать, что $e \in T$. Тогда $J \setminus T \subseteq H$ и, как легко убедиться прямыми вычислениями, $\{e\} \cup B \cup (J \setminus T) = T \triangle H \in \mathscr{J}$. Так как $J \setminus T \neq \varnothing$ и $B \cap (J \setminus T) = \varnothing$, то B — собственное подмножество множества $B \cup (J \setminus T)$, что противоречит выбору B. Лемма доказана.

Так как каждый класс $\mathscr{I}_e^H$ не пуст, то из леммы 2 следует, что имеется не менее n неразделимых относительно $\mathscr{J} \triangle H$ множеств. Если число таких множеств ровно n, то каждый класс $\mathscr{I}_e^H$ состоит из единственного множества, которое обозначим через I_e^H. Таким образом, $\{I_e^H\}_{e\in E}$ — совокупность всех неразделимых множеств.

Теорема 1. (Критерий существования H-отображения.) *Пусть $\mathscr{J}$ — система независимости на E и $H \in \mathscr{J}$. Тогда для существования H-отображения необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

(a) *число неразделимых относительно $\mathscr{J} \triangle H$ множеств равно n;*

(b) *если σ — разделение множества $J \in \mathscr{J} \triangle H$ относительно $\mathscr{J} \triangle H$, то любое объединение элементов из σ принадлежит множеству $\mathscr{J} \triangle H$.*

Доказательство. Необходимость. Условие (a) следует из леммы 1 и того факта, что неразделимыми относительно $\mathscr{J}$ являются только одноэлементные множества, число которых равно n. Докажем условие (b). Пусть φ является H-отображением и $\sigma = \{J_1, J_2, \ldots, J_k\}$. Без ограничения общности рассмотрим объединение первых p элементов разделения σ. Если $p = k$, то условие доказано. Иначе

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(x^J) &= \varphi^{-1}(x^{J_1+\ldots+J_p+J_{p+1}+\ldots+J_k})\\ &= \varphi^{-1}(x^{J_1}) + \ldots + \varphi^{-1}(x^{J_p}) + \varphi^{-1}(x^{J_{p+1}}) + \ldots + \varphi^{-1}(x^{J_k})\\ &= x^{I_1} + \ldots + x^{I_p} + x^{I_{p+1}} + \ldots + x^{I_k} = x^{I_1+\ldots+I_p+I_{p+1}+\ldots+I_k} = x^I,\end{aligned}$$

где $I \in \mathscr{J}$. Так как любое объединение подмножеств независимого множества независимо, то

$$\bigcup_{i=\overline{1,p}} I_i \in \mathscr{J}$$

и

$$\varphi(x^{I_1+\ldots+I_p}) = \varphi(x^{I_1}) + \ldots + \varphi(x^{I_p}) = x^{J_1} + \ldots + x^{J_p} = x^{J_1+\ldots+J_p} = x^T,$$

где $T \in \mathscr{J} \triangle H$, что и требовалось доказать.

Достаточность будем доказывать конструктивно. Так как имеется n классов $\{\mathscr{I}_e^H\}_{e\in E}$ и все они не пусты, то при выполнении условия (a) каждый класс $\mathscr{I}_e^H$ содержит только одно множество, которое мы обозначили через I_e^H. Пусть A — квадратная матрица порядка n, в которой j-й столбец, $1 \leqslant j \leqslant n$, есть вектор инциденций множества $I_{e_j}^H$. Убедимся в том, что преобразование $\varphi(x) = Ax$ является H-отображением.

Сначала докажем, что преобразование φ является невырожденным. Действительно, из определения множеств $I_{e_j}^H$ следует, что после соответствующих перестановок строк и столбцов матрица A приобретает вид

$$\begin{array}{cc} & H \\ H & \boxed{\begin{array}{c:c} E & * \\ \hdashline 0 & E \end{array}} \end{array},$$

где E — единичная матрица.

Пусть J — любое множество из $\mathscr{J} \triangle H$. Докажем, что прообраз его вектора инциденций при преобразовании φ является вектором инциденций независимого множества.

Если J неразделимо относительно $\mathscr{J} \triangle H$, то по условию (a) оно является множеством I_e^H при некотором $e \in E$, причем из построения следует, что $\varphi^{-1}(x^J) = x^{\{e\}}$.

