ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1999. Серия 1. Том 6, № 3, 42–70

УДК 519.7

МОДЕЛИРОВАНИЕ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИНАМИ ТЬЮРИНГА*)

А. В. Чашкин

Рассматривается моделирование схем из функциональных элементов универсальными многоленточными машинами Тьюринга. Информация о моделируемой схеме записана на одной из лент машины. Показано, что время моделирования произвольной схемы S, состоящей из $L(S)$ элементов, на двухленточной универсальной машине Тьюринга при достаточно большом $L(S)$ не превосходит величины $L(S)^{1+\mathcal{O}\left(1/\sqrt{\log_2 L(S)}\right)}$.

Введение

В течение длительного времени изучения вычислительных процессов многими авторами было введено большое число различных моделей вычислительных машин. Одни модели — машины Тьюринга, Колмогорова, алгоритмы Маркова — отражают самые общие стороны различных вычислений, другие модели — схемы их функциональных элементов, контактные схемы, машины с произвольным доступом к памяти, связаны с конкретными вычислительными устройствами. Одни модели ориентированы на изучение вычисления сложности функций с конечной областью определения — схемы их функциональных элементов, контактные схемы, другие, например одноленточные машины Тьюринга, используются в основном для получения качественных результатов о сложности вычислимых функций. При этом в большинстве случаев одной из основных мер сложности является время работы — число шагов алгоритма, решающего какую-либо задачу при помощи соответствующей вычислительной модели.

Значительный интерес представляет задача сравнения вычислительной мощности различных моделей вычислений. Если удается показать, что две вычислительные модели затрачивают на решение

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01068) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 1997 г. № 473).

одинаковых задач примерно одно и то же число шагов, то результаты, полученные в рамках одной модели, автоматически переносятся на другую. Простой и красивый пример пары таких моделей доставляют машины с равнодоступной памятью и машины с равнодоступной памятью и хранимой программой (см. [1]). Этот результат показывает, что возможность изменения программы не приводит к заметному сокращению времени вычислений. В случае, когда удается показать, что две вычислительные модели затрачивают на решение одинаковых задач существенно разное число шагов, как, например, одноленточные и двухленточные машины Тьюринга, мы получаем информацию о том, как те или иные конкретные особенности вычислительных систем влияют на время решения задач.

Для многих пар вычислительных моделей рассматриваемая задача давно решена. Известны достаточно точные оценки времени моделирования многоленточными машинами Тьюринга машин Тьюринга с памятью другого типа (многомерные блоки памяти) [8, 10], многоленточных машин двухленточными [7], ряд других результатов о моделировании одних машин Тьюринга другими. Оценки сложности схем, моделирующих работу машины Тьюринга, найдены в [11]. Связь длины программ универсальных машин Тьюринга и схемной сложности подробно рассматривается в [6]. Здесь под универсальной машиной Тьюринга понимается машина, способная моделировать, при подходящей программе, работу произвольной машины Тьюринга. Определения и результаты, связанные с существованием и функционированием универсальных машин Тьюринга, можно найти в [4, 6].

В то же время неизвестно удовлетворительное решение задачи о соотношении времен, затрачиваемых на решение одинаковых задач многоленточными машинами Тьюринга и машинами с произвольным доступом к памяти. Известно (см., например, [1]), что эти времена полиномиально связаны. Аналогичные результаты известны и о моделировании схем из функциональных элементов универсальными машинами Тьюринга [1] — время работы машины Тьюринга, моделирующей схему сложности L, с точностью до порядка не превосходит $L^2 \log_2^3 L$. Однако между теоретически близкими величинами L и L^2 на практике может пролегать граница, отделяющая практически разрешимые и неразрешимые задачи. Поэтому значительный интерес представляет задача о времени моделирования схем из функциональных элементов машинами Тьюринга. Так как схемы из функциональных элементов реализуют функции с конечной областью определения, то представляется естественным рассматривать именно универсальные машины Тьюринга.

В настоящей работе устанавливаются значительно более точные, чем известные ранее, оценки времени моделирования схем из функциональных элементов универсальными двухленточными машинами Тьюринга.

Понятия, используемые без определений, можно найти в [1, 4, 6].

§ 1. Основной результат

В этом параграфе введем ряд необходимых понятий, сформулируем основной результат работы и представим схему его доказательства.

Под схемой из функциональных элементов понимается схема в базисе из всех двухместных булевых функций. Сложностью $L(S)$ схемы S называется сумма числа ее функциональных элементов и числа ее входов.*) Значение, вычисляемое схемой S на двоичном наборе X, обозначим через $S(X)$.

Кратко опишем используемые в работе машины Тьюринга.

Пусть k — фиксированное целое, $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_k$ — конечные множества, содержащие символ $\square$. Под машиной Тьюринга $\mathbf{M}$ будем понимать конечный автомат $\mathbf{A}$ с k односторонними лентами $A_1, \ldots, A_k$, состоящими из ячеек, пронумерованных слева направо натуральными числами. В каждый момент времени

- каждая ячейка j-й ленты, $1 \leqslant j \leqslant k$, содержит некоторый элемент из $\mathscr{A}_j$, причем только конечное число ячеек содержат символы, отличные от $\square$.

В каждый момент времени автомат $\mathbf{A}$

- имеет доступ к одной ячейке каждой ленты;
- может изменить содержимое этих ячеек;
- может изменить свое внутреннее состояние;
- может сдвинуть каждую из лент на одну ячейку либо вправо, либо влево;
- может прекратить работу.

Множество лент разобьем на два подмножества $\mathbf{P} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ и $\mathbf{X} = \{A_{m+1}, \ldots, A_k\}$. Ленты из первого множества назовем *программными лентами,* ленты из второго множествами — *рабочими лентами.* Содержимое P программных лент в начальный момент времени назовем *программой* машины $\mathbf{M}$,**) содержимое X рабочих лент — *входом* машины $\mathbf{M}$. Множество $\mathscr{A} = (\mathscr{A}_1 \times \cdots \times \mathscr{A}_k)$ назовем *алфавитом* машины $\mathbf{M}$.

*) Обычно число входов не включают в сложность схемы.

**) Отметим, что используемое в настоящей работе понятие программы машины Тьюринга отличается от общепринятого.

Результатом работы машины $\mathbf{M}$ с программой P и входом X назовем содержимое первой рабочей ленты после прекращения работы и обозначим через $\mathbf{M}(P,X)$. Будем говорить, что машина Тьюринга $\mathbf{M}$ с программой P моделирует схему S, если $\mathbf{M}(P,X) = S(X)$ при всех $X \in \{0,1\}^n$.

Из [7] следует, что вычисления, выполняемые описанной выше машиной Тьюринга за T шагов, могут быть выполнены двухленточной универсальной машиной Тьюринга (см. [4, 6]) за $\mathcal{O}(T\log_2 T)$ шагов. Поэтому основной результат работы сформулируем для двухленточной универсальной машины Тьюринга.

Теорема. *Пусть S — произвольная схема из функциональных элементов. Тогда для любой универсальной машины Тьюринга $\mathbf{M}$ с двумя лентами найдется такая программа $P(S)$, что $\mathbf{M}(P)$ моделирует работу схемы S и время работы $T(P)$ этой машины на программе P при $L(S) \to \infty$ удовлетворяет неравенству*

$$T(P) \leqslant L(S)^{1+\mathcal{O}\left(1/\sqrt{\log_2 L(S)}\right)}.$$

Опишем основные этапы доказательства теоремы. Сначала схема S некоторым специальным образом вкладывается в многомерное пространство — схема реализуется на вершинах прямоугольной решетки в $\mathbf{R}^m$. Элементы и входы схемы помещаются в вершины решетки, ребра схемы реализуются ломаными, проходящими по ребрам решетки. Реализация является обобщением трехмерной конструкции из [2] и описывается в § 2.

Далее на графе, реализованном на вершинах решетки, определяется игра в камни. Игра в камни моделирует процесс вычисления функции схемой из функциональных элементов и заключается в последовательной постановке камней в вершины графа. Игры в камни на графах неоднократно использовались для изучения различных аспектов схемных вычислений (см., например, [5]). Особенностью игры, используемой в доказательстве теоремы, является то, что обход вершин графа производится не по его ребрам, а по ребрам решетки. Игра в камни описана в § 3, 4. В этих параграфах установлены различные свойства игры. В частности, найдено время игры, т. е. число шагов, за которое камень будет положен в последнюю вершину графа.

В § 6 игра на решетке моделируется игрой на двух последовательностях. Если описанная в предыдущих параграфах игра в камни на графе отражает некоторые особенности вычислений при помощи схем из функциональных элементов, то игра в камни на последовательностях является моделью для вычислений, проводимых на машине Тьюринга. Доказанное в § 6 утверждение об определенном соответствии между двумя играми позволяет перенести на новую игру результаты о времени игры. В § 7 на основе игры в камни на последовательностях определяется процедура вычисления булевых функций на последовательностях. Введенные вычисления во многом аналогичны вычислениям на многоленточной машине Тьюринга, а время их работы оценивается через время игры в камни на последовательностях.

Наконец, в § 8 описывается четырехленточная машина Тьюринга, выполняющая те же действия, что и вычисления из предыдущего параграфа. Окончательный результат работы получается применением результата о моделировании многоленточных машин Тьюринга на двухленточных [7].

