ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1999. Серия 1. Том 6, № 3, 10–41

УДК 519.714.23

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ, ПОВЫШАЮЩИХ НАДЕЖНОСТЬ ЧАСТЕЙ СХЕМ В АВТОМАТНЫХ БАЗИСАХ*)

В. Н. Носков

Рассматривается представление конечного автомата схемой в базисе, состоящем из сильно связных конечных автоматов Мили. Предлагается метод преобразования произвольной части любой такой схемы в подсхему, в которой при появлении неисправностей из заданного класса возможно восстановление ее правильной работы с помощью фиксирования подходящих значений на некоторых входных полюсах. Эти значения определяются по результатам тестирования схемы. Статья базируется на разработанной ранее автором методике преобразований схем, позволяющей строить схемы, допускающие их тестирование с хорошей локализацией возникающих неисправностей из широкого класса.

Введение

Поиск методов синтеза схем, удобных для диагностики неисправностей и реализующих логические или автоматные функции, представляется важным и перспективным направлением в теории контроля и надежности дискретных устройств. С. Редди [13], В. И. Шевченко [11], А. П. Горяшко [2], Н. П. Редькин [9] разработали несколько методов построения удобных для тестирования схем из функциональных элементов. Авторы этих методов рассматривают неисправности, связанные с неправильной работой базисных элементов в схемах (чаще всего это константные неисправности на входах и выходах элементов схемы). При этом обычно накладываются ограничения на выбор элементного базиса. Нами в [3–8] также предложены новые методы синтеза схем из функциональных элементов, реализующих булевы функции и удобные для контроля неисправностей, когда допускаются неисправности более разнообразные, а элементный базис является полным и произвольным.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00593) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (код проекта 97–473).

Главным достоинством этих методов является то, что они обеспечивают построение схем, в которых с помощью тестовых процедур можно добиться детальной локализации неисправностей, т. е. достаточно точно указать в схеме те области, в которых имеются неисправные элементы.

В [5] мы предложили метод преобразования любой части произвольной схемы из функциональных элементов в подсхему, для которой возможен тестовый контроль с хорошей локализацией возникающих в ней неисправностей. В [6, 7] предложена модификация этого метода для восстановления правильного функционирования неисправной схемы. Описано преобразование произвольной схемы S из функциональных элементов в схему S'. При этом преобразовании произвольно заданная часть B схемы k-кратным дублированием ее элементов и добавлением некоторой управляющей части превращается в схему C, а оставшаяся часть схемы S не изменяется (k — произвольное натуральное число). Схема S' имеет больше входов и выходов, чем схема S (рис. 1; здесь и ниже полагаем $\widetilde{x}_r = (x_1, \ldots, x_r)$). Исправная схема S' при подаче констант 0 на дополнительные входы $x_{n+1}, \ldots, x_{n+w}$ на выходах $a_1, \ldots, a_q$ реализует те же функции от своих основных входов, что и схема S. Выходы $b_1, \ldots, b_p$ схемы S' используются при тестировании схемы. При появлении в схеме S' неисправностей из заданного класса возможно восстановление правильной работы ее части C с помощью фиксирования подходящих значений на некоторых входных полюсах. Эти значения определяются по итогам предложенного тестирования схемы S'.

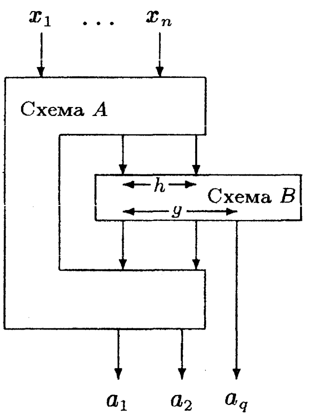


Схема $S = S(A, B, \tilde{x}_n)$

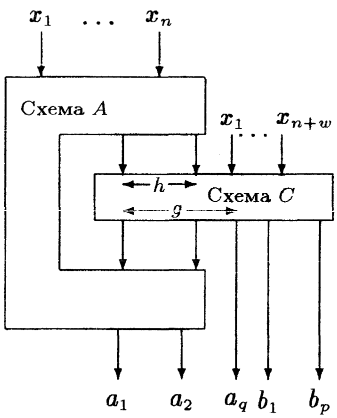


Схема $S' = S(A, C, \tilde{x}_{n+w})$

Рис. 1

В настоящей статье мы обобщаем предложенные в [6, 7] методы преобразования логических схем на случай, когда схема состоит из базисных элементов, реализующих не только логические, но и автоматные функции. Основной результат этой работы сформулирован в § 1 в виде теоремы. В ней указаны оценки сложности преобразованной схемы и длины теста.

§ 1. Формулировка основного результата

Перейдем к более точной постановке задачи. В статье используется терминология теории автоматов, принятая в [1, 10].

Базис схем. Рассмотрим семейство $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1,\dots,g}$ таких неинициальных конечных сильно связных автоматов Мили, что входным алфавитом автомата φ_i является множество $r(i)$-разрядных булевых векторов, а на выходе реализуется булева переменная. (Автомат называется сильно связным, если для любой упорядоченной пары (σ', σ'') его внутренних состояний существует входное слово, которое переводит автомат из состояния σ' в состояние σ''.) Пусть $\xi(i)$ — число внутренних состояний автомата φ_i, $\xi = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant g} \xi(i)$. Семейство Φ состоит из g автоматов, каждый из которых имеет не более ξ внутренних состояний. Будем считать, что в Φ содержатся и тривиальные автоматы, т. е. автоматы с одним внутренним состоянием, причем набор тривиальных автоматов является полным базисом в классе всех булевых функций.

Пусть изображенная на рис. 1 схема S есть схема в базисе Φ, а B — произвольно выделенная ее часть (подсхема). Схему, образованную элементами из S, которые не входят в B, обозначим через A. Полагаем, что если в схеме S имеется d нетривиальных базисных элементов, занумерованных числами $1,\dots,d$, то в каждый момент времени ее внутреннее состояние можно задать d-разрядным вектором, i-й разряд которого есть внутреннее состояние i-го элемента схемы, $1 \leqslant i \leqslant d$. Таким образом, внутреннее состояние всей схемы S есть макросостояние, образованное внутренними состояниями ее базисных элементов. На рис. 1 справа изображена схема S', в которую преобразуется схема S, когда в ней подсхема B заменена на C. Схемы S и S' с выделенными в них частями A, B и C будем обозначать через $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ и $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$.

Допустимые неисправности в $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$. Обозначим через β произвольный базисный элемент схемы S.

а) Пусть β — тривиальный автомат с t входами, а $v_1,\dots,v_t$ — входные полюсы элемента β, на которые в схеме могут поступать 0 и 1. Полюсы $v_1,\dots,v_t$ будем отождествлять с одноименными булевыми переменными. В схеме $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ на выходе элемента β реализуется булева функция $\beta(v_1,\dots,v_t)$, а при появлении в $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$

неисправностей элемент β может превратиться в элемент β^*, реализующий произвольную булеву функцию β^* от переменных $v_1, \ldots, v_t$.

b) Пусть β — нетривиальный автомат с числом внутренних состояний $\xi(\beta)$. Тогда полагаем, что в неисправной схеме автомат β может превратиться в произвольный автомат Мили β^* с тем же входным алфавитом, что и у автомата β, и не более чем с $\xi(\beta)$ внутренними состояниями.

Таким образом, предполагаем, что появление неисправностей в автомате не увеличивает числа его внутренних состояний. Это касается тривиальных и нетривиальных автоматов.

Аналогично определяются допустимые неисправности в схеме $S(A, B, \widetilde{x}_n)$.

Число неисправных элементов в C. Полагаем, что число неисправных элементов в схеме C не превышает произвольно зафиксированного натурального числа m.

Введем следующие обозначения:

- A^* и C^* — схемы, в которые преобразуются схемы A и C при появлении в них допустимых неисправностей; $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ — схема, в которую переходит схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$, когда ее подсхемы A и C преобразуются в схемы A^* и C^*.
- $L(F)$ — сложность схемы F, т. е. число ее элементов.
- k — число копий в C для каждого элемента из B.
- q и $q + p$ — число выходов в схемах $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ и $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ соответственно.
- $r = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant g} r(i)$, где $r(i)$ — число входов базисного элемента φ_i.
- Пусть $\widetilde{e}_w = (e_1, \ldots, e_w)$ — булевый вектор, а $\vec{\mathscr{P}}$ — последовательность булевых n-разрядных векторов. Обозначим через $\vec{\mathscr{P}} \odot \widetilde{e}_w$ последовательность, полученную из $\vec{\mathscr{P}}$ заменой каждого n-разрядного вектора на $(n + w)$-разрядный: значения первых n разрядов в каждом новом векторе те же, что и в заменяемом, а последние w разрядов равны $e_1, \ldots, e_w$. Вектор $\widetilde{e}_w$, имеющий только нулевые компоненты, обозначим через $\widetilde{0}_w$.
- $S_a(A, B, \sigma(A), \sigma(B), \vec{\mathscr{P}})$ — последовательность, реализуемая на выходах $a_1, \ldots, a_q$ схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ при условии, что на ее входы подается последовательность $\vec{\mathscr{P}}$ и в начальный момент подсхемы A и B находились в состояниях $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ соответственно. Аналогично определяются последовательности $S_a(A, C, \sigma(A), \sigma(C), \vec{\mathscr{P}} \odot \widetilde{e}_w)$ и $S_a(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{\mathscr{P}} \odot \widetilde{e}_w)$.

◇ $S_b(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{\mathscr{Q}})$ — последовательность векторов, появляющихся в схеме $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ на выходах $b_1, \ldots, b_p$ при условии, что на ее входы подается последовательность $(n+w)$-разрядных булевых векторов $\vec{\mathscr{Q}}$ и в начальный момент подсхемы A^* и C^* находились в состояниях $\sigma(A^*)$ и $\sigma(C^*)$ соответственно.

◇ Пусть a — действительное число. Выражение $\lceil a \rceil$ обозначает наименьшее целое число b такое, что $a \leqslant b$.

В схеме C множество всех элементов разбивается на два класса: класс главных и класс вспомогательных элементов. *Главными элементами* являются копии элементов из B и элементы, тесно примыкающие в схеме к ним. Остальные элементы схемы C считаются *вспомогательными элементами*. Вспомогательные элементы строятся из базисных элементов, являющихся тривиальными автоматами. (Точные определения главных и вспомогательных элементов приведены в § 5).

Теорема. *Пусть $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ — схема в базисе Φ и пусть ее входными векторами служат произвольные n-разрядные булевы векторы, причем $r < n$. Положим $w = m(\lceil \log_2 k \rceil + \lceil \log_2 L(B) \rceil) + 3$. Тогда существуют такая последовательность $\vec{\mathscr{Q}}$ длины $\lceil 6 \cdot 4^{r\xi+1} \xi^2 \ln(2\xi) \rceil$, состоящая из $(n+w)$-разрядных булевых векторов, и такая схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ в базисе Φ, что*

(a) *$p \leqslant L(C) < c(k + m \log_2 k) L(B)$, где c — константа, зависящая лишь от базиса;*

(b) *для любых состояний $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ подсхем A и B схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ найдется такое состояние $\sigma(C)$ схемы C, что для любой последовательности $\vec{\mathscr{P}}$, состоящей из n-разрядных булевых векторов, справедливо равенство*

$$S_a(A, B, \sigma(A), \sigma(B), \vec{\mathscr{P}}) = S_a(A, C, \sigma(A), \sigma(C), \vec{\mathscr{P}} \odot \vec{\widetilde{0}}_w);$$

(c) *при любых A^*, C^*, $\sigma(A^*)$, $\sigma(C^*)$ по последовательности $S_b(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{\mathscr{Q}})$ множество неисправностей схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ можно разбить на два класса так, что*

(c.1) *если в $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ возникли неисправности из первого класса, то для произвольных состояний $\sigma(A^*)$ и $\sigma(B)$ подсхем A^* и B схемы $S(A^*, B, \widetilde{x}_n)$ найдутся состояние $\sigma(C^*)$ схемы C^* и булевый вектор $\widetilde{e}_w$ такие, что для любой последовательности $\vec{\mathscr{P}}$ n-разрядных булевых векторов верно равенство*

$$S_a(A^*, B, \sigma(A^*), \sigma(B), \vec{\mathscr{P}}) = S_a(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{\mathscr{P}} \odot \widetilde{e}_w);$$

(c.2) *если в* $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ *возникли неисправности из второго класса, то выполняется по крайней мере одно из условий:*

(i) *в* C^* *есть неисправные вспомогательные элементы;*

(ii) *в* C^* *неисправны все* k *дублей некоторого элемента из* B.