Пусть $\mathscr{J} \triangle H$ разделимо и σ — простое разделение множества J относительно $\mathscr{J} \triangle H$. Тогда по условию (a) множество $\mathscr{J} \triangle H$ состоит из множеств I_e^H, где $e \in E$. Положим

$$D = \bigcup_{I_e^H \in \sigma, e \notin H} I_e^H.$$

По условию (b) $D \in \mathscr{J} \triangle H$ и, следовательно, $D \triangle H \in \mathscr{J}$ и $(D \triangle H) \cap J \in \mathscr{J}$. С другой стороны, прямыми вычислениями легко убедиться, что $\varphi^{-1}(J) = x^{(D\triangle H)\cap J}$. Теорема доказана.

Из доказательства критерия немедленно вытекает важное

Следствие. *Если S_H не пусто, то существует H-отображение с матрицей, столбцами которой являются векторы $x^{I_{e_1}^H}, x^{I_{e_2}^H}, \ldots, x^{I_{e_n}^H}$.*

2. Симметрии с единичным сдвигом

Интерес к симметриям с единичным сдвигом прежде всего связан со следующим фактом.

Утверждение 2. *Если для некоторого независимого множества H существует H-отображение, то для любого его подмножества J существует J-отображение.*

Перед доказательством этого утверждения докажем три вспомогательные леммы.

Лемма 3. *Если $I \in \mathscr{J} \triangle H$ и $e \in H$, то $I \cup \{e\} \in \mathscr{J} \triangle H$.*

Справедливость леммы следует из того, что

$$(I \cup \{e\}) \triangle H = (I \setminus H) \cup (H \setminus (I \cup \{e\})) \subseteq (I \setminus H) \cup (H \setminus I) = I \triangle H \in \mathscr{J},$$

а $(I \cup \{e\}) \triangle H \in \mathscr{J}$ и $I \cup \{e\} \in \mathscr{J} \triangle H$.

Так как $I \triangle H \in \mathscr{J} \triangle H$ и $(I \cup J) \setminus (I \triangle H) = I \cap H \subseteq H$, то из леммы 3 следует, что при любом независимом множестве I имеет $I \cup H \in \mathscr{J} \triangle H$.

Лемма 4. *Если $I \in \mathscr{J}$, множество $H \in \mathscr{J}$ удовлетворяет условию (a) и σ — простое разделение множества $I \cup H$ относительно $\mathscr{J} \triangle H$, то для любого элемента $e \in I$ множество I_e^H принадлежит σ.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдется отличный от e элемент s такой, что $I_s^H \in \sigma$ и $e \in I_s^H$. По определению $I_s^H = \{s\} \cup (H \setminus B)$, где B — максимальное по включению множество такое, что $\{s\} \cup B \in \mathscr{J}$ и $B \subseteq H$. Понятно, что $e \in H$, но $e \notin B$. Построим множество B_1 такое, чтобы оно удовлетворяло тем же условиям, что и B, причем $e \in B_1$. Такое множество существует, так как либо $\{s, e\} \subseteq I \in \mathscr{J}$, либо $\{s, e\} \subseteq H \in \mathscr{J}$. Следовательно, класс $\mathscr{J}_s^H$ содержит по крайней мере два различных множества $\{s\} \cup (H \setminus B)$ и $\{s\} \cup (H \setminus B_1)$, что противоречит условию (а). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть независимые множества H и J удовлетворяют условию (а) и $J \subseteq H$. Тогда $I_e^J = I_e^H \setminus (H \setminus J)$ для любого элемента $e \notin H$.*

Доказательство. По определению $I_e^H = \{e\} \cup (H \setminus B)$, где B — максимальное по включению множество такое, что $\{e\} \cup B \in \mathscr{J}$ и $B \subseteq H$. Ясно, что $B \cap J$ — максимальное по включению множество такое, что $\{e\} \cup B \in \mathscr{J}$ и $B \subseteq J$. Отсюда и из условия $e \notin H$ следует, что

$$I_e^J = \{e\} \cup (J \setminus (B \cap J)) = \{e\} \cup ((H \setminus B) \setminus (H \setminus J)) = (\{e\} \cup (H \setminus B)) \setminus (H \setminus J).$$

Поэтому $I_e^J = I_e^H \setminus (H \setminus J)$. Лемма доказана.