§ 2. Многомерные реализации графов

Множество $H_{m,n} = \{u = (u_0, \ldots, u_m) \mid u_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}\}$ назовем *целочисленной* $(m+1)$*-мерной решеткой* с длиной стороны n. Элементы решетки назовем *вершинами*. Для $x, y \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ введем функцию

$$\operatorname{sgn}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Пусть $u = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ принадлежат решетке $H_{m,n}$. Положим

$$d(u, v) = \sum_{j=0}^{m} \operatorname{sgn}(u_j, v_j).$$

Упорядоченную пару (u, v) вершин решетки $H_{m,n}$ такую, что $d(u, v) = 1$, назовем *простым ребром* этой решетки. Пусть $k \geqslant 2$ и $\{u_i\}_{i=1}^{k}$ — последовательность таких вершин решетки $H_{m,n}$, что $d(u_i, u_{i+1}) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Последовательность простых ребер $\{(u_i, u_{i+1})\}_{i=1}^{k-1}$ назовем *составным ребром,* соединяющим вершины u_1 и u_k. Составное ребро, соединяющее вершины u и v, будем обозначать через (u, v).

Пусть $0 \leqslant i \leqslant m$. Вершины u и v назовем i*-соседними*, если $u_j = v_j$ при всех $j \neq i$. Простое ребро (u, v) решетки $H_{m,n}$ назовем i*-ребром*, если вершины u, v являются i-соседними. Величину $|u_i - v_i|$ назовем *длиной* i*-ребра* (u, v). Вершины u, v назовем *непосредственными соседями*, если они i-соседние и $|u_i - v_i| = 1$.

Пусть $V = \{v_1, u_1, \ldots, v_s, u_s\}$ — множество вершин, $W = \{(v_1, u_1), \ldots, (v_s, u_s)\}$ — паросочетание вершин из V, т. е. множество упорядоченных пар вершин из V, в котором каждая вершина входит не более чем в одну пару. Граф $G = (V, W)$ назовем *ориентированным графом паросочетания* множества V.

Пусть $V \in H_{m,n}$, $V = \{v_1, u_1, \ldots, v_s, u_s\}$ и $W = \{(v_1, u_1), \ldots, (v_s, u_s)\}$ — паросочетание множества вершин V. Вершины v_i, u_i назовем *смежными.*

Паросочетание W назовем *k-паросочетанием*, если вершины v_i, u_j не являются k-соседними при $1 \leqslant i \neq j \leqslant s$.

Подмножество $H_{m,n}(i,\alpha)$ вершин решетки $H_{m,n}$ вида

$$H_{m,n}(i,\alpha) = \{u = (u_0, u_1, \ldots, u_m) \mid u \in H_{m,n}, u_i = \alpha\}$$

назовем ее *m-мерной подрешеткой.*

Пусть $u, v \in H_{m,n}$ такие, что $u = (u_0, u_1, \ldots, u_m)$, $v = (v_0, v_1, \ldots, v_m)$, $u_0 = v_0, u_1 = v_1, \ldots, u_{k-1} = v_{k-1}, u_k > v_k$. Ребро (v, u) назовем *стандартным*, если оно имеет вид

$$(v,u) = h_1^m h_2^{m-1} \ldots h_{m-k}^{k+1} h_{m-k+1}^k h_{m-k+2}^{k+1} \ldots h_{2m-2k}^{m-1} h_{2m-2k+1}^m,$$

где h_j^i — простое i-ребро, возможно, имеющее нулевую длину.

Лемма 1. *Пусть $V = \{v_1, u_1, \ldots, v_s, u_s\}$ — такое множество вершин решетки $H_{m,2n}$, что все координаты вершин v_i, u_j — четные, $1 \leqslant i, j \leqslant s$, а $W = \{(v_1, u_1), \ldots, (v_s, u_s)\}$ — m-паросочетание множества V. Тогда смежные вершины v_i, u_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, можно связать стандартными ребрами h_i так, что никакие два ребра h_i, h_j, $1 \leqslant i \neq j \leqslant s$, не проходят через одно и то же простое ребро решетки $H_{m,2n}$.*

Доказательство проведем индукцией по m. Пусть $m = 1$, n — положительное. Рассмотрим решетку $H_{1,2n}$ и ее произвольное 1-паросочетание R, удовлетворяющее условиям леммы. Пусть смежные вершины v_i, u_i имеют координаты $v_i = ((v_i)_0, (v_i)_1), u_i = ((u_i)_0, (u_i)_1)$. Без ограничения общности полагаем, что у первых s' пар смежных вершин последние координаты различны, т. е. $(v_i)_1 \neq (u_i)_1$. Так как между нулем и числом $2n$ лежит $n+1$ четное число, включая 0 и $2n$, то из определения 1-паросочетания и принадлежности всех вершин v_i, u_j решетке $H_{1,2n}$ следует неравенство $s + s' \leqslant n + 1$. Вершины v_i, u_i, $1 \leqslant i \leqslant s'$, решетки $H_{1,2n}$ свяжем стандартным ребром (v_i, u_i), проходящим через вершины

$$v_i = ((v_i)_0, (v_i)_1),\ ((v_i)_0, i)),\ ((u_i)_0, i)),\ u_i = ((u_i)_0, (u_i)_1).$$

Остальные пары смежных вершин свяжем простыми 1-ребрами. Так как $s + s' \leqslant n + 1$, то ребра (v_i, u_i) и (v_j, u_j) не имеют общих простых ребер при $i \neq j$. Таким образом, при $m = 1$ лемма доказана.

Предположим, что утверждение леммы справедливо при $m - 1$. Тогда если все координаты вершин v_i, u_i, $1 \leqslant i \leqslant q$, произвольного $(m-1)$-паросочетания множества вершин V решетки $H_{m-1,2n}$ являются четными числами, то в силу предположения смежные вершины v_i, u_i можно связать стандартными ребрами h_i так, что

(a) никакие два ребра h_i, h_j, $1 \leqslant i \neq j \leqslant q$, не проходят через одно и то же простое ребро решетки $H_{m-1,2n}$;

(b) если вершины $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})$, $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{m-1})$ такие, что $u_0 = v_0, u_1 = v_1, \ldots, u_{k-1} = v_{k-1}, u_k > v_k$, то каждое ребро $h = (v, u)$*) имеет вид

$$h = h_2^{m-1} \ldots h_{m-k}^{k+1} h_{m-k+1}^{k} h_{m-k+2}^{k+1} \ldots h_{2m-2k}^{m-1},$$

где h_j^i — простое i-ребро.

Рассмотрим решетку $H_{m,2n}$ и произвольное m-паросочетание R ее вершин, у которых все координаты — четные числа.

Множество вершин R разобьем на $2n{+}1$ подмножеств $D_t = \{v_{j_i}, u_{j_i}\}_{i=1}^{q_t}$, $t = 0, 1, \ldots, 2n$, так, что

- смежные вершины принадлежат одному и тому же множеству D_t;
- каждое множество D_t не содержит $(m-1)$-соседние вершины, отличные от смежных.

Требуемые множества D_t легко строятся индуктивно. Пусть на первом шаге все множества D_t пустые. Первую пару смежных вершин поместим в D_0. Предположим, что $l-1$ пар смежных вершин размещены по множествам $D_0, \ldots, D_{2n}$. Из определения множества R следует, что l-я пара вершин (v_l, u_l) имеет не более $2n$ различных пар $(m-1)$-соседних вершин. Следовательно, среди $2n+1$ множеств $D_0, \ldots, D_{2n}$ найдется такое множество D_i, которое не содержит ни одной вершины, являющейся $(m-1)$-соседней с вершинами v_l и u_l. Таким образом, l-я пара вершин (v_l, u_l) помещается в D_i. Требуемые множества построены.

Для каждой вершины $r = (r_0, r_1, \ldots, r_m)$ из D_t, $t = 0, 1, \ldots, 2n$, введем вспомогательную вершину $r^m = (r_0^m, r_1^m, \ldots, r_m^m)$ такую, что

$$r_i = r_i^m \quad \text{при} \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1 \quad \text{и} \quad r_m^m = t.$$

Вершины r и r^m соединим простым m-ребром.

Рассмотрим новое множество $D_t = \{v_{t_i}^m, u_{t_i}^m\}_{i=1}^{q_t}$. Все вершины множества D_t лежат в m-мерной подрешетке $H_{m,2n}(m,t)$ решетки $H_{m,2n}$, среди них нет ни одной пары $(m-1)$-соседних вершин, отличных от смежных, и первые $m-1$ координат каждой вершины являются четными числами. Поэтому можно воспользоваться предположением индукции. В силу этого предположения (см. (a) и (b)) смежные вершины каждого множества $D_t = \{v_{t_i}^m, u_{t_i}^m\}_{i=1}^{q_t}$ можно связать стандартными ребрами h_{t_i} так, что

- никакие два ребра h_{t_i}, h_{t_j}, $1 \leqslant i \neq j \leqslant q_t$, не проходят через одно и то же простое ребро подрешетки $H_{m,2n}(m,t)$;

*) Здесь для того, чтобы не перегружать обозначения, у вершин v_i, u_i опущены индексы.

- если вершины $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})$, $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{m-1})$ такие, что $u_0 = v_0, u_1 = v_1, \ldots, u_{k-1} = v_{k-1}, u_k > v_k$, то каждое ребро $h_t = (v, u)$ имеет вид
$$h_t = h_2^{m-1} \ldots h_{m-k}^{k+1} h_{m-k+1}^{k} h_{m-k+2}^{k+1} \ldots h_{2m-2k}^{m-1},$$
где h_j^i — простое i-ребро.

Положим $h_1^m = (u, u^m)$, $h_{2m-2k+1}^m = (v^m, v)$. Тогда ребро, связывающее смежные вершины v и u, имеет вид
$$h = h_1^m h_2^{m-1} \ldots h_{m-k}^{k+1} h_{m-k+1}^{k} h_{m-k+2}^{k+1} \ldots h_{2m-2k}^{m-1} h_{2m-2k+1}^{m},$$
т. е. является стандартным. Легко видеть, что построенные ребра h_t, связывающие вершины из разных множеств D_t, $0 \leqslant t \leqslant 2n$, не имеют общих вершин. Следовательно, никакие два ребра h_i, h_j, $1 \leqslant i \neq j \leqslant s$, связывающие пары смежных вершин v_i, u_i и v_j, u_j, не проходят через одно и то же простое ребро решетки $H_{m,2n}$. Лемма 1 доказана.