Неравенства из (a) ограничивают сложность схемы C и число дополнительных выходов, появившихся при преобразовании схемы B в схему C. Предложение (b) утверждает, что при $x_{n+1} \equiv x_{n+2} \equiv \ldots \equiv x_{n+w} \equiv 0$ схема C моделирует схему B, т. е. $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ превращается в схему, функционально эквивалентную схеме $S(A, B, \widetilde{x}_n)$. Согласно утверждению (c. 1) схема C^* при возникновении в $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ неисправностей из первого класса может моделировать работу исправной схемы B из $S(A^*, B, \widetilde{x}_n)$. Для этого достаточно установить C^* в подходящее состояние и зафиксировать подходящие значения на дополнительных входах $x_{n+1}, \ldots, x_{n+w}$ схемы C^*.

Доказательство теоремы конструктивно:

— указывается последовательность преобразований, которые превращают схему $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ в схему $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$, обладающую свойствами (a), (b) и (c) из утверждения теоремы;

— приведена процедура, позволяющая с использованием лишь последовательности $S_b(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{\mathscr{Q}})$ выяснить, к какому из двух классов принадлежат возникшие в схеме неисправности. В случае, если там возникли неисправности из первого класса, то, используя ту же последовательность $S_b(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{\mathscr{Q}})$, удается указать вектор $\widetilde{e}_w$, с помощью которого можно добиться, чтобы неисправная схема C^* правильно моделировала работу исправной схемы C.

В основе преобразований схемы B в схему C лежит установка в B на линиях между внутренними полюсами специальных подсхем K и Q, которые играют роль коммутаторов, работающих в двух режимах. При работе в первом режиме коммутаторы проводят без изменения сигналы от некоторых своих входов к выходам. Этот режим работы коммутаторов используется при функционировании схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$, когда на ее основных выходах реализуется та система функций, которую должна реализовать схема $S(A, B, \widetilde{x}_n)$. Работая во втором режиме, коммутаторы позволяют передать значения с входных полюсов схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ на входы некоторых ее элементов. Этот режим работы коммутаторов используется при диагностике неисправностей схемы. Он позволяет добиться на выходах всех элементов схемы C слабой зависимости значений друг от друга, что обеспечивает должный уровень локализации неисправностей в контролируемой схеме. Переключение режимов работы коммутаторов осуществляется подачей подходящих значений дополнительных переменных на их входы. Кроме того, в схему включаются еще и схемы Ω и Δ, управляющие отключением неисправных элементов схемы и включением в активную работу их исправных копий. Схемы K, Q, Ω и Δ строятся из тривиальных элементов базиса. Это схемы из функциональных элементов, каждая из которых работает как автомат с одним внутренним состоянием.

Из утверждений теоремы следует, что восстановление правильной работы подсхемы C^* путем фиксирования подходящих значений на дополнительных входах не гарантируется лишь в случаях, когда в C^* неисправны некоторые вспомогательные элементы (они являются тривиальными автоматами) либо одновременно неисправны все k дублей некоторого элемента из B.

Отметим, что если $k > m$, то для всякого элемента из B в C^* найдется исправный дубль, так как предполагается, что в C^* имеется не более m неисправных элементов. В этом случае утверждение (c.2) теоремы можно сформулировать так:

(c.2) *если в $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ возникли неисправности из второго класса, то в C^* есть неисправные вспомогательные элементы.*

Из доказательства теоремы можно видеть, что схема $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ такова, что в ее подсхеме C^* обеспечена возможность детальной диагностики неисправностей с помощью тестового контроля: можно указать либо сами неисправные элементы, либо небольшие участки схемы, которые содержат неисправные элементы. Предлагаемое преобразование схемы можно рассматривать как прием, позволяющий увеличить общее время правильной работы выделенной части схемы за счет поиска и активизации исправных элементов в избыточной схеме.

Ниже через $c_1, c_2, \ldots$ обозначаются константы, зависящие только от базиса.

§ 2. Схемы Ω и Δ

2.1. Схема Ω. Эта схема строится из тривиальных элементов базиса. Она имеет $k + \lceil \log_2 k \rceil$ входов и один выход. Здесь и далее полагаем $\mu(\sigma_1, \ldots, \sigma_j) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{j} \sigma_i 2^{j-i}$. Пусть на входы с номерами $1, \ldots, k$ схемы Ω подаются значения переменных $z_1, \ldots, z_k$, а на входы с номерами $k+1, \ldots, k + \lceil \log_2 k \rceil$ — значения переменных $y_1, \ldots, y_{\lceil \log_2 k \rceil}$. Тогда на выходе схемы Ω реализуется булева функция

$$\Omega(z_1, \ldots, z_k, y_1, \ldots, y_{\lceil \log_2 k \rceil}) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\lceil \log_2 k \rceil})} z_{\mu(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\lceil \log_2 k \rceil})} y_1^{\sigma_1} \cdots y_{\lceil \log_2 k \rceil}^{\sigma_{\lceil \log_2 k \rceil}}, \tag{2.1}$$

где дизъюнкция берется по всем наборам $(\sigma_1 \dots \sigma_{\lceil \log_2 k \rceil})$ таким, что $\mu(\sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log_2 k \rceil}) \in \{1, \dots, k\}$. Здесь

$$y^\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если } y = \sigma; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, если $(\sigma_1 \dots \sigma_{\lceil \log_2 k \rceil})$ есть двоичное представление числа $t - 1$, то $\Omega(z_1, \dots, z_k, \sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log_2 k \rceil}) = z_t$.

Функцию, определенную равенством (2.1), можно реализовать схемой сложности не более $c_1 k$ в базисе $\{\wedge, \vee, ^-\}$. Действительно, согласно [12] систему всех конъюнкций $\{y_1^{\sigma_1} \cdots y_{\lceil \log_2 k \rceil}^{\sigma_{\lceil \log_2 k \rceil}}\}$ можно реализовать схемой (многополюсником) сложности $2^{\lceil \log_2 k \rceil} + \lceil \log_2 k \rceil - 4$. Взяв этот многополюсник, k элементов $\wedge$ и k элементов $\vee$, следуя (2.1), получаем схему Ω, реализующую функцию $\Omega(z_1, \dots, z_k, y_1, \dots, y_{\lceil \log_2 k \rceil})$ такую, что $L(\Omega) \leqslant c_2 k$. Отсюда следует, что в произвольном базисе можно построить такую схему Ω, что

$$L(\Omega) \leqslant c_3 k. \tag{2.2}$$

2.2. Схема Δ. Эта схема строится из тривиальных элементов базиса. Положим $t = L(B)$. Для произвольного булевого вектора $(\sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log_2 t \rceil})$ такого, что $\mu(\sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log_2 t \rceil}) \leqslant t$, и любого числа j из $\{1, \dots, \lceil \log_2 k \rceil\}$ определим булеву функцию

$$g_{\mu(\sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log_2 t \rceil}), j} = \bigvee_{i=1}^{m} y_{i,j} z_{i,1}^{\sigma_1} z_{i,2}^{\sigma_2} \cdots z_{i, \lceil \log_2 t \rceil}^{\sigma_{\lceil \log_2 t \rceil}}. \tag{2.3}$$

Изменяя значения параметров j и $\sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log_2 t \rceil}$, получим $t \lceil \log_2 k \rceil$ булевых функций $g_{d,j}$, $1 \leqslant d \leqslant t$; $1 \leqslant j \leqslant \lceil \log_2 k \rceil$, зависящих от $m(\lceil \log_2 t \rceil + \lceil \log_2 k \rceil)$ переменных. Схема Δ реализует систему этих функций. Эта схема имеет $m(\lceil \log_2 t \rceil + \lceil \log_2 k \rceil)$ входов и $t \lceil \log_2 k \rceil)$ выходов.

Сложность схемы Δ. Пусть схема $U(i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, реализует систему всех конъюнкций вида $z_{i,1}^{\sigma_1} \dots z_{i, \lceil \log_2 t \rceil}^{\sigma_{\lceil \log_2 t \rceil}}$, где булевы наборы $(\sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log_2 t \rceil})$ принимают всевозможные значения. Согласно [8] для построения схемы $U(i)$ в базисе $\{\wedge, \vee, ^-\}$ достаточно иметь $2^{\lceil \log_2 t \rceil + 1} + \lceil \log_2 t \rceil - 4$ элементов. Для построения всех m схем $U(i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, понадобится не более $m(2^{\lceil \log_2 t \rceil + 1} + \lceil \log_2 t \rceil - 4)$ элементов. Если уже построены все схемы $U(i)$, то согласно формуле (2.3) для реализации одной функции $g_{\mu(\sigma_1, \dots, \sigma_{\lceil \log_2 t \rceil}), j}$ достаточно использовать еще m элементов $\wedge$ и $m - 1$ элементов $\vee$. Таким образом, для построения схемы Δ достаточно иметь $m(2^{\lceil \log_2 t \rceil + 1} + \lceil \log_2 t \rceil - 4) + 2mt \lceil \log_2 k \rceil$ элементов базиса $\{\wedge, \vee, ^-\}$. Следовательно, для произвольного базиса имеем

$$L(\Delta) \leqslant c_4 m t \log_2 k. \tag{2.4}$$

Заменим переменные $y_{i,j}$ и $z_{s,l}$ на $x_{n+1}, \dots, x_{n+m(\lceil \log_2 t\rceil + \lceil \log_2 k \rceil)}$:

$$
\begin{array}{lll}
y_{1,1} = x_{n+1}, & \dots, & y_{1,\lceil \log_2 k\rceil} = x_{n+\lceil \log_2 k\rceil}, \dots \\
y_{m,1} = x_{n+(m-1)\lceil \log_2 k\rceil+1}, & \dots, & y_{m,\lceil \log_2 k\rceil} = x_{n+m\lceil \log_2 k\rceil}; \dots \\
z_{1,1} = x_{n+m\lceil \log_2 k\rceil+1}, & \dots, & z_{1,\lceil \log_2 t\rceil} = x_{n+m\lceil \log_2 k\rceil+\lceil \log_2 t\rceil}, \dots \\
z_{m,1} = x_{n+m\lceil \log_2 k\rceil+(m-1)\lceil \log_2 t\rceil+1}, \dots, & & z_{m,\lceil \log_2 t\rceil} = x_{n+m(\lceil \log_2 k\rceil+\lceil \log_2 t\rceil)}.
\end{array}
$$

Будем считать, что выходам схемы Δ присвоены δ-метки — двухразрядные векторы $\langle d.j\rangle$, $1 \leqslant d \leqslant t$ и $1 \leqslant j \leqslant \lceil \log_2 k\rceil$. В схеме Δ на выходе с δ-меткой $\langle d.j\rangle$, где $1 \leqslant d \leqslant t$ и $1 \leqslant j \leqslant \lceil \log_2 k\rceil$, реализуется функция $g_{d,j}$, определенная формулой (2.3). Внешние полюсы схемы Δ изображены на рис. 2.