Доказательство утверждения 2. Пусть $I \in \mathscr{J}$ таково, что множество $I \triangle J$ неразделимо относительно $\mathscr{J} \triangle J$. Убедимся в том, что $I \triangle H$ неразделимо относительно $\mathscr{J} \triangle H$. Предположим, что это не так и $\{I_1 \triangle H, I_2 \triangle H\}$ — разделение множества $I \triangle H$ относительно $\mathscr{J} \triangle H$. Тогда $I_1, I_2 \in \mathscr{J}$ и $J_1 = I_1 \setminus (H \setminus J), J_2 = I_2 \setminus (H \setminus (I \cup J)) \in \mathscr{J}$. Прямыми вычислениями легко убедиться, что $\{J_1 \triangle J, J_2 \triangle J\}$ — разделение множества $I \triangle J$ относительно $\mathscr{J} \triangle J$, что противоречит предположению. Следовательно, каждому неразделимому относительно $\mathscr{J} \triangle J$ множеству можно инъективно поставить в соответствие множество, неразделимое относительно $\mathscr{J} \triangle H$. Значит, число множеств, неразделимых относительно $\mathscr{J} \triangle J$, не превосходит числа множеств, неразделимых относительно $\mathscr{J} \triangle H$, число которых по условию (а) ровно n. Так как число неразделимых относительно $\mathscr{J} \triangle J$ множеств не меньше n, то для множества J выполняется условие (а). Следовательно, $\{I_e^J\}_{e \in E}$ — совокупность всех неразделимых относительно $\mathscr{J} \triangle J$ множеств.

Докажем, что для множества J выполняется условие (b). Пусть I — произвольное независимое множество. Рассмотрим разделение σ_1 множества $I \triangle J$ относительно $\mathscr{J} \triangle J$. Без ограничения общности можно полагать, что это разделение простое, т. е. $\sigma_1 = \{I_{s_1}^J, I_{s_2}^J, \ldots, I_{s_k}^J\}$.

Рассмотрим объединение D^J первых p элементов разбиения σ. Положим

$$D_1^J = \bigcup_{i\leqslant p, s_i\notin H} I_{s_i}^J, \quad D_2^J = \bigcup_{i\leqslant p, s_i\in H\setminus J} I_{s_i}^J, \quad D_3^J = \bigcup_{i\leqslant p, s_i\in J} I_{s_i}^J.$$

Очевидно, что $D^J = D_1 + D_2 + D_3$. Из построения множеств $I_{s_i}^J$ при $s_i \in H$ следует, что

$$D_2^J = \bigcup_{i\leqslant p, s_i\in H\setminus J} \{s_i\} \quad \text{и} \quad D_3^J = \bigcup_{i\leqslant p, s_i\in J} \{s_i\}.$$

Рассмотрим простое разбиение σ_2 множества $I \cup H$ относительно $\mathscr{J} \triangle H$. Если $s_i \notin H$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, то $s_i \in I$ и по лемме 4 имеем $I_{s_i}^H \in \sigma_2$. Пусть

$$D_1^H = \bigcup_{i\leqslant p, s_i\notin H} I_{s_i}^H \quad \text{и} \quad D_2^H = \bigcup_{i\leqslant p, s_i\in H\setminus J} I_{s_i}^H.$$

Очевидно, что

$$D_2^H = \bigcup_{i\leqslant p, s_i\in H\setminus J} \{s_i\} = D_2^J.$$

В силу условия (b) имеем $D_1^H \in \mathscr{J} \triangle H$. В то же время по лемме 3 $D^H = D_1^H \cup ((H \setminus J) \setminus D_2^H) \in \mathscr{J} \triangle H$. Значит, $D^H \triangle H \in \mathscr{J}$ и $D = (D^H \triangle H) \triangle J \in \mathscr{J} \triangle J$. По определению разбиения множество $D_1^H \cap D_2^H$ пусто. Следовательно, $D^H \cap D_2^H = \varnothing$. При $s_i \notin H$ по лемме 5 имеем $I_{s_i}^J = I_{s_i}^H \setminus (H \setminus J)$. Поэтому $D^H = D_1^J \cup ((H \setminus J) \setminus D_2^H)$. Используя этот факт, а также то, что $D_1^J \cap (H \setminus J) = \varnothing$, $D_1^J \cap D_2^J = \varnothing$ и $D_2^H = D_2^J$, прямыми вычислениями легко убедиться в том, что $D = D_1^J \cup D_2^J$. Так как $D_3^J \subset J$ и $D \in \mathscr{J} \triangle J$, то по лемме 3 имеем $D \cup D_3^J \in \mathscr{J} \triangle J$, т. е. $D \cup D_3^J = D_1^J \cup D_2^J \cup D_3^J = D^J \in \mathscr{J} \triangle J$. Утверждение доказано.