Простое i-ребро (v, u) назовем *положительно направленным*, если $u_i > v_i$.

Пусть $u, v \in H_{n,m}$ такие вершины, что $u = (u_0, u_1, \ldots, u_m)$, $v = (v_0, v_1, \ldots, v_m)$, $u_0 = v_0, u_1 = v_1, \ldots, u_{k-1} = v_{k-1}, u_k > v_k$. Ребро (v, u) назовем *функциональным*, если оно имеет вид
$$(v, u) = h_1^m h_2^{m-1} \ldots h_{m-k}^{k+1} h_{m-k+1}^{k} h_{m-k+2}^{k+1} \ldots h_{2m-2k}^{m-1} h_{2m-2k+1}^{m} h_{2m-2k+2}^{k},$$
где h_j^i — простые i-ребра, $h_{2m-2k+2}^k$ — k-простое положительно направленное ребро ненулевой длины.

Из леммы 1 легко извлекается следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $V = \{v_1, u_1, \ldots, v_s, u_s\}$ — такое множество вершин решетки $H_{m,4n}$, что все координаты вершин v_i, u_j — числа, кратные четырем, $1 \leqslant i, j \leqslant s$, а m-я координата вершин v_i и u_j равна нулю. Тогда вершины v_i и u_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, можно связать функциональными ребрами h_i так, что*

(i) никакие два ребра h_i, h_j, $1 \leqslant i \neq j \leqslant s$, не проходят через одно и то же простое ребро решетки $H_{m,4n}$;

(ii) ребро $h_i = (v_i, u_i)$ не проходит через вершину v_j (вершину u_j) при $i \neq j$.

Доказательство. Ниже смежные вершины паросочетания обозначаем разными буквами с одинаковыми индексами. Пусть $V = \{v_1, u_1, \ldots, v_s, u_s\}$ — множество смежных вершин, удовлетворяющее условиям леммы, т. е. все координаты вершин v_i, u_j кратны четырем, $1 \leqslant i, j \leqslant s$, а m-я координата каждой вершины равна нулю. На решетке $H_{m,4n}$ введем множество смежных вершин $V' = \{v_1', u_1', \ldots, v_s', u_s'\}$ так, что

- t-я координата вершины v_i', $1 \leqslant i \leqslant s$, множества V', $t \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, совпадает с соответствующей координатой вершины v_i множества V;
- пусть смежные вершины $v, u \in V$ такие, что $u = (u_0, u_1, \ldots, u_m)$, $v = (v_0, v_1, \ldots, v_m)$, $u_0 = v_0, u_1 = v_1, \ldots, u_{k-1} = v_{k-1}, u_k > v_k$. Тогда
$$u' = (u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k - 2, u_{k+1}, \ldots u_m);$$
- m-я координата вершины v_i' (вершины u_j'), $1 \leqslant i, j \leqslant s$, множества V' равна двум.

В силу леммы 1 смежные вершины паросочетания множества вершин $V' = \{v_1', u_1', \ldots, v_s', u_s'\}$ свяжем стандартными ребрами (v_i', u_i') так, что эти ребра будут проходить только через такие вершины решетки $H_{m,4n}$, m-я координата которых больше двух. Для этого достаточно конструкцию из леммы 1 сдвинуть по m-му направлению на две единицы. Так как $4n \geqslant 2n + 2$, то сделать это можно. Введем вершины u_i'', $1 \leqslant i \leqslant s$, такие, что

- t-я координата вершины u_i'', $t \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, совпадает с соответствующей координатой вершины u_i', а m-я координата равна нулю.

Считая пару последовательных m-ребер одним m-ребром, легко видеть, что все ребра
$$h_i = (v_i, u_i) = (v_i, v_i')(v_i', u_i')(u_i', u_i'')(u_i'', u_i)$$
являются функциональными; никакие два ребра h_i, h_j, $1 \leqslant i \neq j \leqslant s$, не проходят через одно и то же простое ребро решетки $H_{m,4n}$; ребро $h_i = (v_i, u_i)$ не проходит через вершину v_j (вершину u_j) при $i \neq j$. Лемма 2 доказана.

Заметим, что из условий леммы 2 следует, что число вершин в множестве V не превосходит $(n+1)^m$.

Под $(3, n)$-сетью будем понимать такой ориентированный граф с n вершинами и без ориентированных циклов, что

- степень каждой вершины не превосходит трех;
- каждая вершина v, имеющая нулевую входную степень, помечена натуральным числом $l(v)$, причем разные вершины помечены разными числами.

Рассмотрим $(3, n)$-сеть G. На множестве ее вершин индуктивно определим частичный порядок $\leqslant$. Будем говорить, что $v \leqslant u$, если выполняется одно из следующих условий:

- существует ребро (v, u);
- существует вершина u', для которой $v \leqslant u'$, и существует ребро (u', u).

Каждой вершине u графа G присвоим такой номер $\widehat{N}(u)$, что

- сохраняется упомянутый выше частичный порядок;
- номер вершины, помеченной числом $l(u)$, больше номера вершины, помеченной числом $l(v)$ при $l(u) > l(v)$.

Пусть $u \in H_{m,n}$. Вершине u поставим в соответствие ее номер $N(u)$ следующим образом:

$$N(u) = \sum_{i=0}^{m} u_i(n+1)^{m-i}.$$

В $(n+1)$-ичной системе счисления число $N(u)$ является $(m+1)$-разрядным числом, разряды которого совпадают с соответствующими координатами вершины u.

Пусть $V \subseteq H_{m,n}$ и $W = \{(u,v) \mid u,v \in V\}$ — некоторое множество попарно различных ребер. Пару $G = (V,W)$ назовем (m,n,k)-графом, если никакие $k+1$ ребер в G не имеют общего простого ребра.

Пусть $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{W})$ — граф и $G = (V,W)$ — (m,n,k)-граф. Будем говорить, что G реализует граф $\widehat{G}$, если существует такое взаимнооднозначное отображение $f : \widehat{V} \to V$, что $(u,v) \in \widehat{W} \Longleftrightarrow (f(u), f(v)) \in W$.

Лемма 3. *Пусть множество вершин $\widetilde{V} = \{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_s\}$ решетки $H_{m,4n}$ такое, что все координаты вершин $\tilde{v}_i$ кратны четырем, $1 \leqslant i \leqslant s$, а m-я координата каждой вершины $\tilde{v}_i \in \widetilde{V}$ равна нулю. Тогда произвольный граф $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{W})$, $|\widehat{V}| = s$, являющийся $(3,s)$-сетью, может быть реализован некоторым $(m,4n,4)$-графом $G = (V,W)$ так, что*

(i) $V = \widetilde{V}$;

(ii) $N(v_i) > N(v_j)$, если $\widehat{N}(\hat{v}_i) > \widehat{N}(\hat{v}_j)$;

(iii) ребро $h_i = (v_i, u_i)$ графа G не проходит через вершину v_j (вершину u_j) графа G при $i \neq j$;

(iv) каждое составное ребро графа G является функциональным.

Доказательство. Граф $\widehat{G}$ представим в виде объединения четырех графов паросочетаний множества $\widehat{V}$, $\widehat{G} = \bigcup\limits_{i=1}^{4} \widehat{G}_i$. Возможность такого представления очевидным образом следует из теоремы Визинга о реберной раскраске графов*) (доказательство теоремы можно найти в [3]). Из леммы 2 следует, что каждый граф $\widehat{G}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, может быть реализован собственным $(m,4n,1)$-графом $G_i = (V, W_i)$, причем множество вершин V будет одно и то же для всех четырех графов. Лемма 3 доказана.

*) Теорема Визинга оценивает хроматический индекс $\chi'(G)$ графа G через максимальную степень $\Delta(G)$ его вершин. Здесь используется верхняя оценка теоремы: $\chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

§ 3. Алгоритм обхода решетки

Приводимый ниже алгоритм обхода вершин решетки $H_{m,n}$ назовем *регулярным.* Алгоритм начинает работу в нулевой момент времени с нулевой вершины. Вершина, в которой находится алгоритм в момент времени t, называется *активной.* Шаг алгоритма заключается в перемещении из активной вершины по одному из ребер в соседнюю вершину.

Введем векторную функцию обхода $P_m(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_m(t))$, равную вектору координат той вершины решетки $H_{m,n}$, в которой алгоритм находится в момент времени t. Функцию $P_m(t)$ введем индукцией по m. Пусть $m = 0$. Тогда

$$P_0(t) = (t), \quad 0 \leqslant t \leqslant n.$$

Пусть определена функция $P_{m-1}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_{m-1}(t))$. Тогда для каждого $0 \leqslant t < 2^{m-1}(n+1)^m$ положим

$$P_m((2n+2)t+i) = \begin{cases} (P_{m-1}(t), i), & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant n, \\ (P_{m-1}(t), 2n+1-i), & \text{если } n+1 \leqslant i \leqslant 2n+1. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $u \in \{0, 1, \dots, 2n+1\}$ и $\sigma \in \{-1, 1\}$. Введем обозначения

$$u^\sigma = \begin{cases} u, & \text{если } \sigma = 1, \\ 2n+1-u, & \text{если } \sigma = -1. \end{cases} \tag{2}$$

Для набора $(u_0, u_1, \dots, u_m)$, где $u_i \in \{0, 1, \dots, 2n+1\}$, положим

$$\overline{u_0 u_1 \dots u_m} = \sum_{j=0}^{m} u_j (2n+2)^{m-i}.$$

Лемма 4. *Пусть $u = (u_0, u_1, \dots, u_m) \in H_{m,n}$. Тогда вершина u является активной в моменты времени t_σ, где*

$$t_\sigma = \overline{u_0 u_1^{\sigma_1} \dots u_m^{\sigma_m}}, \quad \sigma = (\sigma_1 \dots \sigma_m), \quad \sigma_i \in \{-1, 1\}.$$