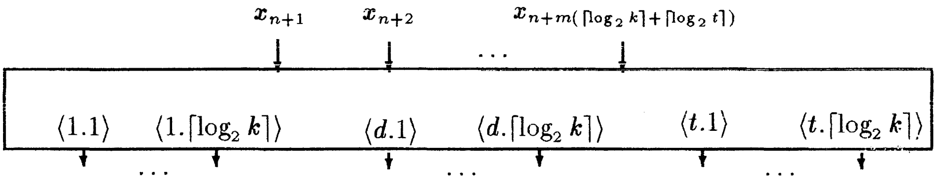


Рис. 2

2.3. Свойства схемы Δ. Положим $l = m(\lceil \log_2 k\rceil + \lceil \log_2 t\rceil)$. Если на входы схемы Δ подается вектор $\widetilde{e} = (e_1, \dots, e_l)$, то на выходах этой схемы реализуется $t\lceil \log_2 k\rceil$-компонентный вектор $(a_{1.1}, a_{1.2} \dots, a_{t.\lceil \log_2 k\rceil})$, причем $a_{i.j}$ реализуется на выходе с δ-меткой $\langle i.j\rangle$. Разобьем этот вектор на такие подвекторы $\widetilde{\Delta}(\widetilde{e}, i), i = 1, \dots, t$, каждый из которых состоит из $\lceil \log_2 k\rceil$ компонент, что

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}(\widetilde{e}, 1) &= (a_{1.1}, a_{1.2}, \dots, a_{1.\lceil \log_2 k\rceil}),\\
\widetilde{\Delta}(\widetilde{e}, 2) &= (a_{2.1}, a_{2.2}, \dots, a_{2.\lceil \log_2 k\rceil}),\\
\dots\ &\ \dots\\
\widetilde{\Delta}(\widetilde{e}, t) &= (a_{t.1}, a_{t.2}, \dots, a_{t.\lceil \log_2 k\rceil}).
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Обозначим через $\{\mathscr{D}_i \mid 1 \leqslant i \leqslant u\}$ множество всех неупорядоченных выборок по $0, 1, 2, \dots, m$ элементов из множества α-меток $\{(d.j) \mid 1 \leqslant d \leqslant t,\ 1 \leqslant j \leqslant k\}$. Здесь $u = \sum\limits_{v=0}^{m} \binom{kt}{v}$. Пусть s — произвольное число из $\{1, \dots, t\}$. $\mathscr{D}_s$ называется *хорошей выборкой*, если при любом d, $1 \leqslant d \leqslant t$, в $\mathscr{D}_s$ содержится не более $k-1$ меток с первыми компонентами, равными d.

Лемма 1. *Для любой хорошей выборки $\mathscr{D}_s$ найдется такой вектор $\widetilde{e}_l = (e_1, \dots, e_l)$, что если $\widetilde{e}_l$ подать на входы схемы Δ, то на ее выходе получится набор слов $\widetilde{\Delta}(\widetilde{e}_l, 1), \dots, \widetilde{\Delta}(\widetilde{e}_l, t)$, обладающий свойством: если $d \in \{1, \dots, t\}$, $q \in \{1, \dots, k\}$ и α-метка $(d.q)$ принадлежит $\mathscr{D}_s$, то $\mu(\widetilde{\Delta}(\widetilde{e}_l, d)) \neq q$.*

Доказательство см. в [7, с. 55].

Замечание 1. В [7] приведено конструктивное доказательство леммы 1: указан алгоритм построения вектора $\widetilde{e}_l$, обладающего указанными в формулировке леммы свойствами.

§ 3. k-Преобразование схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$

При k-преобразовании схема $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ превращается в схему $S(A, B', \widetilde{x}_{n+l})$, где $l = m(\lceil \log_2 k \rceil + \lceil \log_2 t \rceil)$. При этом подсхема A не изменяется, а подсхема B преобразуется в подсхему B'.

Последняя состоит из базисных функциональных элементов, а также схем Ω и Δ.

β-шаги при k-преобразовании. Пусть схема $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ состоит из N элементов. Занумеруем их числами $1, \dots, N$ так, чтобы числа $1, 2, \dots, t$ стали номерами элементов из B.

Ярусы в $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ определим индуктивно. К первому ярусу отнесем элементы схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$, входы которых присоединены только к входным полюсам.

Пусть в $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ определены i первых ярусов. Каждый элемент схемы, который не попал ни в один из i первых ярусов, а все входы которого присоединены к выходам элементов из ярусов с номерами $1, \dots, i$ или к входным полюсам, относится к $(i+1)$-му ярусу. Процесс образования ярусов продолжается до включения каждого элемента из $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ в соответствующий ярус.

Схема $S(A, B', \widetilde{x}_{n+l})$ строится последовательно. Сначала строится описанная выше схема Δ. Дальнейшие процедуры разбиваются на этапы, выполняемые последовательно друг за другом. Эти этапы мы будем называть *шагами.*

Каждый шаг состоит в том, что, выбрав элемент β в B, из базисных элементов и схем Ω мы образуем некоторый фрагмент схемы и присоединяем его к ранее построенной части схемы. Состав добавляемого к схеме фрагмента и способ его присоединения к ранее построенной части определяются тем, какую функцию реализует β, и тем, как этот элемент присоединен к элементам в $S(A, B, \widetilde{x}_n)$. Шаг построения фрагмента схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$, начинающийся выбором элемента β, называется *β-шагом.*

В схеме $S(A, B', \widetilde{x}_{n+l})$ всем элементам присваиваются α-метки, являющиеся двухразрядными векторами.

Опишем β-шаги. Пусть β — элемент первого яруса в $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ и j — номер этого элемента. Рассмотрим два случая.

Случай 1. β принадлежит подсхеме A. Возьмем копию элемента β. Выбранной копии присвоим α-метку $(j.*)$. Если i-й вход элемента β в $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ присоединен к полюсу x_s, то i-й вход копии присоединяется к полюсу x_s. (Здесь и далее внешний полюс схемы обозначается так же, как и переменная, значение которой подается на этот полюс.)

Случай 2. β является элементом из B. Возьмем k копий элемента β и присвоим им α-метки $(j.1)$, $(j.2), \ldots, (j.k)$. Входы каждой копии присоединим к входным полюсам новой схемы так же, как присоединены в $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ соответствующие входы элемента β.

Сделав соответствующие β-шаги для всех элементов первого яруса, получим часть схемы $S(A, B', \widetilde{x}_{n+l})$. Далее делаем β-шаги, выбирая β во втором, затем в третьем ярусах, и т. д. Предположим, что сделаны β-шаги для всех β из i первых ярусов схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$. Пусть β — элемент из $(i+1)$-го яруса схемы и j — номер элемента β. Опишем β-шаг для такого β. Будем различать два случая.

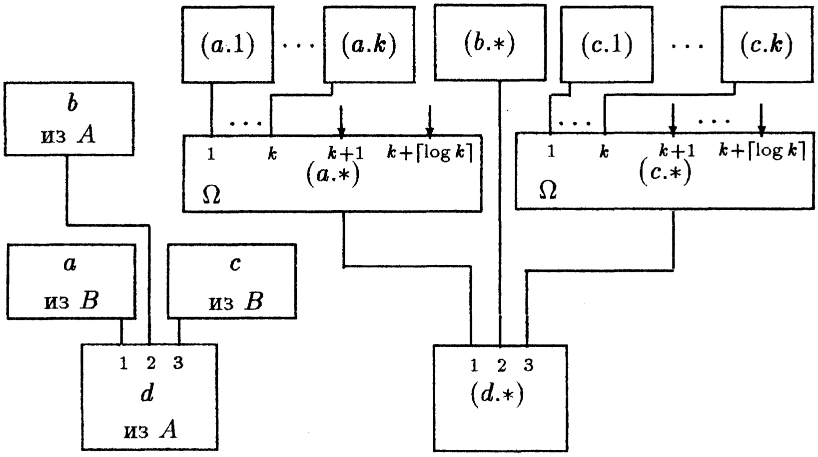
Случай 1. β находится в подсхеме A. Возьмем копию элемента β, присвоим ей α-метку $(j.*)$ и входы этой копии присоединим к уже построенной части схемы следующим образом.

- Если v-й вход элемента β присоединен к полюсу x_s, то v-й вход элемента с α-меткой $(j.*)$ присоединяется к полюсу x_s.
- Если v-й вход элемента β присоединен к выходу элемента γ с номером s, то в строящейся схеме v-й вход элемента с α-меткой $(j.*)$ присоединяется к выходу элемента с α-меткой $(s.*)$.

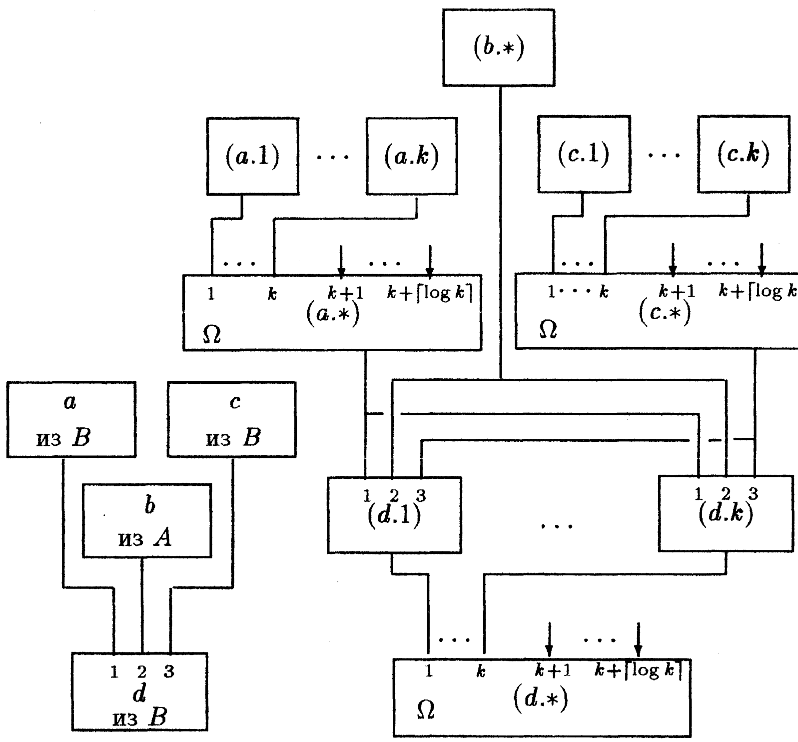
Описанную процедуру повторим для каждого входа рассматриваемой копии элемента β.

На рис. 3 (сверху) приведен пример преобразования, соответствующего β-шагу для рассмотренного случая. Слева размещен фрагмент схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$. В нем трехвходовый элемент β имеет номер d, его первый и третий входы присоединены в $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ к элементам из B с номерами a и c, а второй вход — к элементу из A с номером b. Справа размещен соответствующий фрагмент схемы $S(A, B', \widetilde{x}_{n+l})$. Элемент с α-меткой $(d.*)$ является копией элемента с номером d.

Случай 2. β является элементом из B. Возьмем k копий элемента β и присвоим им α-метки $(j.1), (j.2), \ldots, (j.k)$. Входы копий присоединим к элементам схемы следующим образом.



Фрагмент из $S(A, B, \tilde{x}_n)$ Фрагмент из $S(A, B', \tilde{x}_{n+l})$



Фрагмент из $S(A, B, \tilde{x}_n)$ Фрагмент из $S(A, B', \tilde{x}_{n+l})$

Рис. 3

- Если v-й вход элемента β присоединен в $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ к полюсу x_s, то v-й вход каждой копии присоединяется в $S(A, B', \widetilde{x}_{n+l})$ к полюсу x_s.
- Если v-й вход элемента β присоединен в $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ к элементу с номером s, то v-й вход каждой копии присоединяется к выходу элемента с α-меткой $(s.*)$.