Следствие. *Если не существует симметрии со сдвигом $x^{\{e\}}$, то не существует симметрий со сдвигом x^H для любого H такого, что $l \in e$.*

Последний факт обусловливает интерес к критерию существования симметрии с единичным сдвигом.

Для каждого элемента $h \in E$ определим множества $E_h^+ = \{e \in E - h \mid \{e,h\} \in \mathscr{J}\}$ и $E_h^- = \{e \in E - h \mid \{e,h\} \notin \mathscr{J}\}$.

Теорема 2. (Критерий существования $\{h\}$-отображения). *Пусть $\mathscr{J}$ — система независимости на E и $h \in E$. Тогда $\{h\}$-отображение существует тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(a′) *для любых различных элементов $e_1, e_2 \in E_h^-$ множество $\{e_1, e_2\}$ не принадлежит $\mathscr{J}$;*

(b′) *для любого независимого множества $I \subseteq E_h^+$ множество $I + h$ независимо.*

Доказательство. Убедимся в том, что условия (a$'$) и (a) для множества $\{h\}$ эквивалентны. Если не выполняется условие (a$'$), то существуют различные элементы $e_1, e_2 \in E_h^-$ такие, что $\{e_1, e_2\} \in \mathscr{J}$. Это значит, что $\{e_1, e_2, h\} \in \mathscr{J} \triangle \{h\}$, причем множество $\{e_1, e_2, h\}$ неразделимо относительно $\mathscr{J} \triangle \{h\}$, так как $\{e_1, h\} \notin \mathscr{J}$ и $\{e_2, h\} \notin \mathscr{J}$, т. е. $\{e_1\} \notin \mathscr{J} \triangle \{h\}$ и $\{e_2\} \notin \mathscr{J} \triangle \{h\}$. Но множество $\{e_1, e_2, h\}$ не принадлежит ни одному классу $\mathscr{I}_e^{\{h\}}$, где $e \in E$. Следовательно, число неразделимых относительно $\mathscr{J} \triangle \{h\}$ множеств больше n и условие (a) не выполняется.

Теперь предположим, что не выполняется условие (a). Очевидно, что в этом случае каждый класс $\mathscr{I}_e^{\{h\}}$ $(e \in E)$ состоит из одного множества, причем если $\{e\} \in \mathscr{I}_e^{\{h\}}$, то $\{e, h\}$ разделимо относительно $\mathscr{J} \triangle \{h\}$. Следовательно, существует неразделимое относительно $\mathscr{J} \triangle \{h\}$ множество I, содержащее два элемента e_1 и e_2, отличных от элемента h. Обозначим $D = (I - e_1) - e_2$. Так как $I \in \mathscr{J} \triangle \{h\}$, то $I \triangle \{h\} = e_1 + e_2 + (D \triangle \{h\}) \in \mathscr{J}$. Следовательно, $\{e_1, e_2\}, e_1 + (D \triangle \{h\}), e_2 + (D \triangle \{h\}) \in \mathscr{J}$ и $e_1 + D, e_2 + D \in \mathscr{J} \triangle \{h\}$. Предположим, что $e_1 \in E_h^+$. Тогда $\{\{e_1\}, e_2 + D\}$ — разделение множества I относительно $\mathscr{J} \triangle \{h\}$, что противоречит выбору I. Аналогично доказывается, что $e_2 \notin E_h^+$. Следовательно, $e_1, e_2 \in E_h^-$ и условие (a$'$) не выполняется.