Доказательство проведем индукцией по m. При $m = 0$ утверждение леммы очевидно. Предположим, что утверждение леммы справедливо при $m = k - 1$. Тогда по предположению индукции вершина $u \in H_{k-1,n}$ является активной в моменты времени t_σ, где

$$t_\sigma = \overline{u_0 u_1^{\sigma_1} \dots u_{k-1}^{\sigma_{k-1}}}, \quad \sigma = (\sigma_1 \dots \sigma_{k-1}), \quad \sigma_i \in \{-1, 1\}.$$

Пусть P_k — функция обхода решетки $H_{k,n}$. В (1) функция P_k определяется индуктивно через P_{k-1} — функцию обхода решетки $H_{k-1,n}$. Подставляя в (1) формулу (2), видим, что P_k и P_{k-1} связаны соотношением

$$P_k((2n+2)t+i) = \begin{cases} (P_{k-1}(t), i^1), & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant n, \\ (P_{k-1}(t), i^{-1}), & \text{если } n+1 \leqslant i \leqslant 2n+1. \end{cases} \tag{3}$$

Из (3) и предположения индукции следует, что вершина $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}, 0)$ является активной в моменты времени t'_σ, где

$$t'_\sigma = \overline{u_0 u_1^{\sigma_1} \ldots u_{k-1}^{\sigma_{k-1}} 0^{\sigma_k}}, \quad \sigma = (\sigma_1 \ldots \sigma_k), \quad \sigma_i \in \{-1, 1\}. \tag{4}$$

Теперь утверждение леммы легко следует из (1), (3) и (4). Лемма 4 доказана.

Заметим, что из (1) легко следует, что регулярный обход решетки $H_{m,n}$ состоит из $2^m(n+1)^{m+1}$ шагов.

Пусть $P_m(t) = (p_0(t), p_1(t), \ldots, p_{m-1}(t))$ — функция обхода решетки $H_{m-1,n}$. Рассмотрим произвольную m-мерную подрешетку $H_{m,n}(m, \alpha)$ решетки $H_{m,n}$. Функцию $\widehat{P}_m(t)$ назовем функцией обхода подрешетки $H_{m,n}(m, \alpha)$, если ее значения принадлежат этой подрешетке и для ее первых m координат $\left(\widehat{P}_m(t)\right)_j$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$, справедливо равенство $\left(\widehat{P}_m(t)\right)_j = \left(P_{m-1}(t)\right)_j$.

Приведенное ниже утверждение легко следует из определений функций обхода решетки и подрешетки. Приведем его без доказательства.

Лемма 5. *Пусть $P_m(t) = (p_0(t), p_1(t), \ldots, p_m(t))$ — функция обхода решетки $H_{m,n}$. Тогда векторная функция*

$$\widehat{P}_m(t) = P_m((2n+2)t + j^{\sigma_t})$$

является функцией обхода подрешетки $H_{m,n}(m, j)$ при произвольных σ_t.

Введем векторозначную функцию $D_m(t)$, определяющую направление регулярного обхода решетки $H_{m,n}$ в момент времени t. Функцию $D_m(t)$ введем индукцией по m. Пусть $m = 0$. Тогда

$$D_0(t) = (1), \quad 0 \leqslant t \leqslant n.$$

Пусть определена функция $D_{m-1}(t) = (d_0(t), d_1(t), \ldots, d_{m-1}(t))$. Тогда для каждого $0 \leqslant t < 2^{m-1}(n+1)^m$ положим

$$D_m((2n+2)t+i) = \begin{cases} (D_{m-1}(t), 1), & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant n, \\ (D_{m-1}(t), -1), & \text{если } n+1 \leqslant i \leqslant 2n+1. \end{cases} \tag{5}$$

Из (1), (5) и леммы 4 легко следует

Лемма 6. *Пусть $u = (u_0, u_1, \ldots, u_m) \in H_{m,n}$ и $t = \overline{u_0 u_1^{\sigma_1} \ldots u_m^{\sigma_m}}$. Если вершина u является активной в момент времени t, то*

$$\sigma_1 = d_1(t), \ldots, \sigma_m = d_m(t).$$

§ 4. Игра в камни

В этом параграфе рассматривается игра одного лица в камни на произвольном ориентированном ациклическом $(m,n,4)$-графе G. Каждому ребру графа G приписан собственный положительный номер. Игра состоит в регулярном обходе решетки $H_{m,n}$ и последовательной расстановке нумерованных камней во всех вершинах решетки $H_{m,n}$, через которые проходят ребра графа G, в соответствии с определенными ниже правилами. Полагаем, что игрок обладает неограниченным запасом различных камней. Первое правило определяет начальное расположение камней.

1. В начальный момент времени в каждой вершине графа с нулевой входной степенью лежат камни с номерами, равными номерам всех ребер, инцидентных этой вершине.

Перед тем как сформулировать следующие правила, на множестве всех вершин решетки $H_{m,n}$, через которые проходят ребра графа G, определим множество отношений частичного порядка $\{\leqslant_{G_p}\}$, где отношение $\leqslant_{G_p}$ линейно упорядочивает те вершины решетки, через которые проходит p-е ребро графа G. Вершины v и u находятся в отношении $v \leqslant_{G_p} u$, если выполняется одно из следующих условий:

- v, u — вершины графа G, связанные p-м ребром, направленным от v к u;
- v, u, w принадлежат p-му ребру графа G, u лежит между v и w, $v \leqslant_{G_p} w$.

Второе и третье правила определяют законы размещения камней в вершинах решетки при $t > 0$.

2. Если активная вершина $v = (v_0, \ldots, v_m)$ решетки не является вершиной графа G, то просматриваются ее непосредственные соседи — вершины $v^0, \ldots, v^m$ такие, что $v^j = (v_0^j, \ldots, v_m^j)$, $v_i^j = v_j - d_j(t)$.*) Если для некоторого p справедливо отношение $v^j \leqslant_{G_p} v$ (т. е. через v и v^j проходит p-е ребро графа G и в v^j лежит камень с номером p), то в вершину v кладется камень с таким же номером.

3. Если активная вершина v решетки является вершиной графа G, то просматриваются ее непосредственные соседи — вершины $v^0, \ldots, v^m$ такие, что $v^j = (v_0^j, \ldots, v_m^j)$, $v_i^j = v_j - d_j(t)$. Если во всех тех вершинах v^j, которые при некотором p находятся в отношении $v^j \leqslant_{G_p} v$ с вершиной v, лежат камни, то в вершину v кладутся камни: (1) с номерами ребер,

*) Если вершина лежит на границе решетки и разность $(v_j - d_j(t))$ не принадлежит множеству $\{0, 1, \ldots n\}$, то число просматриваемых вершин может быть меньше $m + 1$.

выходящих из вершины v; (2) с нулевым номером, если из вершины v ребра не выходят.

Цель игры заключается в том, чтобы положить камни во все вершины графа G. Будем говорить, что игра завершилась успешно, если в результате игры во все вершины G будут положены камни.

Основной результат настоящего параграфа состоит в том, что рассматриваемая игра в камни на произвольном ориентированном ациклическом $(m,n,4)$-графе G, вершины которого связаны функциональными ребрами, завершается успешно.

Лемма 7. *Пусть $(m,n,1)$-граф G содержит только две вершины u, v такие, что $u, v \in H_{m,n}$, $u_i = v_i$ при $0 \leqslant i \leqslant p-1$, $u_p > v_p$, и вершины u, v связаны стандартным ребром, направленным от v к u. Тогда в результате игры в камни на графе G камень будет положен в вершину u не позднее чем в момент времени*

$$t = \overline{u_0 u_1 \dots u_p u_{p+1}^{-1} \dots u_m^{-1}}.$$

Доказательство. Пусть $w_0 = v, w_1, \dots, w_s = u$ — все вершины решетки $H_{m,n}$, через которые проходит стандартное ребро, связывающее u и v. Для доказательства леммы достаточно показать, что найдутся такие моменты времени $t_0 < t_1 < \dots < t_s \leqslant \overline{u_0 u_1 \dots u_p u_{p+1}^{-1} \dots u_m^{-1}}$, что вершина w_i, $i = 0, 1, \dots, s$, является активной в момент времени t_i.

Лемму докажем индукцией по m. При $m = 1$ утверждение леммы легко проверяется. Предположим, что утверждение леммы справедливо при $m = k-1$.

Пусть $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ и $u_i = v_i$ при $0 \leqslant i \leqslant p-1$, $u_p > v_p$. Стандартное ребро, связывающее в $H_{k,n}$ вершины u и v, имеет вид

$$h = h_1^k h_2^{k-1} \dots h_{k-p}^{p-1} h_{k-p+1}^p h_{k-p+2}^{p+1} \dots h_{2k-2p}^{k-1} h_{2k-2p+1}^k.$$

Из определения стандартного ребра следует, что это ребро проходит через вершины $u^k = (u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, j)$ и $v^k = (v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, j)$, а ребро

$$h' = h_2^{k-1} \dots h_{k-p}^{p-1} h_{k-p+1}^p h_{k-p+2}^{p+1} \dots h_{2k-2p}^{k-1},$$

соединяющее эти вершины и являющееся частью ребра h, целиком лежит в k-мерной подрешетке $H_{k,n}(k,j)$ решетки $H_{k,n}$. Пусть $P_k(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_k(t))$ — функция обхода решетки $H_{k,n}$. Тогда из леммы 5 следует, что векторная функция

$$\widehat{P}_k(t) = P_k((2n+2)t + j^{\sigma_t}) \qquad (6)$$

будет функцией обхода подрешетки $H_{k,n}(k,j)$ при произвольных σ_t.