Описанные процедуры повторяются для всех входов каждой копии элемента β. Затем берется экземпляр схемы Ω и ему присваивается α-метка $(j.*)$. Вход с номером v схемы Ω подключим следующим образом. Если $1 \leqslant v \leqslant k$, то этот вход подключается к выходу элемента с α-меткой $(j.v)$. Если $v = k + s$, $1 \leqslant s \leqslant \lceil \log_2 k \rceil$, то рассматриваемый вход подключается к выходу с δ-меткой $\langle j.s \rangle$ схемы Δ.

На этом описываемый β-шаг завершается.

На рис. 3 (снизу) приведен пример преобразования, которое соответствует β-шагу для случая, когда β является элементом из B.

k-Преобразование схемы считается законченным, когда будут сделаны β-шаги для всех элементов β, выбираемых в схеме B. Полученная схема обозначается через $S(A, B', \widetilde{x}_{n+l})$.

Сложность схемы B'. Пусть $L(B) = t$ — сложность схемы B. Схема B' содержит t схем Ω и k копий каждого элемента из B. Кроме того, в B' содержится схема Δ. Отсюда и из (2.2) (2.4) следует, что

$$L(B') \leqslant c_5 kt + c_4 mt \log_2 k. \tag{3.1}$$

§ 4. Схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$

Эта схема получается двумя последовательными преобразованиями схемы $S(A, B', \widetilde{x}_{n+l})$. Входы и выходы схемы B' принадлежат множествам входов и выходов схемы C.

4.1. Первое преобразование. Опишем подсхемы Q и D схемы R (рис. 4). Эти подсхемы строятся из тривиальных элементов базиса.

Схема Q. Если на первый, второй и третий входы схемы Q подаются значения k, v и s, то на ее выходе реализуется функция $\overline{k}v \vee ks$.

Схема D. Эта схема осуществляет отображение $(a_1, \dots, a_{2m+1}) \to b(a_1, \dots, a_{2m+1})$, где

$$b(a_1, \dots, a_{2m+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{i=1}^{2m+1} a_i > m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

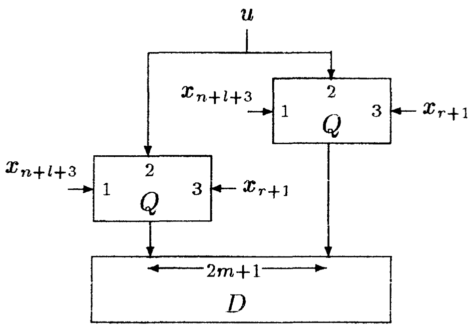


Рис. 4. Схема R

Ясно, что если схема D исправна, а в R содержится не более m неисправных схем Q, то R — самокорректирующаяся схема.

Функция $b(a_1, \ldots, a_{2m+1})$ является симметрической булевой функцией от $2m+1$ переменных. Известно [12, с. 369], что ее можно реализовать схемой в базисе $\{\wedge, \vee, \bar{\ }\}$, содержащей не более $c_6 m$ элементов. Отсюда в произвольном базисе имеем

$$L(R) \leqslant c_6 m. \qquad (4.1)$$

Пусть $w_{i_1}, \ldots, w_{i_s}$ — полюсы схемы A, не являющиеся входными полюсами схемы $S(A, B', \widetilde{x}_{n+l})$, и пусть к полюсам $w_{i_1}, \ldots, w_{i_s}$ схемы $S(A, B', \widetilde{x}_{n+l})$ подключены входные полюсы схемы B'. Выполним следующие преобразования. Вход схемы B', подключенный к полюсу w_{i_1}, переключим на выход схемы R, а к полюсу w_{i_1} подключим вход схемы R. Аналогичные переключения выполним для полюсов $w_{i_2}, \ldots, w_{i_s}$, используя каждый раз новый экземпляр схемы R. В результате между полюсами $w_{i_1}, \ldots, w_{i_s}$ и входными полюсами схемы B' появятся s одинаковых схем R.

Метки в D. Всем базисным элементам из D присвоим одноразрядные α-метки (ψ).

На этом первое преобразование схемы $S(A, B', \widetilde{x}_{n+l})$ заканчивается. Схему, в которую превратилась схема B' после первого преобразования, обозначим через B_1. Эта схема есть соединение схемы B' и h схем R. Отсюда и из (2.4), (3.1) и (4.1) получаем

$$L(B_1) \leqslant c_5 kt + c_6 hm + c_4 mt \log_2 k. \qquad (4.2)$$

4.2. Второе преобразование. Это преобразование схемы $(A, B_1, \widetilde{x}_n)$ связано с добавлением схем K на линиях, соединяющих некоторые пары элементов в подсхеме B_1. При этом схема B_1 преобразуется в схему C. Некоторые подсхемы схемы C получают γ-метки, являющиеся трехразрядными векторами. Эти операции изображены на рис. 5–8. Пусть φ_i, φ_q — базисные элементы. На рисунках справа приведены фрагменты схемы C, в которые преобразуются соответствующие фрагменты схемы B_1, показанные слева. При этом для всех фрагментов схемы B_1, указанных в левых частях рис. 5–8, и в схемах, полученных

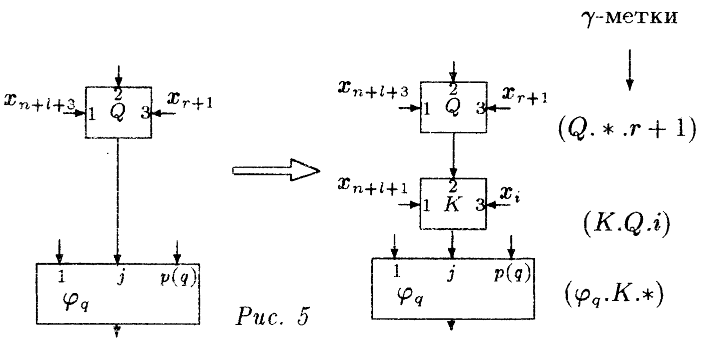


Рис. 5

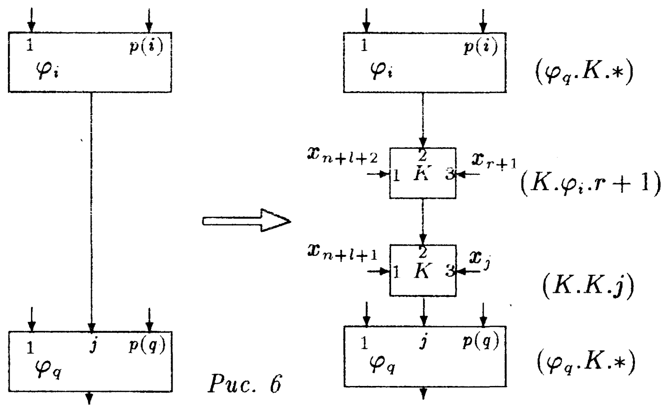


Рис. 6

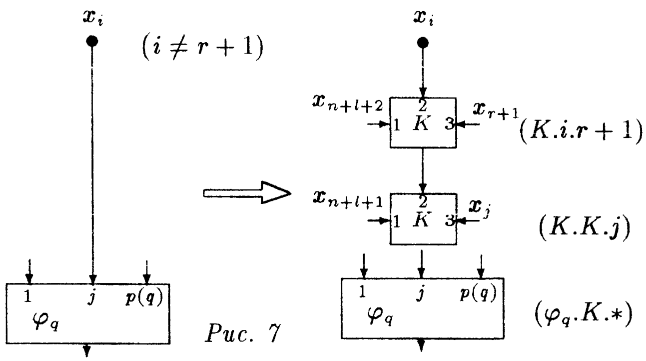


Рис. 7

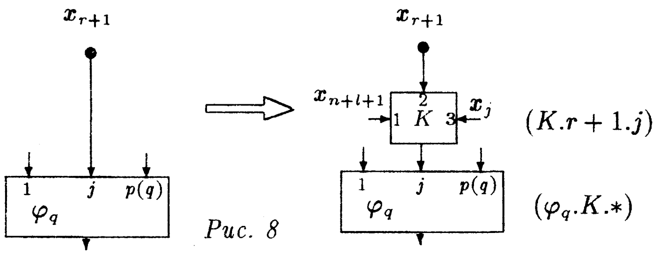


Рис. 8

из B_1 такими преобразованиями, проводятся аналогичные преобразования до тех пор, пока в полученной схеме не исчезнут фрагменты, показанные в левых частях рассматриваемых рисунков. Преобразования проводятся только в тех случаях, когда базисные элементы φ_i и φ_q, изображенные в левых частях рисунков, находится вне схем Q и K.

Схема K. Эта схема строится из тривиальных элементов базиса. Она имеет три входа и один выход. Если на ее входы с номерами 1, 2, 3 подаются значения x, y, z, то на выходе схемы K реализуется функция $\bar{x}y \vee xz$.

Обозначим через C схему, полученную из B_1 указанными преобразованиями. Элементы схемы C, находящиеся вне схем K и Q, будем называть *выделенными*. Всем схемам Q, K и выделенным элементам ставятся в соответствие γ-метки (трехразрядные векторы) по следующему правилу (см. рис. 5–8).

- Схемы Q получают γ-метки $(Q, *, r+1)$.
- Выделенные элементы φ_i получают γ-метки $(\varphi_i, K, *)$, $i = 1, \dots, g$.
- Схема K получает γ-метку

  (K, Q, i), если ее вход подключен к выходу схемы Q, а выход — к i-му входу выделенного элемента;

  $(K, \varphi_i, r+1)$, если ее вход подключен к выходу базисного элемента φ_i, $i = 1, \dots, g$;

  $(K, i, r+1)$, если ее вход подключен к полюсу x_i, $i \neq r+1$;

  $(K, r+1, j)$, если ее вход подключен к полюсу x_{r+1}, а выход — к j-му входу выделенного элемента;

  (K, K, j), если ее вход подключен к полюсу с γ-меткой $(K, i, r+1)$ или к полюсу с γ-меткой $(K, \varphi_i, r+1)$, а выход — к j-му входу выделенного элемента.

Блоки в C. Будем считать *блоками схемы* C все ее части, отмеченные γ-метками. Таким образом, блоками в C являются все схемы Q и K, а также отдельные функциональные элементы.

Выходные полюсы схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$. Будем считать, что выход каждого блока в C является одновременно и выходом схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$. Эти выходы обозначим через $b_1, \dots, b_p$. Кроме того, будем считать, что схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ сохраняет множество полюсов $a_1, \dots, a_q$ (выше так обозначались выходные полюсы схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$). Если выход некоторого элемента β из подсхемы A в $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ был выходным полюсом a_i, то в $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ выход того же элемента β считается выходным полюсом a_i. Если a_j есть выходной полюс в $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ и одновременно есть выход элемента β с номером s из подсхемы B схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$, то в схеме $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ выходом a_j служит выход схемы Ω с α-меткой $(s.*)$.

Заметим, что выход одной схемы Ω из C может одновременно служить полюсами a_i и b_j.

Сложность схемы C. Поскольку C получается из B_1 добавлением не более $2rt$ схем K сложности 4 (в базисе $\{\wedge, \vee, ^{-}\}$), то, учитывая (4.2), получаем

$$L(C) < c_5kt + c_6hm + c_4mt\log_2 k + c_7rt. \tag{4.3}$$

4.3. Гирлянды, подсхемы, дубли и метки элементов в C.

Гирлянды в C. Пусть к j-му входу блока β в подсхеме C присоединен выход схемы K, а к входу последней присоединен выход еще одной схемы K. Такая пара схем K называется *гирляндой*, подвешенной к j-му входу блока β.

Если к j-му входу блока β присоединен выход схемы K, а к входу последней присоединен блок, не являющийся схемой K, то рассматриваемая схема K тоже называется гирляндой, подвешенной к j-му входу блока β.

На рис. 5–8 показаны гирлянды из одной и двух схем K. Вход с номером 2 верхней схемы K, изображенной на рис. 6, называется *входом гирлянды*. Для гирлянды, состоящей из одной схемы K, входом называется второй вход этой схемы K.