Докажем, что при выполнении условия (a$'$) условия (b$'$) и (b) для множества $\{h\}$ эквивалентны. Предположим, что условие (b) выполняется. Пусть $I = \{s_1, s_2, \dots, s_p\}$ — независимое подмножество множества E_h^+. Так как $I \in \mathscr{J}$, то $I \cup \{h\} \in \mathscr{J} \triangle \{h\}$, а так как все элементы множества I принадлежат E_h^+, то $\{\{s_1\}, \{s_2\}, \dots, \{s_p\}, \{h\}\}$ — разделение множества I относительно $\mathscr{J} \triangle \{h\}$. Следовательно, по условию (b) имеем

$$\bigcup_{i=1}^{p} \{s_i\} = I \in \mathscr{J} \triangle \{h\},$$

т. е. $I + h \in \mathscr{J}$.

Пусть выполняется условие (b$'$) и $I \in \mathscr{J} \triangle \{h\}$. Без ограничения общности можно рассмотреть простое разделение σ относительно $\mathscr{J} \triangle \{h\}$. Так как условие (a) выполняется, то в нем будут содержаться только множества вида $I_e^{\{h\}} (e \in E)$, т. е. $\sigma = \{I_{s_1}^{\{h\}}, I_{s_2}^{\{h\}}, \dots, I_{s_k}^{\{h\}}\}$. Рассмотрим объединение U первых p элементов σ. Если $h \in U$, то $U - h \subseteq I \triangle \{h\} \in \mathscr{J}$. Следовательно, $U - h \in \mathscr{J}$ и $(U - h) \triangle \{h\} = U \in \mathscr{J} \triangle \{h\}$, т. е. условие (b) выполняется. Предположим, что $h \notin U$. Тогда при любом i, $1 \leqslant i \leqslant p$, имеем $I_{s_i}^{\{h\}} = \{s_i\}$ и, следовательно, $s_i \in E_h^+$. Значит, $U \subseteq E_h^+$, а так как $U \subseteq I \triangle \{h\} \in \mathscr{J}$, по условию (b$'$) $U + h \in \mathscr{J}$. Это значит, что $(U + h) \triangle \{h\} = U \in \mathscr{J} \triangle \{h\}$, т. е. условие (b) выполняется и в этом случае. Теорема доказана.

Для каждого $h \in E$ определим отображение $\varphi_h(x) = A_h x + x^{\{h\}}$, где элементы квадратной матрицы $A_h = (a_{ij})$ порядка n определяется следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если } e_i = h \text{ и } e_j \in E_h^- + h; \\ 1, & \text{если } e_i \neq h \text{ и } i = j; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Переформулируя следствие из теоремы 1 для одноэлементных множеств и применяя утверждение 1, получаем

Утверждение 3. *Если класс $S_{\{h\}}$ не пуст, то $\varphi_h \in S_{\{h\}}$.*

После соответствующих перестановок строк и столбцов матрицу A_h можно представить в следующем виде:

$$\begin{array}{c|c:c:c|} & h & E_h^+ & E_h^- \\ \hline h & -1 & 0 \ldots 0 & -1 \ldots -1 \\ \hdashline E_h^+ & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & E & \mathbf{0} \\ \hdashline E_h^- & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \mathbf{0} & E \\ \hline \end{array},$$

где E — единичная, а $\mathbf{0}$ — нулевая матрицы.

Теперь обобщим утверждение 2.

Теорема 3. *Симметрия со сдвигом x^H существует тогда и только тогда, когда для каждого $h \in H$ существует симметрия со сдвигом $x^{\{h\}}$.*

Доказательство. Необходимость непосредственно вытекает из утверждения 2. Достаточность будем доказывать индукцией по числу элементов в H. Если $|H| = 1$, то утверждение очевидно. Предположим, что для множеств H при $|H| = k \geqslant 1$ утверждение доказано. Пусть $|H| = k + 1$. Выделим произвольный элемент $h \in H$. По предположению индукции существует симметрия φ со сдвигом x^{H-h}. По условию теоремы существует симметрия со сдвигом $x^{\{h\}}$. Следовательно, по утверждению 3 отображение φ_h является симметрией. Так как суперпозиция симметрий является симметрией, то отображение $\varphi_h \cdot \varphi$ — симметрия, причем ее сдвиг x равен $A_h x^{H-h} + x^h$. Из построения множества E_h^+ следует, что $H - h \in E_h^+$. Поэтому $A_h x^{H-h} = x^{H-h}$, т. е. $x = x^H$.