Из определения игры следует, что во время игры в камни на решетке $H_{k,n}$ либо в момент времени $\overline{v_0v_1\ldots v_{k-1}j}$, либо в момент времени $\overline{v_0v_1\ldots v_{k-1}j^{-1}}$ камень будет помещен в вершину v^k.

Далее рассмотрим игру в камни на решетке $H_{k-1,n}$. На этой решетке рассмотрим связанные стандартным ребром вершины $\tilde{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$ и $\tilde{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{k-1})$, где координаты u_i, v_i равны соответствующим координатам вершин u, v. По предположению индукции в результате игры в камни камень будет положен в вершину $\tilde{u}$ не позднее чем в момент времени

$$\tilde{t} = \overline{u_0u_1\ldots u_p u_{p+1}^{-1}\ldots u_{k-1}^{-1}}.$$

Из (6), предположения индукции и последнего равенства следует, что в результате игры в камни на решетке $H_{k,n}$ камень будет положен в вершину u^k не позднее чем в момент времени

$$t^{(k)} = (2n+2)\tilde{t} + j.$$

Далее легко видеть, что либо в момент времени $t = (2n+2)\tilde{t} + u_k$, если $u_k \geqslant j$, либо в момент времени $t' = (2n+2)\tilde{t}+u_k^{-1}$, если $u_k < j$, камень будет помещен в вершину u. Так как $t' > t$ и $t' = \overline{u_0u_1\ldots u_p u_{p+1}^{-1}\ldots u_{k-1}^{-1}u_k^{-1}}$, то лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть $(m, n, 1)$-граф G содержит только две вершины u, v такие, что $u, v \in H_{m,n}$, и эти вершины связаны функциональным ребром, направленным от v к u. Тогда в результате игры в камни на графе G камень будет положен в вершину u в момент времени*

$$t = \overline{u_0u_1\ldots u_m}.$$

Доказательство. Напомним, что если вершины $u = (u_0, u_1, \ldots, u_m)$ и $v = (v_0, v_1, \ldots, v_m)$ такие, что $u_0 = v_0, u_1 = v_1, \ldots, u_{p-1} = v_{p-1}, u_p > v_p$, то ребро (v, u) называется *функциональным*, если оно имеет вид

$$(v,u) = h_1^m h_2^{m-1}\ldots h_{m-p}^{p+1} h_{m-p+1}^p h_{m-p+2}^{p+1}\ldots h_{2m-2p}^{m-1} h_{2m-2p+1}^m h_{2m-2p+2}^p,$$

где h_j^i — простые i-ребра, $h_{2m-2p+2}^p$ — простое ребро ненулевой длины, идущее в положительном направлении. Рассмотрим стандартное ребро

$$h = h_1^m h_2^{m-1}\ldots h_{m-p}^{p+1} h_{m-p+1}^p h_{m-p+2}^{p+1}\ldots h_{2m-2p}^{m-1} h_{2m-2p+1}^m,$$

выходящее из v и связывающее эту вершину с вершиной u^p. Заметим, что ребро $h_{2m-2p+2}^p$, связывающее u^p и u, также является стандартным.

Рассмотрим вершины $v^0 = u^p, v^1, \ldots, v^s = u$, через которые проходит ребро $h_{2m-2p+2}^p$, связывающее u^p и u. Из предыдущей леммы следует, что в результате игры в камни камень будет положен в вершину v^0 не позднее чем в момент времени

$$t^{(0)} = \overline{u_0 u_1 \dots u_{p-1}(v_p^0) u_{p+1}^{-1} \dots u_m^{-1}},$$

где $v_p^0 < v_p^1$. С другой стороны, из леммы 4 следует, что вершина v^1 будет активной в первый раз в момент времени

$$t^{(1)} = \overline{u_0 u_1 \dots u_{p-1}(v_p^1) u_{p+1} \dots u_m}.$$

Очевидно, что $t^{(1)} > t^{(0)}$. Следовательно, в момент времени $t^{(1)}$ камень будет положен в вершину v^1. Далее по индукции показываем, что в вершину v^j камень будет положен в момент времени

$$t^{(j)} = \overline{u_0 u_1 \dots u_{p-1}(v_p^j) u_{p+1} \dots u_m}.$$

Так как $v^s = u$ и $t = t^{(s)}$, получаем утверждение леммы. Лемма 8 доказана.

Из леммы 8 следует, что если все ребра произвольного ориентированного ациклического графа G являются функциональными, то во время игры в камни на этом графе все камни, которые должны быть положены в его произвольную вершину v, будут положены в v при первом посещении этой вершины. Следовательно, справедлива

Лемма 9. *Пусть G — произвольный ориентированный ациклический $(m, n, 4)$-граф, все ребра которого функциональные. Тогда игра в камни на G завершится успешно.*

§ 5. Представление регулярного обхода решетки символьными последовательностями

Напомним, что $N(u) = \sum_{i=0}^{m} u_i (n+1)^{m-i}$. В $(n+1)$-ичной системе счисления $N(u)$ является $(m+1)$-разрядным числом, разряды которого совпадают с соответствующими координатами вершины u.

Введем последовательность $Q_m(t)$, определяющую приращение номера вершины решетки $H_{m,n}$ в момент времени t, т. е.

$$Q_m(t) = N(P_m(t)) - N(P_m(t-1)), \quad 0 < t < 2^m (n+1)^{m+1}.$$

Лемма 10. *Для последовательности $Q_m(t)$ справедливы соотношения: $Q_0(t) = 1$ при $1 \leqslant t \leqslant n$ и*

$$Q_m((2n+2)t + i) = \begin{cases} (n+1)Q_{m-1}(t), & \text{если } i = 0 \text{ и } t > 0; \\ 1, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant n; \\ 0, & \text{если } i = n+1; \\ -1, & \text{если } n+2 \leqslant i \leqslant 2n+1, \end{cases}$$

при $1 \leqslant t < 2^m (n+1)^{m+1}$.

Доказательство. При $m = 1$ утверждение леммы очевидно. Пусть $m > 1$. Из (1) следует, что

$$N(P_m((2n+2)t+i)) = \begin{cases} (n+1)N(P_{m-1}(t)) + i, & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant n; \\ (n+1)N(P_{m-1}(t)) + 2n + 1 - i, & \\ & \text{если } n+1 \leqslant i \leqslant 2n+1. \end{cases}$$

Найдем $Q_m(j)$. Пусть $j = (2n+2)t+i$, $0 \leqslant i \leqslant 2n+1$, а t и i одновременно не равны нулю. Рассмотрим случай $i = 0$. Тогда $t > 0$ и из предыдущего равенства имеем

$$\begin{aligned} &Q_m((2n+2)t+0) \\ &= N(P_m((2n+2)t+0)) - N(P_m((2n+2)(t-1)+(2n+1)-(2n+1))) \\ &= (n+1)(N(P_{m-1}(t))+0) - (n+1)(N(P_{m-1}(t-1))+0) \\ &= (n+1)(N(P_{m-1}(t)) - N(P_{m-1}(t-1))) = (n+1)Q_{m-1}(t). \end{aligned}$$

Аналогичным образом при других значениях i для $Q_m(j)$ имеем

$$(n+1)N(P_{m-1}(t)) + (i+1) - \Big((n+1)N(P_{m-1}(t)) + i\Big) = 1$$

при $1 \leqslant i \leqslant n$;

$$(n+1)N(P_{m-1}(t)) + (2n+1) - (n+1) - \Big((n+1)N(P_{m-1}(t)) + n\Big) = 0$$

при $i = n+1$;

$$(n+1)N(P_{m-1}(t)) + (2n+1-(i+1)) - \Big((n+1)N(P_{m-1}(t)) + (2n+1-i)\Big) = -1$$

при $n+2 \leqslant i \leqslant 2n+1$. Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *При каждом* $t = (2n+2)^p((2n+2)q+i)$, *где* $0 < p \leqslant m$, $1 \leqslant t < 2^m(n+1)^{m+1}$ *и* $0 < i < (2n+2)$, *справедливо равенство*

$$Q_m(t) = \begin{cases} (n+1)^p, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant n; \\ 0, & \text{если } i = n+1; \\ -(n+1)^p, & \text{если } n+2 \leqslant i \leqslant 2n+1. \end{cases}$$

Доказательство. Из леммы 10 имеем

$$Q_m((2n+2)^p s) = (n+1)Q_{m-1}((2n+2)^{p-1}s) = \ldots = (n+1)^p Q_{m-p}(s).$$

Пусть $s = (2n+2)j + i$ и $i \neq 0$. Тогда

$$Q_{m-p}((2n+2)j+i) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant n; \\ 0, & \text{если } i = n+1; \\ -1, & \text{если } n+2 \leqslant i \leqslant 2n+1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$Q_m\Big((2n+2)^p((2n+2)j+i)\Big)=\begin{cases}(n+1)^p, & \text{если } 1\leqslant i\leqslant n;\\ 0, & \text{если } i=n+1;\\ -(n+1)^p, & \text{если } n+2\leqslant i\leqslant 2n+1.\end{cases}$$

Лемма 11 доказана.

Будем рассматривать последовательности конечной длины над алфавитом $\mathscr{A}_m=\{-1,0,1,\pm a_1,\pm a_2,\dots,\pm a_m\}$. Введем последовательности W_m и $\overline{W}_m$:

$$W_0=1^n;\qquad W_m=(W_{m-1}0\overline{W}_{m-1}a_m)^nW_{m-1}0\overline{W}_{m-1}\qquad \text{при } m\geqslant 1;$$
$$\overline{W}_0=(-1)^n;\qquad \overline{W}_m=(W_{m-1}0\overline{W}_{m-1}(-a_m))^nW_{m-1}0\overline{W}_{m-1}\qquad \text{при } m\geqslant 1.$$

Легко видеть, что

$$\overline{W}_m(t)=\begin{cases}W_m(t), & \text{если } W_m(t)\neq a_m;\\ -a_m, & \text{если } W_m(t)=a_m.\end{cases}\tag{7}$$

Число элементов последовательности W обозначим через $|W|$. Далее полагаем, что $a_0=1, -a_0=-1$.