α-Метки в C. Будем считать, что все блоки схемы C, находящиеся вне схем Q и K, получают те же α-метки, которыми были отмечены соответствующие элементы в схеме B'. Некоторым схемам K присваиваются α-метки. Если вход схемы K подключен к выходу блока с α-меткой $(a.j)$, $a \in \{1, \dots, t\}$, $j \in \{1, \dots, k\}$, то эта схема K получает α-метку $(a.j.K)$. Схеме K, вход которой присоединен к выходу блока с α-меткой $(a.j.K)$, присваивается α-метка $(a.j.K.K)$.

Схемы $\widehat{R}$. Пусть R' — одна из схем R в B'. Обозначим через $\widehat{R}'$ подсхему в C, состоящую из элементов схемы R', отмеченных α-метками (ψ), и из схем K, входящих в гирлянды, подвешенные к входам элементов из R' с α-метками (ψ).

Пусть u — полюс схемы A, к которому присоединены входы подсхем Q из $\widehat{R}$. Тогда полюс u называется *входом* схемы $\widehat{R}$.

Схема $\widehat{\Delta}$. Пусть Δ — схема в B'. Обозначим через $\widehat{\Delta}$ подсхему в C, состоящую из блоков схемы Δ и из схем K, входящих в гирлянды, подвешенные к входам блоков из Δ.

Схемы $\widehat{\Omega}$. Пусть Ω' — схема Ω с α-меткой $(d.*)$ в B'. Обозначим через $\widehat{\Omega}'$ подсхему в C, состоящую из базисных элементов схемы Ω' с α-метками (ω) и из схем K, входящих в такие гирлянды, что

— гирлянды подвешены к входам элементов из Ω' с α-метками (ω);

— входы гирлянд подключены к выходам элементов с α-метками (ω).

Схема $\widehat{\Omega}'$ имеет $k + \lceil \log k \rceil$ входов (она сохраняет все входные полюсы, которые имела схема Ω'). Схеме $\widehat{\Omega}'$ присваивается α-метка $(d.*)$, совпадающая с α-меткой, присвоенной схеме Ω' в B'.

Обозначим через $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ схему, в которую превращается схема $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ в результате описанных преобразований. На рис. 1 (справа) показано соединение подсхем A и C в схеме $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$.

Дубли в C для элемента β из B. Пусть элемент β из B в схеме $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ имеет номер d. Пусть $j \in \{1, \dots, k\}$. Подсхему в C, образованную тремя элементами с α-метками $(d.j)$, $(d.j.K)$ и $(d.j.K.K)$, назовем *дублем элемента* β. Отметим, что в соответствии с этим определением в C содержится k дублей каждого элемента β.

§ 5. Свойства схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$

Пусть β — произвольный элемент схемы схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$. Обозначим через β' элемент, в который превращается β при появлении в $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ допустимых неисправностей, т. е. при преобразовании схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ в схему $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$. Ниже используются одинаковые обозначения для схем β и β'. Обе схемы могут быть обозначены через β. Это не будет приводить к неоднозначности в рассуждениях, поскольку в каждом случае будет указано, для какой из схем, $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ или $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$, схема β является подсхемой. Будем считать, что если схема β из $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ является блоком, то β из $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ также является блоком. Если блок δ входит в окрестность блока β из $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$, то только в этом случае соответствующий блок δ из $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ входит в окрестность блока β из $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$.

Окрестность блока. Пусть блок β имеет γ-метку (U, V, W). *Окрестность блока* β обозначим через $O(\beta)$ и определим следующим образом:

- если $(U, V, W) = (K, Q, j)$, $1 \leqslant j \leqslant r$, то $O(\beta)$ состоит из блока β и блока Q, выход которого подключен к входу блока β;
- если $(U, V, W) = (\varphi_i, K, *)$, $1 \leqslant i \leqslant g$, то $O(\beta)$ состоит из β и всех блоков K, выходы которых подсоединены к входам блока β;
- если $(U, V, W) = (K, \varphi_i, r+1)$, $1 \leqslant i \leqslant g$, то $O(\beta)$ — множество блоков в C, состоящее из блока β, блока φ_i, выход которого подключен к входу блока β, и всех блоков K, выходы которых подключены к входам рассматриваемого блока φ_i;
- если $(U, V, W) = (K, K, j)$, то $O(\beta)$ состоит из блока β и блока K, выход которого подключен к входу блока β;
- если блок β имеет γ-метку $(K, i, r+1)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, или $(K, r+1, j)$, $1 \leqslant j \leqslant r$, или $(Q, *, r+1)$, то $O(\beta)$ состоит лишь из блока β.

Остаточная различимость автоматов. Пусть W — некоторое множество инициальных автоматов Мили и пусть входная последовательность $\vec{\mathscr{P}}$ такова, что для любых двух автоматов M_1 и M_2 из W справедливо: или M_1 и M_2 при подаче слова $\vec{\mathscr{P}}$ выдают различные выходные слова, или M_1 и M_2 после подачи слова $\vec{\mathscr{P}}$ реализуют одинаковые операторы. Тогда будем говорить, что входное слово $\vec{\mathscr{P}}$ *остаточно различает* автоматы из множества W.

Если множество W состоит из всех инициальных автоматов Мили, каждый из которых имеет не более ξ состояний, то соответствующая входная последовательность $\vec{\mathscr{P}}$ называется последовательностью, *остаточно различающей все инициальные автоматы не более чем с ξ состояниями.* (Подробнее об остаточной различимости см. в [10, с. 263].)

Соглашение о входном алфавите автоматов. В приведенном определении остаточной расшифровки автоматов подразумевается, что все автоматы из W имеют одинаковые конечные входные алфавиты. Условимся, что если автомат φ_i имеет $r(i)$ входов и $r(i) < r$, то элементами входного алфавита такого автомата служат r-разрядные булевы векторы, т. е. кроме имеющихся $r(i)$ входов автомат имеет еще $r - r(i)$ фиктивных входов. Таким образом, если говорится, что на автомат с $r(i)$ входами подается вектор $y_1, y_2, \ldots, y_r$, то это означает, что на входы с номерами $1, 2, \ldots, r(i)$ подаются значения $y_1, y_2, \ldots, y_{r(i)}$, а значения $y_{r(i)+1}, \ldots, y_r$ подаются на фиктивные входы. Теперь можно считать, что *автоматы из базиса Φ имеют единый входной алфавит.*

Последовательности $\vec{\mathscr{Q}}$, $\vec{\mathscr{Q}}_{01}$, $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$, $\vec{\mathscr{Q}}_{11}$. Пусть $\widetilde{a}_r(1), \widetilde{a}_r(2), \ldots, \widetilde{a}_r(H)$ — последовательность r-разрядных булевых векторов, остаточно различающая все автоматы с ξ состояниями. Положим $l = m(\lceil \log_2 k \rceil + \lceil \log_2 t \rceil)$. Рассмотрим следующую таблицу:

$$
\begin{array}{l}
1 \\ 2 \\ \ldots \\ r \\ r+1 \\ r+2 \\ \ldots \\ n+l \\ n+l+1 \\ n+l+2 \\ n+l+3
\end{array}
\left\|
\begin{array}{llllllll}
a_1(1) & a_1(2) & \ldots & a_1(H) & a_1(1) & a_1(2) & \ldots & a_1(H) \\
a_2(1) & a_2(2) & \ldots & a_2(H) & a_2(1) & a_2(2) & \ldots & a_2(H) \\
\ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \\
a_r(1) & a_r(2) & \ldots & a_r(H) & a_r(1) & a_r(2) & \ldots & a_r(H) \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
a_1(1) & a_1(2) & \ldots & a_1(H) & a_1(1) & a_1(2) & \ldots & a_1(H) \\
\ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \\
a_1(1) & a_1(2) & \ldots & a_1(H) & a_1(1) & a_1(2) & \ldots & a_1(H) \\
c & c & \ldots & c & c & c & \ldots & c \\
d & d & \ldots & d & d & d & \ldots & d \\
1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1
\end{array}
\right\|
$$

Здесь c и d — булевы переменные. Часть таблицы, заключенная в прямые скобки, определяет последовательность $\vec{\mathscr{Q}}_{cd}$, образованную $(n+l+3)$-

разрядными векторами — столбцами таблицы. Число векторов в $\vec{\mathscr{Q}}_{cd}$ равно $2H$. Слева указаны номера строк. Придавая параметрам c и d значения 0 и 1, определим последовательности $\vec{\mathscr{Q}}_{01}$, $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$, $\vec{\mathscr{Q}}_{11}$, каждая из которых имеет длину $2H$.

Каждой γ-метке (U,V,W) поставим в соответствие последовательность $\vec{\mathscr{Q}}(U,V,W)$ следующим образом:

$$\vec{\mathscr{Q}}(U,V,W)=\begin{cases}\vec{\mathscr{Q}}_{10}, & \text{если } (U,V,W)\in\{(Q,*,r+1),\\ & (\varphi_i,K,*)\mid 1\leqslant i\leqslant p\};\\ \vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}, & \text{если } (U,V,W)\in\{(K,K,j),(K,Q,j),\\ & (K,r+1,j)\mid 1\leqslant j\leqslant r\};\\ \vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}, & \text{если } (U,V,W)\in\{(K,\varphi_i,r+1),(K,j,r+1)\mid\\ & 1\leqslant i\leqslant p,\ j=1,\ldots,r,\ r+2,\ldots,n\}.\end{cases}$$

Здесь выражение $\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}$ означает последовательность длины $4H$, в которой начальный отрезок длины $2H$ есть последовательность $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$, а оставшийся отрезок является последовательностью $\vec{\mathscr{Q}}_{11}$. Аналогично определяется $\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$. Определим последовательность, которая играет главную роль в рассматриваемых ниже тестовых процедурах:

$$\vec{\mathscr{Q}}=\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}. \tag{5.1}$$

Утверждение 1. *Последовательность, остаточно различающая все инициальные автоматы с ξ состояниями, содержит все элементы входного алфавита для этих автоматов (возможно, с повторениями).*

Это утверждение очевидно. Для рассматриваемого класса автоматов такая последовательность содержит все 2^r булевых r-разрядных векторов.

Известно (см. [10, с. 266]), что существует последовательность длины $H=\lceil 4\xi^2h^{2\xi}\ln(2\xi)\rceil$, остаточно различающая все инициальные автоматы не более чем с ξ состояниями (здесь h — мощность входного алфавита). Отсюда, из определения последовательности $\vec{\mathscr{Q}}$ и того факта, что в рассматриваемом случае $h=2^r$, получаем

Утверждение 2. *В качестве последовательности $\vec{\mathscr{Q}}=\vec{\mathscr{Q}}_{10}\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$ можно взять последовательность длины $\lceil 6\cdot 4^{r\xi+1}\xi^2\ln(2\xi)\rceil$.*

Схема, $\vec{\mathscr{Q}}$-совершенная относительно блока. Пусть β — произвольный блок с γ-меткой (U,V,W) в подсхеме C схемы $S(A,C,\widetilde{x}_{n+w})$. Пусть окрестность $O(\beta)$ блока β состоит из блоков $\delta_1,\ldots,\delta_{s(\beta)}$. Как следует из определения окрестности блока, в ней не может находиться более одного нетривиального блока схемы. Рассмотрим варианты, зависящие от того, есть ли в $O(\beta)$ нетривиальный блок.

(i) *В $O(\beta)$ есть нетривиальный блок.* Обозначим этот блок через δ_1, а остальные блоки из $O(\beta)$ через $\delta_2, \ldots, \delta_{s(\beta)}$. Пусть последовательность $\vec{\mathscr{Q}}$ подается на входы схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$, в которой подсхемы A и C находятся в начальных состояниях $\sigma_0(A)$ и $\sigma_0(C)$ соответственно. Обозначим через $\delta_i(\vec{\mathscr{Q}}, \sigma_0(A), \sigma_0(C), \beta)$ последовательность, появляющуюся на выходе блока δ_i, $1 \leqslant i \leqslant s(\beta)$, в то время, когда на входы схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ подается подпоследовательность $\vec{\mathscr{Q}}(U, V, W)$ из $\vec{\mathscr{Q}}$.