Теперь рассмотрим несколько примеров систем независимости и переформулируем критерий существования симметрии с единичным сдвигом для этих примеров.

Пример 1. Пусть E — множество ребер неориентированного графа G и $\mathscr{I}$ — семейство паросочетаний. Выделим некоторое ребро $h \in E$. По определению множество E_h^- состоит из смежных с h ребер, а E_h^+ — из ребер, не смежных с h. Очевидно, что для h условие (b$'$) выполняется. Следовательно, существование симметрии со сдвигом $x^{\{h\}}$ эквивалентно условию (a$'$). Применительно к паросочетаниям это условие приобретает следующий вид.

Утверждение 4. *Пусть E — множество ребер неориентированного графа G, $\mathscr{I}$ — семейство паросочетаний графа G и $h \in E$. Тогда симметрия со сдвигом $x^{\{h\}}$ существует тогда и только тогда, когда смежные с h ребра являются смежными.*

Пример 2. Пусть $\mathscr{I}$ — матроид*) на множестве E и $h \in E$. Очевидно, что для h условие (a$'$) выполняется, так как иначе существовали бы два таких элемента $e_1, e_2 \in E_h^-$, что $\{e_1, e_2\} \in \mathscr{I}$. Отсюда и из определения матроида следует, что либо $\{h, e_1\} \in \mathscr{I}$, либо $\{h, e_2\} \in \mathscr{I}$, что противоречит определению E_h^-. Следовательно, существование симметрии со сдвигом $x^{\{h\}}$ эквивалентно условию (b$'$). Применительно к матроидам это условие приобретает следующий вид.

Утверждение 5. *Пусть $\mathscr{I}$ — матроид на множестве E и $h \in E$. Тогда симметрия со сдвигом $x^{\{h\}}$ существует тогда и только тогда, когда не существует базис, содержащийся в E_h^+.*

Пример 3. Пусть E — множество ребер связного графа G без кратных ребер. Определим систему независимости $\mathscr{I}$, взяв в качестве базисов остовные деревья этого графа. Выделим некоторое ребро $h \in E$. По определению имеем $E_h^- = \varnothing$ и $E_h^+ = E - h$. Следовательно, для выполнения условия (b$'$) необходимо, чтобы ребро h принадлежало любому остовному дереву. Очевидно, что этого и достаточно.

Утверждение 6. *Пусть E — множество ребер связного графа G без кратных ребер, $\mathscr{I}$ — система независимости, когда базисами являются остовные деревья графа G и $h \in E$. Тогда симметрия со сдвигом $x^{\{h\}}$ существует тогда и только тогда, когда ребро h является мостом.*

---

*) *Матроидом* называется система независимости, удовлетворяющая дополнительной аксиоме: для любых независимых множеств I, J таких, что $|I| > |J|$, существует такой элемент $e \in I \setminus J$, что $J + e \in \mathscr{I}$ [7].

3. Алгоритм понижения размерности оптимизационной задачи на системе независимости

На множестве $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ зафиксируем систему независимости $\mathscr{J}$. Для каждого $e \in E$ зададим вес $v_e > 0$. Пусть для некоторого $h \in E$ выполняются условия (a′) и (b′), т. е. существует симметрия со сдвигом $x^{\{h\}}$. Используя это, можно понизить размерность задачи (1) по крайней мере на единицу.

Алгоритм понижения размерности задачи (1)

Шаг 1. Выбирается $h \in E$, для которого выполняются условия (a′) и (b′), т. е. существует симметрия со сдвигом $x^{\{h\}}$.

Шаг 2. Для каждого $e \in E$ определяется новый вес

$$v_e^* = \begin{cases} -v_e, & \text{если } e = h; \\ v_e, & \text{если } e \in E_h^+; \\ v_e - v_h, & \text{если } e \in E_h^-. \end{cases}$$

Шаг 3. Находится максимальное значение функции

$$v^*(I) =: \sum_{e \in I} v_e^* \quad \text{при} \quad I \in \mathscr{J}^* =: \{J \setminus D \mid J \in \mathscr{J}\}, \tag{4}$$

где $D = \{e \in E \mid v_e^* \leqslant 0\}$. Пусть I^* — решение этой задачи.