Лемма 12. *Пусть $m\geqslant 1$. Тогда*

$$|W_m|+1=2^m(n+1)^{m+1}.$$

Доказательство проведем индукцией по m. При $m=1$ утверждение леммы очевидно. Предположим, что $|W_{k-1}|+1=2^{k-1}(n+1)^k$. Из определения W_m следует, что $|W_k|+1=(2n+2)|W_{k-1}|$. Следовательно,

$$|W_k|+1=2^k(n+1)^{k+1}.$$

Лемма 12 доказана.

Лемма 13. *При каждом $t=(2n+2)^p((2n+2)q+i)$, где $0<p\leqslant m$, $1\leqslant t<2^m(n+1)^{m+1}$ и $0<i<(2n+2)$, справедливо равенство*

$$W_m(t)=\begin{cases}a_p, & \text{если } 1\leqslant i\leqslant n\ ;\\ 0, & \text{если } i=n+1;\\ -a_p, & \text{если } n+2\leqslant i\leqslant 2n+1\ .\end{cases}$$

Доказательство проведем индукцией по m. При $m=1$ утверждение леммы очевидно. Предположим, что оно верно при $m=k-1$. Представим t в виде $t=2^{k-1}(n+1)^kj+s$, где $0\leqslant s<2^{k-1}(n+1)^k$, $0\leqslant j\leqslant n$. Из определения W_k и предыдущей леммы имеем

$$W_k(t)=\begin{cases}W_{k-1}(s), & \text{если } s\neq 0 \text{ и } j=0,2,4,\dots;\\ \overline{W}_{k-1}(s), & \text{если } s\neq 0 \text{ и } j=1,3,5,\dots;\\ 0, & \text{если } s=0 \text{ и } j=1,3,5,\dots;\\ a_k, & \text{если } s=0 \text{ и } j=2,4,6,\dots\end{cases}\tag{8}$$

Рассмотрим случай $s = 0$. Если j — четное, т. е. $j = 2j_1$, то $t = (2n+2)^k j_1$ и при $j > 0$ из определения последовательности W_k следует, что $W_k(t) = a_k$. Если j — нечетное, т. е. $j = 2j_1 + 1$, то $t = (2n+2)^{k-1}\left((2n+2)j_1 + (n+1)\right)$, и в силу леммы 12 и определения последовательности W_k имеем $W_k(t) = 0$. Таким образом, при $s = 0$ утверждение леммы доказано.

Теперь рассмотрим случай $s \neq 0$. Выразим s через t:

$$s = t - 2^{k-1}(n+1)^k j = (2n+2)^p\Big((2n+2)q + i\Big) - 2^{k-1}(n+1)^k j.$$

Если $p < k-1$, то

$$s = (2n+2)^p\Big((2n+2)q+i-(n+1)(2n+2)^{k-1-p}j\Big) = (2n+2)^p\Big((2n+2)r_1+i\Big). \tag{9}$$

Если $p = k-1$ и j — четное, то

$$s = (2n+2)^{k-1}\Big((2n+2)q+i-(n+1)j\Big) = (2n+2)^{k-1}\Big((2n+2)r_2+i\Big). \tag{10}$$

Если $p = k-1$ и j — нечетное, то

$$s = (2n+2)^{k-1}\Big((2n+2)q+i-(n+1)j\Big) = (2n+2)^{k-1}\Big((2n+2)r_3+(n+1)+i\Big). \tag{11}$$

Таким образом, при любом $p \leqslant k-1$ число s можно представить в виде $s = (2n+2)^p((2n+2)r + l)$, где величины r и l определены в (9)–(11). В случае равенств (9) и (10) имеем $l = i$, а в случае равенства (11) $l = n+1+i$. По предположению индукции

$$W_{k-1}(s) = \begin{cases} a_p, & \text{если } 1 \leqslant l \leqslant n\,; \\ 0, & \text{если } l = n+1; \\ -a_p, & \text{если } n+2 \leqslant l \leqslant 2n+1. \end{cases} \tag{12}$$

При $p < k-1$, $p = k-1$ и четном j из (8)–(10) и (12) имеем

$$W_k(t) = W_{k-1}(s) = \begin{cases} a_p, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant n; \\ 0, & \text{если } i = n+1; \\ -a_p, & \text{если } n+2 \leqslant i \leqslant 2n+1. \end{cases}$$

При $p = k-1$, нечетном j и $i \neq n+1$ из (7), (8), (11) и (12) имеем

$$W_k(t) = \overline{W}_{k-1}(s) = \begin{cases} a_{k-1}, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant n; \\ -a_{k-1}, & \text{если } n+2 \leqslant i \leqslant 2n+1. \end{cases}$$

При $p = k-1$, нечетном j и $i = n+1$ из (11) следует, что $s = (2n+2)^{k-1}((2n+2)r_3 + (n+1) + i) = (2n+2)^k(r_3+1)$. Так как

$0 \leqslant s < 2^{k-1}(n+1)^k$, то $s = 0$. Пришли к противоречию с неравенством $s \neq 0$. Лемма 13 доказана.

Будем говорить, что последовательность W длины s моделирует алгоритм регулярного обхода решетки $H_{m,n}$, если найдутся такие $t_1 < t_2 < \ldots < t_i < \ldots < t_k \leqslant s$, что

$$\sum_{j=1}^{t_i} W(j) = N(P_m(i)), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Из лемм 11 и 13 легко следует

Лемма 14. *Положим $a_p = (n+1)^p$, $-a_p = -(n+1)^p$, $p = 1, 2, \ldots, m$. Тогда последовательность W_m моделирует алгоритм регулярного обхода решетки $H_{m,n}$.*

При $m \geqslant 1$ ведем последовательности F_m и $\overline{F}_m$:

$$\begin{aligned} F_m &= 1^{(n+1)^m} 0^{(n+1)^m} 1^{(n+1)^m} (-1)^{(n+1)^m}, \\ \overline{F}_m &= (-1)^{(n+1)^m} 0^{(n+1)^m} (-1)^{(n+1)^m} 1^{(n+1)^m}. \end{aligned}$$

Индукцией по m введем последовательности U_m и $\overline{U}_m$, $m \geqslant 0$:

$$\begin{array}{lll} U_0 = 1^n; & U_m = (U_{m-1} 0 \overline{U}_{m-1} F_m)^n U_{m-1} 0 \overline{U}_{m-1} & \text{при } m \geqslant 1; \\ \overline{U}_0 = (-1)^n; & \overline{U}_m = (U_{m-1} 0 \overline{U}_{m-1} \overline{F}_m)^n U_{m-1} 0 \overline{U}_{m-1} & \text{при } m \geqslant 1. \end{array}$$

Лемма 15. *Последовательность U_m моделирует алгоритм регулярного обхода решетки $H_{m,n}$.*

Утверждение леммы следует из того, что $\sum_i F_k(i) = (n+1)^k$, $\sum_i \overline{F}_k(i) = -(n+1)^k$ и последовательность U_m может быть получена из последовательности W_m подстановкой последовательностей F_k и $\overline{F}_k$ вместо букв a_k и $-a_k$.

Лемма 16. *Пусть $m \geqslant 0$. Тогда*

$$|U_m| = 5n(2(n+1))^m + m(n+1) - 4n(n+1)^m.$$

Доказательство. Из определения U_m при $m \geqslant 1$ следует рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} |U_m| &= (n+1)(|U_{m-1}| + |\overline{U}_{m-1}| + 1) + n|F_m| \\ &= (\text{так как } |U_{m-1}| = |\overline{U}_{m-1}|) = 2(n+1)|U_{m-1}| + (n+1) + 4n(n+1)^m. \end{aligned}$$

Полагая $b_m = |U_m| + 4n(n+1)^m$ и $b_0 = n + 4n(n+1)^0 = 5n$, имеем

$$\begin{aligned} b_m &= 2(n+1)b_{m-1} + n + 1 \\ &= (2(n+1))^m b_0 + m(n+1) = (2(n+1))^m 5n + m(n+1). \end{aligned}$$

Следовательно, $|U_m| = (2(n+1))^m 5n + m(n+1) - 4n(n+1)^m$ при $m \geqslant 1$. Лемма 16 доказана.

§ 6. Игра в камни на последовательностях

Рассмотрим произвольный граф $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{W})$. Будем говорить, что последовательность $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_t\}$ реализует граф $\widehat{G}$, если существует взаимно-однозначное отображение множества $\widehat{V}$ на некоторое подмножество S' множества элементов последовательности S.

Пусть граф $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{W})$ является $(3, |\widehat{V}|)$-сетью с нумерованными ребрами, S, J — последовательности, причем последовательность S реализует граф $\widehat{G}$, k — целое положительное число.

Определим игру в камни одного лица на четверке $(\widehat{G}, S, J, k)$. Игра состоит в последовательной расстановке нумерованных камней во все элементы последовательности S, соответствующие вершинам графа $\widehat{G}$. Перед началом игры игрок имеет неограниченный запас камней, помеченных любым положительным целым числом. Один шаг игры заключается в следующем:

- размещении камней в активном элементе каждой последовательности;
- определении следующего активного элемента каждой последовательности.

Цель игры заключается в том, чтобы положить камни во все элементы последовательности S, соответствующие вершинам графа $\widehat{G}$.

Произвольную игру A представим в виде последовательности операторов $A = A_1, A_2, \ldots, A_l$, где каждый оператор A_j является тройкой (a_j, b_j, c_j), в которой a_j — некоторое правило постановки камней; $b_j \in \{0, \pm 1\}$ — приращение номера активного элемента последовательности S; $c_j \in \{0, \pm 1\}$ — приращение номера активного элемента последовательности J.

Начальное состояние игры определяется правилами **1–2**.