Примем аналогичные обозначения и для схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$. Здесь обозначениям β, $O(\beta)$, $\delta_1, \ldots, \delta_{s(\beta)}$ соответствуют β^*, $O(\beta^*)$, $\delta_1^*, \ldots, \delta_{s(\beta^*)}$. Полагаем, что если схемы A^* и C^* находятся в начальных состояниях $\sigma_0(A^*)$ и $\sigma_0(C^*)$ и на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ подается последовательность $\vec{\mathscr{Q}}$, то $\delta_i^*(\vec{\mathscr{Q}}, \sigma_0(A^*), \sigma_0(C^*), \beta^*)$ — это последовательность, появляющаяся на выходе блока δ_i^*, $1 \leqslant i \leqslant s(\beta^*)$, в то время, когда на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ подается подпоследовательность $\vec{\mathscr{Q}}(U, V, W)$ из $\vec{\mathscr{Q}}$.

Пусть заданы начальные состояния $\sigma_0(A^*)$ и $\sigma_0(C^*)$ подсхем A^* и C^* из $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$. Предположим, что для них можно указать такие начальные состояния $\sigma'(A)$ и $\sigma'(C)$ подсхем A и C схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$, что при любом i из $\{1, \ldots, s(\beta)\}$ справедливо равенство

$$\delta_i(\vec{\mathscr{Q}}, \sigma'(A), \sigma'(C), \beta) = \delta_i^*(\vec{\mathscr{Q}}, \sigma_0(A^*), \sigma_0(C^*), \beta^*). \tag{5.2}$$

В этом случае схема $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ называется *$\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной относительно* $(\beta^*, \sigma_0(A^*), \sigma_0(C^*))$.

Лемма 2. *Пусть i — произвольное число из $\{1, \ldots, s(\beta)\}$. Тогда*

a) если δ_1 — нетривиальный блок, то последовательность $\delta_i(\vec{\mathscr{Q}}, \sigma'(A), \sigma'(C), \beta)$ не изменится, если в качестве начальных состояний схем A и C из $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ взять состояния $(\sigma''(A), \sigma''(C))$ такие, что внутреннее состояние блока δ_1 то же, что и в $\sigma'(C)$;

b) если в $O(\beta)$ нет нетривиальных блоков, то последовательность $\delta_i(\vec{\mathscr{Q}}, \sigma(A), \sigma(C), \beta)$ не зависит от $\sigma(A)$ и $\sigma(C)$.

Доказательство. Рассмотрим один из пяти возможных типов окрестности блока. Пусть β имеет γ-метку $(\varphi_i, K, *)$. Тогда $O(\beta)$ состоит из блока φ_i и $p(i)$ блоков K, соединенных между собой так, как изображено на рис. 9. При подаче подпоследовательности $\vec{\mathscr{Q}}(\varphi_i, K, *) = \vec{\mathscr{Q}}_{10}$ на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ на вход x_{n+l+1} все время подается значение 1. Поэтому согласно определению схем K получаем, что на входе с номером j, $1 \leqslant j \leqslant p$, блока φ_i появляются значения переменной x_i, не зависящие от внутренних состояний схемы. То же значение появляется

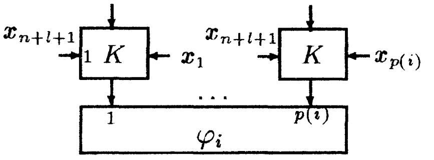


Рис. 9

и на выходе соответствующей схемы K. Отсюда следует, что на выходе блока φ_i реализуется последовательность значений, зависящая лишь от начального состояния этого блока и от входной последовательности. Итак, в рассматриваемом случае на выходах всех блоков из $O(\beta)$ появляются последовательности значений, не зависящие от начальных состояний блоков схемы, отличных от φ_i. В нашем случае φ_i это и есть блок δ_1.

Подобные рассуждения легко провести и для оставшихся 4 типов окрестностей блоков в $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$. Здесь мы эти рассуждения опускаем.

Пользуясь леммой 2, приведем новую формулировку свойства схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ быть $\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной относительно (β^*, $\sigma_0(A^*)$, $\sigma_0(C^*)$).

Пусть заданы начальные состояния $\sigma_0(A^*)$ и $\sigma_0(C^*)$ подсхем A^* и C^* из $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$. Предположим, что для них можно указать такое начальное состояние $\sigma_0(\delta_1)$ блока δ_1 в схеме $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$, при котором справедливы равенства (5.2). Тогда схема $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ называется *$\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной относительно* (β^*, $\sigma_0(A^*)$, $\sigma_0(C^*)$).

(ii) *В окрестности $O(\beta^*)$ блока β^* из подсхемы C^* схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ нет нетривиальных блоков.* В этом случае схема $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ называется *$\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной относительно β*, если на выходах блоков $\delta_1, \dots, \delta_{s(\beta)}$ из $O(\beta)$, принадлежащих схемам $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ и $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$, в процессе подачи на входы этих схем последовательности $\vec{\mathscr{Q}}$ при прохождении ее подпоследовательности $\vec{\mathscr{Q}}(U, V, W)$ выполняется соотношение (5.2).

Обозначим через $\mathscr{E}(C^*)$ совокупность блоков в C^*, не являющихся блоками типа Q.

Лемма 3. *Пусть $\sigma_0(A^*)$, $\sigma_0(C^*)$ — произвольные начальные состояния подсхем A^* и C^* из $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ и пусть $\beta^* \in \mathscr{E}(C^*)$. Тогда*

(a) *если $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ не является $\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной схемой относительно $(\beta^*, \sigma_0(A^*), \sigma_0(C^*))$, то в окрестности блока β^* имеется неисправный блок;*

(b) *если $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ является $\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной схемой относительно $(\beta^*, \sigma_0(A^*), \sigma_0(C^*))$, то блок β^* исправен.*

Доказательство леммы 3 см. в [8, леммы 3 и 4]. В этом доказательстве существенно используется то условие, что нетривиальные базисные блоки являются сильно связными автоматами.

Пусть u — точка схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$, к которой присоединен вход какого-либо элемента из B, причем u является либо входным полюсом в $S(A,B,\widetilde{x}_n)$, либо выходом некоторого элемента подсхемы A. Тогда u есть *входной полюс подсхемы B.*

Если к выходу v некоторого элемента β из подсхемы B присоединен либо выходной полюс схемы $S(A,B,\widetilde{x}_n)$, либо вход какого-либо элемента из A, то v есть *выходной полюс подсхемы B.*

Обозначим через $u_1,\dots,u_h$ и $v_1,\dots,v_g$ входные и выходные полюсы подсхемы B схемы $S(A,B,\widetilde{x}_n)$. Условимся также обозначать соответствующие полюсы в схеме $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+w})$. Кроме входных полюсов $u_1,\dots,u_h$ в схеме C есть еще входные полюсы $x_{n+1}\dots,x_{n+w}$.

Главные и вспомогательные элементы в C. Элемент из C называется *главным элементом*, если он имеет α-метку вида $(a.j)$ или $(a.j.K)$ (здесь a и j — любые числа из множеств $\{1,\dots,t\}$ и $\{1,\dots,k\}$ соответственно).

Элемент схемы C называется *вспомогательным элементом*, если он не является главным элементом и не входит в состав какой-либо схемы Q или K.

Вспомогательный элемент схемы C, отличный от схемы Q и элементов с α-метками $(d.j.K.K)$, где $d=1,\dots,t$; $j=1,\dots,k$, называется *внутренним вспомогательным элементом.*

$\vec{\mathscr{P}}$-канонческая реакция блока на последовательность $\vec{\mathscr{Q}}$. Пусть β^* — блок в подсхеме C^* из $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+w})$, а β — соответствующий блок в $S(A,C,\widetilde{x}_{n+w})$. Пусть $\vec{\mathscr{P}}$ — некоторая последовательность $(n+w)$-разрядных булевых векторов, являющаяся подпоследовательностью последовательности $\vec{\mathscr{Q}}$. Будем считать, что для схемы $S(A,C,\widetilde{x}_{n+w})$ среди всех ее начальных состояний выделено одно. Это состояние назовем *каноническим.* Пусть $S(A,C,\widetilde{x}_{n+w})$ находится в каноническом начальном состоянии, а схема $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+w})$ — в произвольном начальном состоянии и пусть в этих условиях на входы этих схем подается последовательность $\vec{\mathscr{Q}}$. Предположим, что в процессе подачи на входы этих схем последовательности $\vec{\mathscr{Q}}$ при прохождении ее подпоследовательности $\vec{\mathscr{P}}$ на выходах блоков β и β^* появляются одинаковые последовательности. Такую реакцию блока β^* на последовательность $\vec{\mathscr{Q}}$ назовем *$\vec{\mathscr{P}}$-канонической.*

Классы неисправностей в C^*. Обозначим через $\mathscr{C}^*(1)$ множество, образованное всеми α-метками вида $(d.v)$ такими, что если $(d.v)\in\mathscr{C}^*(1)$, то среди элементов из C^* с α-метками $(d.v)$, $(d.v.K)$ или $(d.v.K.K)$ есть хоть один неисправный. Будем говорить, что неисправности в $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+w})$ принадлежат *первому классу неисправностей,* если выполняются следующие условия:

(s-1) при любом d, $1 \leqslant d \leqslant t$, множество $\mathscr{C}^*(1)$ содержит не более $k-1$ меток, в каждой из которых первая компонента равна d;

(s-2) в схеме C^* исправны все внутренние вспомогательные элементы;

(s-3) реакция каждого блока с α-меткой $(d.j.K.K), 1 \leqslant d \leqslant t, 1 \leqslant j \leqslant k$, на последовательность $\vec{\mathscr{Q}}$ является $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$-канонической;

(s-4) реакция каждого блока Q на последовательность $\vec{\mathscr{Q}}$ является $(\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01})$-канонической.

Будем считать, что допустимые неисправности в схеме $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$, не вошедшие в первый класс, относятся ко *второму классу неисправностей.*

Замечание 2. Используя понятие дубля элемента, условие (s-1) можно заменить на эквивалентное: в схеме C среди k дублей любого элемента β из B есть хоть один исправный.

Сильный вектор для схемы C^*. Пусть схема $\widehat{\Delta}$ исправна в C^* и пусть $\widetilde{e} = (e_{n+1}, \dots, e_{n+l})$ такой булевый вектор, что если его подать на входы схемы $\widehat{\Delta}$, то на ее выходе с δ-меткой $\langle s.j \rangle$, $1 \leqslant s \leqslant t$; $1 \leqslant j \leqslant \lceil \log_2 k \rceil$, реализуется значение $a_{s.j}$. Если $(s.\mu(a_{s.1}, \dots, a_{s.\lceil \log_2 k \rceil})) \notin \mathscr{C}^*(1)$ при любом $s \in \{1, \dots, t\}$, то вектор $\widetilde{e}_w = (e_{n+1}, \dots, e_{n+l}, 0, 0, 0)$ называется *сильным вектором для* C^*.

Лемма 4. *Если неисправности схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ принадлежат первому классу, то существует сильный вектор для C^*.*

Эта лемма есть прямое следствие леммы 1.

$\widetilde{\sigma}(B)$-регулярные состояния. Полагаем, что если элементы схемы B занумерованы числами $1, \dots, t$, то в каждый момент времени ее внутреннее состояние можно задать t-разрядным вектором $\widetilde{\sigma}(B)$, i-й разряд которого есть внутреннее состояние i-го элемента схемы, $1 \leqslant i \leqslant t$. Пусть элемент β^* с α-меткой $(s.j)$ в схеме C^* в некоторый момент времени находится в состоянии $\sigma(\beta^*)$, а схема B в это же время — в состоянии $\widetilde{\sigma}(B)$. Будем говорить, что в этот момент состояние элемента β^* является *$\widetilde{\sigma}(B)$-регулярным*, если выполняется одно из двух условий:

— β^* является исправным элементом и $\sigma(\beta^*)$ совпадает со значением s-го разряда вектора $\widetilde{\sigma}(B)$;

— β^* является неисправным элементом.