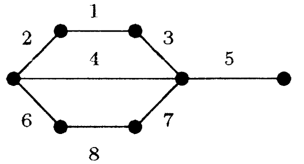
Шаг 4. Если $I^* + h \in \mathscr{J}$, то решением исходной задачи (1) является $I^* + h$; в противном случае ее решением является I^*.

Конец.

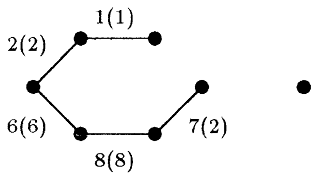
Очевидно, что $v^{*T} = v^T A_h$, где v^* и v — векторы, компонентами которых соответственно являются новые и старые веса элементов. Так как в решении задачи (3) компоненты, соответствующие отрицательным весам (в частности, компонента, соответствующая элементу h), будут нулевыми, то решение задачи (3) при $w = v, P = P(\mathscr{J})$ и $\varphi = \varphi_h$ будет являться вектором инциденции решения задачи (4). Следовательно, вектор $x^* = A_h x^{I^*} + x^{\{h\}}$ — решение задачи (2). Если $I^* + h \in \mathscr{J}$, то $I^* \subseteq E_h^+$ и $x^* = A_h x^{I^*} + x^{\{h\}} = x^{I^*} + x^{\{h\}} = x^{I^* + h}$, т. е. $I^* + h$ — решение задачи (1). Если же $I^* + h \notin \mathscr{J}$, то в силу условия (a′) существует элемент $e \in I^*$, содержащийся в E_h^-, а в силу условия (b′) имеется только один такой элемент. Следовательно, $x^* = A_h x^{I^*} + x^{\{h\}} = x^{I^*} - x^{\{h\}} + x^{\{h\}} = x^{I^*}$, т. е. I^* — решение задачи (1). Значит, алгоритм позволяет находить решение задачи (1). Так как в задаче (4) элементы множества D, содержащие по крайней мере элемент h, не присутствуют ни в одном независимом множестве из $\mathscr{J}^*$, то размерность задачи (4) меньше размерности задачи (1) на $|D|$, т. е. по крайней мере на единицу.

Продемонстрируем алгоритм на следующем примере.

Пример 4. Пусть $\mathscr{J}$ — семейство паросочетаний следующего графа:



Вектор весов v равен $(1,2,3,4,5,6,7,8)$. По утверждению 4 существует симметрия со сдвигом $x^{\{5\}}$. Множества $E_h^+ = \{1,2,6,8\}$ и $E_h^- = \{3,4,7\}$. Следовательно, вектором v^* новых весов является вектор $(1,2,-2,-1,-5,6,2,8)$. Удаляя из рассмотрения ребра, новые веса которых отрицательны, получаем следующий граф (в скобках дан новый вес ребра):



Решая задачу максимизации паросочетания на этом графе с новыми весами, получаем оптимум $I^* = \{2,8\}$. Так как $I^* + 5$ является паросочетанием, то $\{2,5,8\}$ — оптимум исходной задачи (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.** Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.
2. **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
3. **Симанчёв Р. Ю.** Линейные симметрии многогранника паросочетаний и автоморфизмы графа // Вестн. Омского ун-та. 1996. № 1. С. 18–20.
4. **Червяков О. В.** Линейные симметрии и автоморфизмы матроида // Фундаментальная и прикладная математика. Омск: ОмГУ, 1994. С. 81–89.
5. **Червяков О. В.** Симметрии многогранника системы независимости // Вестн. Омского ун-та. 1997. № 3. С. 18–20.

6. **Bolotashvili G., Girlich E., Kovalev M.** New facets of the linear ordering polytope. Preprint Otto-von-Guericke-University Magdeburg, 1995, N 15.

7. **Conforti M., Laurent M.** On the facial structure of independence system polyhedra // Math. Oper. Res. 1988. V. 13, № 4. P. 543–555.

Адрес автора:

Омский государственный
университет,
кафедра мат. моделирования,
пр. Мира, 55-А,
644077 Омск, Россия.
E-mail: cherv@univer.omsk.su

Статья поступила
28 октября 1998 г.