1. Перед началом игры в каждом элементе, соответствующем вершине графа $\widehat{G}$ с нулевой входной степенью, лежат камни с номерами, равными номерам ребер, выходящим из этой вершины.

2. В начальный момент времени в активном состоянии находятся первые элементы последовательностей S и J.

На каждом шаге активные элементы последовательностей должны удовлетворять правилам **3–4**.

3. В каждый момент времени один элемент последовательности S и один элемент последовательности J находятся в активном состоянии.

4. Элемент $s \in S$ $(j \in J)$ является активным на i-м шаге, если на $i-1$-м шаге активным был элемент $s - b_{i-1}$ $(j - c_{i-1})$.

Размещение новых камней на каждом шаге должно удовлетворять правилам **5–9**.

5. Камень может быть положен только в активный элемент.

6. Камень с номером p может быть положен в активный элемент $s \in S$ $(j \in J)$ последовательности S (J), если камень с таким номером лежит либо в элементе $s - b_{i-1}$ $(j - c_{i-1})$, либо в активном элементе второй последовательности.

7. Пусть элемент s последовательности S соответствует вершине v графа $\widehat{G}$. Если s — активный элемент и если в этом элементе лежат камни с номерами всех ребер графа $\widehat{G}$, входящих в v, то (1) для каждого p в элемент s кладется камень с номером p, если из v выходит ребро с номером p; (2) в s кладется камень с нулевым номером, если из вершины v не выходят ребра.

8. В одном элементе не может находиться более k камней.

9. Из любого элемента в любой момент времени можно удалить любой камень.

Для произвольной ациклической $(3, s)$-сети $\widehat{G}$ и целого положительного m на четверке $(\widehat{G}, S, J, 4(m+1))$ определим регулярную игру **Game**, задав последовательность операторов $R_1, R_2, \ldots, R_q$. Пусть G — доставляемый леммой 3 $(m, n, 4)$-граф, реализующий сеть $\widehat{G}$ на решетке $H_{m,n}$, а W_m — последовательность, моделирующая регулярный обход решетки $H_{m,n}$. Игра **Game** определяется на основе игры в камни на графах, введенной в § 4. При описании игры **Game** будем использовать следующие обозначения: $P_m(i)$ — вершина решетки $H_{m,n}$, активная в i-й момент времени при ее регулярном обходе; $S(v)$ — элемент последовательности S, соответствующий вершине v решетки $H_{m,n}$, т. е. если $S(v)$ — j-й элемент последовательности S, то $N(v) = j - 1$.

Напомним, что каждой вершине $v = (v_0, v_1, \ldots, v_m) \in H_{m,n}$ поставлен в соответствие номер $N(v) = \sum\limits_{i=0}^{m} v_i(n+1)^{m-i}$. Поэтому если вершины v и u связаны p-ребром, т. е. $u_i = v_i$ при $i \neq p$ и $u_p > v_p$, то

$$N(u) = N(v) + (n+1)^{m-p}.$$

Операторы R_j игры **Game** объединим в блоки B_i. Пусть i такое, что $W_m(i) \in \{-1, 0, 1\}$, т. е. $W_m(i) \neq \pm a^p$, где $p > 0$. Тогда блок B_i состоит из единственного оператора

$$C_i = (\mathbf{R}, W_m(i), 0),$$

где правило постановки камней $\mathbf{R}$ формулируется следующим образом.

• Если через простое m-ребро, выходящее из вершины $P_m(i-1)$ и входящее в вершину $P_m(i)$, проходит s-е ребро графа G и в элементе последовательности S, который являлся активным на предыдущем шаге, т. е. в элементе $S(P_m(i-1))$, лежит камень с номером s, то камень с таким же номером кладется в активный элемент последовательности S, т. е. в $S(P_m(i))$; далее применяется правило **7**.

Пусть i такое, что $W_m(i) = \pm a_p$. В этом случае блок операторов B_i производит следующие действия. Просматриваются последние $(n+1)^p$, по времени посещения, элементы последовательности S, т. е. элементы, соответствующие вершинам решетки с номерами $N(P_m(i)) + j$, где $0 \leqslant j \leqslant (n+1)^p - 1$ (см. (1) и определение W_m). Если через простое $(m-p)$-ребро, выходящее из вершины с номером $N(P_m(i)) + j$ и входящее в вершину с номером $N(P_m(i)) + j \pm (n+1)^p$, проходит s-е ребро графа G и в элементе, соответствующем вершине с номером $N(P_m(i))+j$, лежит камень с номером s, то камень с таким же номером кладется в элемент последовательности S, соответствующий вершине с номером $N(P_m(i)) + j \pm (n+1)^p$. Блоки B_i при $W_m(i) = a_p$ и $W_m(i) = -a_p$ во многом аналогичны. Поэтому подробно опишем блок B_i только для $W_m(i) = a_p$. Этот блок состоит из четырех блоков $B_{i,1}$, $B_{i,2}$, $B_{i,3}$, $B_{i,4}$. Блок $B_{i,1}$ состоит из $(n+1)^p$ операторов $C_{i,1,j}$:

$$C_{i,1,j} = (\mathbf{K}_1, 1, 1), \quad 1 \leqslant j \leqslant (n+1)^p,$$

где правило размещения камней $\mathbf{K}_1$ формулируется следующим образом.

• Если через простое $(m-p)$-ребро, выходящее из вершины с номером $N(P_m(i)) + j$ и входящее в вершину с номером $N(P_m(i)) + j + (n+1)^p$, проходит s-е ребро графа G и в активном элементе последовательности S, т. е. в элементе, соответствующем вершине v с номером $N(P_m(i))+j$, лежит камень с номером s, то камень с таким же номером кладется в активный элемент последовательности J.

Блок $B_{i,2}$ состоит из $(n+1)^p$ операторов $C_{i,2,j}$:

$$C_{i,2,j} = (\square, 1, -1), \quad 1 \leqslant j \leqslant (n+1)^p,$$

где символ $\square$ означает отсутствие действий с камнями.

Блок $B_{i,3}$ состоит из $(n+1)^p$ операторов $C_{i,3,j}$:

$$C_{i,3,j} = (\mathbf{K}_3, 1, 1), \quad 1 \leqslant j \leqslant (n+1)^p,$$

где правило размещения камней $\mathbf{K}_3$ формулируется следующим образом.

• Если в активном элементе последовательности J лежит камень с номером s, то камень с таким же номером кладется в активный элемент последовательности S, а из активного элемента последовательности J удаляются все камни.

Блок $B_{i,4}$ состоит из $(n+1)^p$ операторов $C_{i,4,j}$:

$$C_{i,4,j} = (\square, 0, -1), \quad 1 \leqslant j \leqslant (n+1)^p.$$

Игра **Game** определена. Для этой игры справедлива

Лемма 17. *В результате игры* **Game**, *определенной на четверке* $(\widehat{G}, S, J, 4(m+1))$, *камни будут положены во все элементы последовательности* S, *соответствующие вершинам графа* $\widehat{G}$.

Доказательство. Покажем, что если после j-го шага регулярного обхода решетки $H_{m,n}$ камень с номером s находится в вершине u, то после выполнения операторов, составляющих блок B_j игры **Game**, камень с таким же номером s будет находиться в элементе $S(u)$. Сделаем это индукцией по номеру блока B_j. При $j = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что оно верно при $j = l - 1$. Если s-й камень уже находился в вершине u решетки $H_{m,n}$ на предыдущем $(l-1)$-м шаге, то утверждение леммы следует из предположения индукции. Поэтому рассмотрим случай, когда s-й камень положен в u на l-м шаге. Если камень попадает в u по ребру m-го направления, доказываемое утверждение следует из определений регулярного обхода решетки, игры **Game** и предположения индукции. Предположим, что камень попадает в u по ребру $(m-p)$-го направления, где $p > 0$. Следовательно, в момент времени l камень с номером s находился в вершине v, $N(v) = N(u) - d_{m-p}(l)(n+1)^p$ (см. лемму 6). Пусть $u = (u_0, u_1, \ldots, u_m)$. Тогда из леммы 6 для l и максимального t такого, что $t < l$ и $P_m(t) = v$, имеем

$$l = \overline{u_0 u_1^{d_1(l)} \ldots u_{m-p-1}^{d_{m-p-1}(l)} u_{m-p}^{d_{m-p}(l)} u_{m-p+1}^{d_{m-p+1}(l)} \ldots u_m^{d_m(l)}},$$

$$t = \overline{u_0 u_1^{d_1(l)} \ldots u_{m-p-1}^{d_{m-p-1}(l)} (u_{m-p} - d_{m-p}(l))^{d_{m-p}(l)} u_{m-p+1}^{d_{m-p+1}(l)} \ldots u_m^{d_m(l)}}.$$

Следовательно,

$$t = l - (2n+2)^p.$$

Из леммы 13 следует, что в последовательности W_m между l-м и t-м элементами находится некоторый r-й элемент, равный либо a_p, либо $-a_p$. Так как по предположению индукции после выполнения блока операторов B_t камень с номером s помещен в элемент v, то после выполнения блока операторов B_r s-й камень будет положен в элемент u. Лемма 17 доказана.

Из лемм 15–17 легко извлекается

Лемма 18. *Пусть* $s \leqslant (n+1)^m$, $\widehat{G}$ — $(3, s)$-*сеть. Игра* **Game**, *определенная на четверке* $(\widehat{G}, S, J, 4(m+1))$, *заканчивается не более чем за* $(40n)^{m+1}$ *шагов.*

§ 7. Вычисления на последовательностях

Пусть S' — схема из функциональных элементов. Вводя в S' новые элементы, реализующие тождественную функцию, получим новую схему S'', у которой выходная степень каждого двухвходового элемента равна единице, а выходная степень всех одновходовых элементов не превосходит двух. Легко видеть, что $L(S'') \leqslant 2L(S')$ и S'' является $(3, 2L(S'))$-сетью. Через $\widehat{S}$ обозначим $(3, 2L(S'))$-сеть, получающуюся из S'' нумерацией ребер.