Если все элементы схемы C^* с α-метками $(s.j)$, $1 \leqslant s \leqslant t$, $1 \leqslant j \leqslant k$, находятся в $\widetilde{\sigma}(B)$-регулярных состояниях, то будем считать, что и вся схема C^* находится в $\widetilde{\sigma}(B)$-регулярном состоянии.

В следующей лемме рассмотрим работу подсхем B и C^* схем $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ и $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ в качестве самостоятельных схем и выясним, как они будут функционировать при условии, когда разрешается подавать произвольные последовательности булевых векторов подходящих размерностей на входы этих схем. (Если B и C^* рассматривать только как подсхемы схем $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ и $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$, то, имея доступ только к внешним входам схем $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ и $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$, не всегда удается обеспечить появление некоторых последовательностей на входах указанных подсхем.)

Лемма 5. *Предположим, что*

(a) *неисправности в $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ принадлежат первому классу;*

(b) *в начальный момент времени схема C^* находилась в $\widetilde{\sigma}(B)$-регулярном состоянии;*

(c) *на полюсы $u_1, \dots, u_h$ и $u_1^*, \dots, u_h^*$ схем B и C^* подается произвольная последовательность h-разрядных булевых векторов;*

(d) *на полюсы $x_{n+1}, \dots, x_{n+w}$ схемы C^* подается произвольный фиксированный сильный вектор $\widetilde{e}_w$ для C^*.*

Тогда последовательность значений, реализуемая на выходе схемы $\widehat{\Omega}$ из C^* с α-меткой $(s.*)$, $1 \leqslant s \leqslant t$, совпадает с последовательностью значений, реализуемой на выходе элемента β с номером s из B.

Прежде чем перейти к доказательству леммы 5, сформулируем три утверждения.

Утверждение 3. *Пусть $\widehat{R}$ — подсхема в C^*. Тогда в условиях леммы 5 значения на входе и выходе подсхемы $\widehat{R}$ совпадают.*

В самом деле, в $\widehat{R}$ исправны все элементы с α-метками (ψ) и все схемы K из гирлянд, подвешенных к входам элементов с α-метками (ψ). Так как эти элементы и схемы являются вспомогательными элементами, то они исправны (по условию (a) леммы 5 исправны все внутренние вспомогательные элементы). Так как по условию (d) леммы 5 справедливо $x_{n+l+1} = x_{n+l+2} = 0$, то значения второго входа и выхода любой исправной схемы K одинаковы. В таком случае схема $\widehat{R}$ является самокорректирующейся. Отсюда следует утверждение 3.

Утверждение 4. *В условиях леммы 5 значения на входе и выходе гирлянды, состоящей из схем K без α-меток и подвешенной к входу произвольного элемента δ^* из C^*, одинаковы.*

Для гирлянды, состоящей из исправных схем K, справедливость утверждения 4 очевидна. Схемы K без α-меток являются внутренними вспомогательными элементами. По условию (a) леммы 5 они исправны.

Утверждение 5. *Пусть $\widehat{\Omega}$ — схема с α-меткой $(s.*)$. Если выполнены условия леммы 5, то значение на входе с номером $\mu(\widetilde{\Delta}(\widetilde{e}_w, s))$ схемы $\widehat{\Omega}$ совпадает со значением на выходе схемы $\widehat{\Omega}$.*

Справедливость утверждения прямо следует из определений схемы $\widehat{\Omega}$ и сильного вектора для схемы C^*. При этом мы пользуемся утверждением 4 и предположением из леммы 5 об исправности всех внутренних вспомогательных элементов.

Доказательство леммы 5 проведем индукцией по номерам ярусов, на которые разбивается подмножество элементов схемы C^*.

Ярусы в C^*. Предположим, что входы всех гирлянд, подвешенных к входам произвольного элемента β с α-меткой $(a.j)$ $(1 \leqslant a \leqslant t;$ $1 \leqslant j \leqslant k)$, присоединены к выходам схем $\widehat{R}'$ или к входным полюсам $x_1, \dots, x_{n+l}$. Тогда элемент β принадлежит первому ярусу. Если элемент с α-меткой $(a.j)$ отнесен к первому ярусу, то к этому же ярусу должны быть отнесены и все элементы с α-метками $(a.1), (a.1), \dots, (a.k)$, так как входы этих элементов подключены так же, как соответствующие входы элемента с α-меткой $(a.j)$. Вместе с указанными элементами к первому ярусу относится и схема $\widehat{\Omega}$ с α-меткой $(a.*)$.

Пусть в C^* определены i первых ярусов. Каждый элемент β, не попавший в i первых ярусов и имеющий α-метку $(a.j)$, $1 \leqslant a \leqslant t$; $1 \leqslant j \leqslant k$, или α-метку $(a.*)$, $1 \leqslant a \leqslant t$, отнесем к $(i+1)$-му ярусу, если вход гирлянды, подвешенной к любому входу элемента β, присоединен к одному из следующих элементов схемы:

- к выходу схемы $\widehat{R}'$;
- к одному из входных полюсов $x_1, \dots, x_{n+l}$;
- к выходу элемента из предшествующего яруса.

Базис индукции. Пусть схема $\widehat{\Omega}$ с α-меткой $(s.*)$ находится в первом ярусе схемы C^*. Входы всех гирлянд, подвешенных к входам рассматриваемой схемы $\widehat{\Omega}$, присоединены к выходам элементов из C^* с α-метками $(s.1), (s.2), \dots, (s.k)$ или к выходам схемы $\widehat{\Delta}$. Элементы с α-метками $(s.1), (s.2), \dots, (s.k)$ тоже размещены в C^* в первом ярусе. Поэтому входы подвешенных к их входам гирлянд подключены к выходам схем $\widehat{R}$ или к входным полюсам x_i, $i \in \{1, \dots, n\}$. В условиях леммы 5 можно утверждать, что в схеме C^* исправен элемент β с α-меткой $(s.\mu(\widetilde{\Delta}(\widetilde{e}_w, s)))$. Это следует из определения сильного вектора и утверждений 3 и 4. (Здесь $\mu(\widetilde{e}_w) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{w} e_i 2^{w-i}$; вектор $\widetilde{\Delta}(\widetilde{e}_w, s)$ определен соотношениями (2.5).) Отсюда следует, что в условиях леммы 5 на входы указанного элемента β из C^* и элемента с номером s схемы B поступают одинаковые входные последовательности. Следовательно, найдется σ_β (внутреннее состояние элемента β из C^*) такое, что если β находится в состоянии σ_β, то на выходе элемента β схемы C^* и на выходе элемента с номером s схемы B реализуются одинаковые последовательности значений.

В условиях леммы 5 все схемы $\widehat{\Omega}$ исправны. Поэтому, пользуясь утверждениями 3–5, можно заключить, что если β из C^* находится в состоянии σ_β, то на выходе схемы $\widehat{\Omega}$ с α-меткой $(s.*)$ в схеме C^* и на выходе элемента с номером s в схеме B реализуются одинаковые последовательности значений.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение леммы 5 справедливо для каждой схемы $\widehat{\Omega}$, расположенной в любом из первых i ярусов схемы C^*. Покажем, что тогда оно справедливо и для каждой схемы $\widehat{\Omega}$, расположенной в $(i+1)$-м ярусе. Пусть $\widehat{\Omega}'$ — одна из них, а $(s.*)$ — ее α-метка (рис. 10).

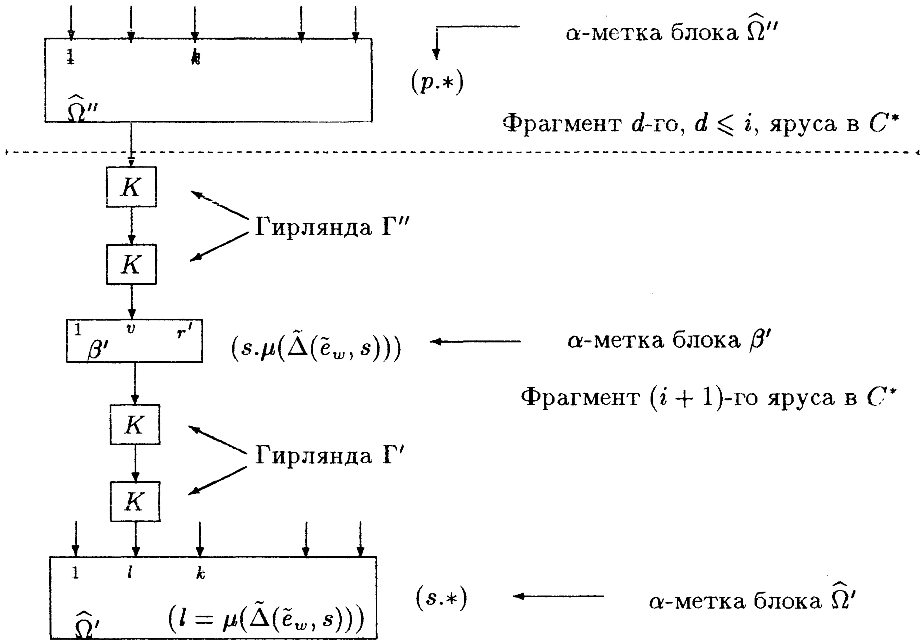


Рис. 10

Рассмотрим элемент схемы C^* с α-меткой $(s.\mu(\widetilde{\Delta}(\widetilde{e}_w, s)))$. Обозначим этот элемент через β'. Он размещен в $(i+1)$-м ярусе схемы C^*. К входу с номером $\mu(\widetilde{\Delta}(\widetilde{e}_w, s))$ схемы $\widehat{\Omega}'$ подключен выход гирлянды Γ', а вход этой гирлянды подключен к выходу элемента β'. Вектор $\widetilde{e}_w$ по условию является сильным для схемы C^*. Поэтому β' — исправный элемент.

Рассмотрим теперь, какие входные последовательности поступают на входы элемента β'. Пусть v — номер произвольного входа элемента β'. Вход гирлянды Γ'', подвешенной к v-му входу, может быть подключен в C^* к выходу некоторой схемы типа $\widehat{\Omega}$ или к выходу схемы $\widehat{R}$.

Рассмотрим первый случай. Обозначим через $\widehat{\Omega}''$ ту схему, к выходу которой подключен вход гирлянды Γ''. Схема $\widehat{\Omega}''$ находится в ярусе, номер которого не больше i. Для $\widehat{\Omega}''$ действует предположение индукции: в условиях леммы 5 на выходе схемы $\widehat{\Omega}''$ реализуется та же последовательность, что и на выходе элемента с номером p в схеме B. Отсюда и из утверждений 3–5 следует, что в условиях леммы 5 на v-м входе элемента β' реализуется та же последовательность, что и на входе элемента с номером s в схеме B.

Мы рассмотрели случай, когда вход гирлянды Γ подключен к выходу схемы типа $\widehat{\Omega}$. В другом случае, т. е. тогда, когда вход этой гирлянды подключен к выходу схемы $\check{R}$, тот же результат получается аналогично (мы опускаем это рассуждение). И в этом случае в условиях леммы 5 на v-м входе элемента β' реализуется та же последовательность, что и на входе элемента с номером s в схеме B.

Так как v — произвольный вход элемента β', то из изложенного выше следует, что в условиях леммы 5 на входы этого элемента поступает та же последовательность векторов, что и на входы элемента с номером s в схеме B. Так как β' — исправный элемент и в начальный момент он был в том же состоянии, что и элемент в B с номером s, то на выходе элемента β' реализуется та же последовательность, что и на выходе элемента в B с номером s. Отсюда и из утверждения 5 следует, что на выходе элемента $\widehat{\Omega}'$ реализуется та же последовательность, что и на выходе элемента с номером s в схеме B.

Лемма 6. *Пусть неисправности схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ принадлежат первому классу и $\widetilde{e}_w$ является сильным вектором для C^*. Тогда для произвольных состояний $\sigma(A^*)$ и $\sigma(B)$ подсхем A^* и B схемы $S(A^*, B, \widetilde{x}_n)$ найдется состояние $\sigma(C^*)$ схемы C^* такое, что для любой последовательности $\vec{\mathscr{P}}$ n-разрядных булевых векторов выполняется равенство*

$$S_a(A^*, B, \sigma(A^*), \sigma(B), \vec{\mathscr{P}}) = S_a(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{\mathscr{P}} \odot \widetilde{e}_w).$$

Доказательство. Входные полюсы подсхемы A^* в $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ присоединены только к внешним полюсам и к выходам элементов $\widehat{\Omega}$ схемы C^*. Отсюда и из леммы 5 следует, что в условиях леммы 6 на выходных полюсах подсхемы A^* из $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ и на соответствующих полюсах схемы A^* из $S(A^*, B, \widetilde{x}_n)$ реализуются одинаковые последовательности значений. Если β^* является элементом схемы C^*, выход которого есть выходной полюс схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$, то выход элемента β^* является выходом некоторой схемы $\widehat{\Omega}$. Из леммы 5 следует, что на выходе этого элемента и на соответствующем выходном полюсе в $S(A^*, B, \widetilde{x}_n)$ реализуются одинаковые последовательности значений. Отсюда следует утверждение леммы 6.

Лемма 7. *Для любых состояний $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ подсхем A и B схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ найдется такое состояние $\sigma(C)$ схемы C, что для любой последовательности $\vec{\mathscr{P}}$, состоящей из n-разрядных булевых векторов, справедливо равенство*

$$S_a(A, B, \sigma(A), \sigma(B), \vec{\mathscr{P}}) = S_a(A, C, \sigma(A), \sigma(C), \vec{\mathscr{P}} \odot \widetilde{0}_w).$$

Эта лемма является очевидным следствием леммы 6.

Лемма 8. *Для того чтобы неисправности в схеме $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ принадлежали первому классу, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия:*

(u-1) *для любого $d \in \{1, \ldots, t\}$ найдется $j \in \{1, \ldots, k\}$ такое, что схема $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ является $\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной относительно элементов с α-метками $(d.j)$, $(d.j.K)$, $(d.j.K.K)$;*

(u-2) *схема $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ является $\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной схемой относительно любого внутреннего вспомогательного элемента.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть выполнены условия (u-1), (u-2) леммы 8. Тогда справедливы следующие утверждения:

a) если выполнено условие (u-1), то, очевидно, выполняется условие (s-1) из определения первого класса неисправностей;

b) из условия (u-2) и леммы 8 непосредственно следует, что в C^* исправны все внутренние вспомогательные элементы, т. е. выполняется условие (s-2);

c) так как к выходам элементов с α-метками $(d.j.K.K)$ подключены входы вспомогательных элементов β, имеющих одновременно α-метки (ω) и γ-метки вида $(\varphi_i.K.*)$, то условие, состоящее в том, что $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ является $\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной схемой относительно β, означает, что схема $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ должна быть $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$-совершенной относительно элементов с α-метками $(d.j.K.K)$, т. е. должно выполняться условие (s-3);

d) свойство схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ быть $\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной относительно элементов с γ-метками $(K.Q.i)$, $i \in \{1, \ldots, r\}$, означает, что схема $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ должна быть $\vec{\mathscr{Q}}_{11}\vec{\mathscr{Q}}_{01}$-совершенной относительно блоков Q, т. е. справедливо условие (s-4).

Таким образом, при условиях (u-1) и (u-2) выполняются условия (s-1)–(s-4), что означает принадлежность неисправностей в $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ первому классу.

Необходимость. Предположим, что неисправности в $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ принадлежат первому классу, т. е. выполнены условия (s-1)–(s-4). Докажем, что тогда выполняются условия (u-1) и (u-2).

Пусть d — произвольное число из $\{1, \ldots, t\}$. Из условия (s-1) следует, что найдется $j \in \{1, \ldots, k\}$ такое, что $(d.j) \notin C^*(1)$. Это означает, что блоки в C^* с α-метками $(d.j), (d.j.K), (d.j.K.K)$ исправны. Покажем, что в окрестностях этих блоков содержатся только исправные элементы.

Во-первых, окрестность блока с α-меткой $(d.j.K.K)$ состоит из этого блока и блока с α-меткой $(d.j.K)$. Оба эти блока исправны.

Во-вторых, в окрестность блока с α-меткой $(d.j.K)$ входит он сам, блок β с α-меткой $(d.j)$, а также $p(d)$ блоков K, принадлежащих гирляндам, подвешенным к входам блока с α-меткой $(d.j)$ (здесь $p(d)$ — число входов блока с α-меткой $(d.j)$). Указанные $p(d)$ блоков K не имеют α-меток. Блоки без α-меток относятся к внутренним вспомогательным элементам и при условии (s-2) являются исправными. Число j выбрано таким, что блоки с α-метками $(d.j)$ и $(d.j.K)$ исправны. Таким образом, в окрестности блока с α-меткой $(d.j.K)$ все блоки исправны.

В-третьих, окрестность блока с α-меткой $(d.j)$ содержится в окрестности блока с α-меткой $(d.j.K)$. Выше показано, что последняя окрестность состоит только из исправных блоков.

Из сказанного и леммы 3 следует, что схема $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ является $\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной относительно элементов с α-метками $(d.j), (d.j.K)$ и $(d.j.K.K)$, т. е. выполняется условие (u-1).

Пусть блок β является внутренним вспомогательным элементом. Рассмотрим случаи (i), (ii) и (iii), различающиеся окрестностями элемента β.

(i) Если окрестность блока β состоит только из внутренних вспомогательных элементов, то они исправны согласно условию (s-2). Пользуясь леммой 3, получаем, что схема $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ является $\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной относительно β.

(ii) Если блок β является внутренним вспомогательным элементом, в окрестности которого есть вспомогательный элемент, не являющийся внутренним, то β является либо элементом с α-меткой (ω), либо схемой K, в окрестности которой находится схема Q. Если β является блоком с α-меткой (ω), то β — один из базисных элементов. В обоих рассматриваемых случаях β является тривиальным элементом. Пусть β — элемент φ_i с $p(i)$ входами. В окрестность блока β входит он сам, $p_2(i)$ блоков K без α-меток и $p_1(i)$ блоков K с α-метками вида $(s.j.K.K)$, где s — некоторое число из $\{1, \dots, t\}$, а j принимает $p_1(i)$ значений из $\{1, \dots, k\}$. При этом должно выполняться равенство $p_1(i) + p_2(i) = p(i)$ ($p_2(i)$ может быть равно 0). Пусть $(K.K.j_1), (K.K.j_2), \dots, (K.K.j_{p_1(i)})$ — совокупность всех γ-меток, приписанных этим элементам. Рассмотрим последовательность векторов, появляющиеся на входах блока β, когда на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ последовательно подаются векторы из $\vec{\mathscr{Q}}$. Проследим за той частью последовательности, которая появляется при поступлении на входы схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ подпоследовательности $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$. Если при подаче последовательности $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$ на входы схемы

$S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ в некоторый момент появляется вектор $(a_1, \dots, a_{n+w})$ из $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$, то на выходе ее блока с γ-меткой $(K.K.j_v)$, $v = 1, \dots, p_1(i)$, реализуется значение a_{j_v} независимо от того, в каком начальном состоянии находилась схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ перед тем, как на нее стали подаваться векторы из $\vec{\mathscr{Q}}$. Из условия (s-3) следует, что реакция блоков схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ с α-меткой $(s.j_v.K.K)$, $1 \leqslant v \leqslant p_1(i)$, на последовательность $\vec{\mathscr{Q}}$ является $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$-канонической. Таким образом, если на входы схем $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ и $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ подается вектор $\widetilde{a}_{n+w}$ из $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$, то в обеих схемах на входах блока β появляются одинаковые векторы. Если при этом на выходах блоков β в $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ и $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ значения различаются, то в $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ блок β является неисправным. Блок β — внутренний вспомогательный, тривиальный элемент схемы. По условию (s-2) он исправен. Значит, при рассматриваемых условиях при подаче подпоследовательности $\vec{\mathscr{Q}}_{10}$ на входы схем $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ и $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ на выходах всех элементов из окрестностей элементов β^* будут те же, что и на выходах соответствующих элементов из окрестности β^*. Так как $\vec{\mathscr{Q}}(\varphi_i, K, *) = \vec{\mathscr{Q}}_{10}$, то из сказанного следует, что $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ является $\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной схемой относительно β.

(iii) Почти те же рассуждения можно привести в случае, когда в окрестность блока β входит блок Q. Здесь используется условие (s-4). Мы опускаем эти рассуждения.

Таким образом, при выполнении условий (s-1)–(s-4) схема $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+w})$ является $\vec{\mathscr{Q}}$-совершенной относительно любого внутреннего вспомогательного элемента, т. е. выполняется условие (u-2) леммы 8.

Замечание 3. Леммы 3, 8 и 1 вместе с замечанием 1 дают, очевидно, правила, позволяющие с использованием лишь последовательности $S_b(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{\mathscr{Q}})$ выяснить, к какому из двух классов принадлежат неисправности, возникшие в схеме, и указать сильный вектор $\widetilde{e}_w$ для схемы C^*.

Заключение

Убедимся в том, что определенная в § 4 схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+w})$ обладает свойствами, перечисленными в формулировке теоремы.

Пусть в качестве последовательности $\vec{\mathscr{Q}}$ выбрана последовательность длины $\lceil 6 \cdot 4^{r\xi+1} \xi^2 \ln(2\xi) \rceil$, определенная равенством (5.1). Согласно утверждению 2 такая последовательность существует. Тогда

— утверждение (a) теоремы следует из соотношения (4.3);

— утверждение (b) совпадает с леммой 7;

— утверждение (c) непосредственно следует из лемм 6, 8 и замечания 3.

Таким образом, все утверждения теоремы доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гилл А.** Введение в теорию конечных автоматов. М.: Наука, 1966.
2. **Горяшко А. П.** Синтез диагностируемых схем вычислительных устройств. М.: Наука, 1987.
3. **Носков В. Н.** Метод синтеза удобных для контроля комбинационных схем // Дискрет. математика. 1993. Т. 5, вып. 4. С. 3–23.
4. **Носков В. Н.** Преобразование схем из функциональных элементов к виду, удобному для контроля // Дискрет. анализ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1994. С. 142–165. (Тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 27).
5. **Носков В. Н.** Диагностика частей схем из функциональных элементов // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 3. С. 60–96.
6. **Носков В. Н.** О преобразованиях комбинационных схем, повышающих надежность их частей // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 2. С. 33–61.
7. **Носков В. Н.** О восстановлении правильной работы неисправных частей комбинационных схем // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1997. Т. 4, № 4. С. 47–74.
8. **Носков В. Н.** Диагностика частей схем в автоматных базисах // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 1. С. 44–64.
9. **Редькин Н. П.** О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискрет. математика. 1989. Т. 1, вып. 3. С. 71–76.
10. **Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М.** Конечные автоматы (поведение и синтез). М.: Наука, 1970.
11. **Шевченко В. И.** О синтезе самокорректирующихся схем с малой трудоемкостью тестирования // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1985. С. 133–143.
12. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
13. **Reddy S. M.** Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. 1972. V. 21, N 1. P. 124–141.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: noskov@math.nsc.ru

Статья поступила
6 мая 1999 г.