На основе игры **Game**, определенной на $\widehat{S}$, легко определить вычисление **C**, моделирующее на последовательностях S и J работу схемы S'. Для этого достаточно снабдить метками используемые в **Game** камни. Присваивание меток определим при помощи двух новых правил **1*** и **7***, заменив ими правила **1** и **7**.

1*. Перед началом игры в каждом элементе, соответствующем вершине графа $\widehat{S}$ с нулевой входной степенью, лежат камни с номерами, равными номерам ребер, выходящим из этой вершины. Камень, лежащий в элементе, соответствующем i-му входу схемы, помечен значением переменной x_i.

7*. Пусть элемент s последовательности S соответствует вершине v сети $\widehat{S}$, в вершине s реализуется функция w. Если s — активный элемент и в этом элементе лежат камни с номерами всех ребер сети $\widehat{S}$, входящих в v (таких ребер не больше двух, это следует из утверждения (iii) леммы 3), эти ребра помечены символами σ_1 и σ_2 и $\sigma = w(\sigma_1, \sigma_2)$, то (1) для каждого p камень с номером p и меткой σ кладется в s, если из v выходит ребро с номером p; (2) камень с нулевым номером и меткой σ кладется в s, если из v ребра не выходят.

Как и игру **Game**, вычисление **C** можно задать последовательностью операторов $A_1, A_2, \ldots, A_s$, заменив правило постановки камней **R** новым правилом **R***, отличающимся от **R** применением для постановки новых камней правила **7*** вместо **7**. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 19. *Пусть S — схема из функциональных элементов и $2L(S) \leqslant n^m$. Тогда описанное выше вычисление* **C**, *моделирующее работу схемы S, осуществляется не более чем за $(40n)^{m+1}$ шагов.*

§ 8. Машина Тьюринга

В этом параграфе будем рассматривать машину Тьюринга **M**, состоящую из конечного автомата с одним внутренним состоянием q, четырех односторонних лент A, B, C, D, состоящих из ячеек, пронумерованных натуральными числами, и блока внутренней памяти S, способного запомнить одно двоичное число. В каждый момент времени автомат

- имеет доступ к одной ячейке каждой ленты;
- может изменить содержимое этих ячеек на лентах B и C;
- сдвинуть каждую из лент на одну ячейку либо вправо, либо влево.

Лента A используется для записи программы, управляющей работой машины. На лентах B и C записываются промежуточные вычисления. На ленте D записаны входные данные. Ленты A и D используются только для чтения, ленты B и C — для чтения и записи.

Определим машину **M**, задав алфавиты $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ лент A, B, C, D и определив отображение

$$(a, b, c, d, s) \to (a', b', c', d', s', \alpha, \beta, \gamma, \delta), \tag{13}$$

где $a, a' \in \mathscr{A}$, $b, b' \in \mathscr{B}$, $c, c' \in \mathscr{C}$, $d, d' \in \mathscr{D}$, $s, s' \in \{0, 1, \square\}$ — содержимое внутренней памяти, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{-1, 0, 1\}$ определяют сдвиг соответствующих лент: -1 — сдвиг влево, 1 — вправо, 0 — лента остается на месте.

Положим $\alpha \equiv 1$, т. е. лента A всегда сдвигается вправо. Остальные восемь компонент отображения (13) зададим, описав такт работы машины Тьюринга, состоящий в последовательном выполнении следующих элементарных действий: вычисления, чтения, записи, движения ленты B, движения ленты C, движения ленты D.

Определим эти элементарные действия и введем для них обозначения. Эти обозначения далее будут использованы для описания алфавита ленты A.

Вычисление:

f — вычисление значения двуместной булевой функции $f(\cdot, \cdot)$, первым аргументом которой является величина, содержащаяся в активной ячейке ленты B, вторым — величина, содержащаяся в памяти, результат вычисления помещается во внутреннюю память автомата;

$\star$ — во внутреннюю память автомата помещается содержимое активной ячейки ленты D;

$\square$ — отсутствие вычислений.

Чтение:

$r_{SB}(r_{SC})$ — в активную ячейку ленты B (ленты C) помещается содержимое внутренней памяти автомата;

$\square$ — отсутствие чтения.

Запись:

$w_{BS}(w_{CS}, w_{DS})$ — содержимое активной ячейки ленты B (лент C, D) помещается во внутреннюю память автомата;

$\square$ — отсутствие записи.

Движение ленты:

r — сдвиг ленты на одну ячейку вправо;

l — сдвиг ленты на одну ячейку влево;

$\square$ — отсутствие движения.

Определим алфавиты $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ лент A, B, C, D. Положим:

$$\mathscr{A} = F \times R \times W \times M_B \times M_C \times M_D,$$

где $F = \{P_2^2, \star, \square\}$, $R = \{r_{SB}, r_{SC}, \square\}$, $W = \{w_{BS}, w_{CS}, w_{DS}, \square\}$, $M_B = \{r, l, \square\}$, $M_C = \{r, l, \square\}$, $M_D = \{r, \square\}$;

$$\mathscr{B} = \mathscr{C} = \mathscr{D} = \{0, 1, \square\},$$

где символ $\square$ используется в качестве пустого символа.

Нетрудно видеть, что определенная таким образом машина Тьюринга **M**, снабженная подходящей программой $P(S)$, будет моделировать работу произвольной схемы из функциональных элементов S. Программа $P(S)$ легко получается из соответствующего вычисления **C**, моделирующего работу схемы S. Пусть вычисление **C** состоит из T шагов. Программу $P(S)$ представим в виде T последовательных блоков P_j, где P_j моделирует действие оператора A_j вычисления **C**. Нетрудно видеть, что длина каждого блока P_j не превосходит величины cm, где c — некоторая константа. Поэтому из леммы 19 получаем, что справедлива

Лемма 20. *Пусть S — схема из функциональных элементов и $2L(S) \leqslant n^m$. Тогда для машины Тьюринга* M *найдется такая программа $P(S)$, что* M(S) *моделирует работу S и*

$$T(P) \leqslant m(c_1 n)^{m+1},$$

где c_1 — некоторая константа.

Так как T шагов машины Тьюринга с конечным числом лент могут быть промоделированы универсальной машиной Тьюринга с двумя лентами не более чем за $O(T \log_2 T)$ шагов [3], то из леммы 20 следует

Лемма 21. *Пусть S — схема из функциональных элементов и $2L(S) \leqslant n^m$. Тогда для любой универсальной машины Тьюринга* **M*** *с двумя лентами найдется такая программа $P(S)$, что* M$^*(P)$ *моделирует работу S и*

$$T(P) \leqslant m^2 \log_2 n (c_2 n)^{m+1}, \tag{14}$$

где c_2 — некоторая константа.

§ 9. Доказательство теоремы

Из леммы 21 следует неравенство (14) для времени моделирования схемы S произвольной универсальной двухленточной машиной Тьюринга. Положим $m = \left\lceil \sqrt{\log_2(2L(S))} \right\rceil$, $n = 2^{\left\lceil \sqrt{\log_2(2L(S))} \right\rceil}$. Тогда

$$n^m \geqslant \left(2^{\sqrt{\log_2(2L(S))}}\right)^{\sqrt{\log_2(2L(S))}} = 2L(S).$$

Следовательно, определенные выше величины m и n удовлетворяют условию леммы 21. С другой стороны,

$$n^m \leqslant \left(2^{\sqrt{\log_2(2L(S))}+1}\right)^{\sqrt{\log_2(2L(S))}+1} = L(S)^{1+\mathcal{O}\left(1/\sqrt{\log_2 L(S)}\right)}.$$

Кроме того, так как $\log_2 n = m$, то, оценивая сверху величину из правой части (14), из предыдущего неравенства при $L(S) \to \infty$ имеем

$$\begin{aligned} m^2 \log_2 n(c_2 n)^{m+1} &= m^3 n c_2^{m+1} n^m \\ &< \left(\sqrt{\log_2(2L(S))} + 1\right)^3 2^{\log_2 c_2 \left(\sqrt{\log_2(2L(S))}+2\right)} L(S)^{1+\mathcal{O}\left(1/\sqrt{\log_2 L(S)}\right)} \\ &= L(S)^{1+\mathcal{O}\left(1/\sqrt{\log_2 L(S)}\right)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Автор благодарен В. В. Кочергину, прочитавшему первоначальный вариант работы и сделавшему ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.** Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979.
2. **Барздинь Я. М., Колмогоров А. Н.** О реализации сетей в трехмерном пространстве // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1967. Вып. 19. С. 261–268.
3. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
4. **Мальцев А. И.** Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.
5. **Пауль В., Тарьян Р. Э.** О соотношении времени и памяти в игре в камни // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1984. Вып. 21. С. 133–138.
6. **Сэвидж Д. Э.** Сложность вычислений. М.: Факториал, 1998.
7. **Хенни Ф. К., Стирнз Р. Е.** Моделирование многоленточной машины Тьюринга на двуленточной // Проблемы математической логики. М.: Мир, 1970. С. 194–212.

8. **Хенни Ф. К.** Вычисления на машинах Тьюринга со входом // Проблемы математической логики. М.: Мир, 1970. С. 249–270.
9. **Штосс Г. Й.** k-Ленточное моделирование k-головочных машин Тьюринга // Сложность вычислений и алгоритмов. М.: Мир, 1974. С. 190–198.
10. **Штосс Г. Й.** Двуленточное моделирование машин Тьюринга // Сложность вычислений и алгоритмов. М.: Мир, 1974. С. 199–212.
11. **Schnorr C. P.** The network complexity and the Turing machine complexity of finite functins // Acta Informatica. 1976. V. 7, N 1. P. 95–107.

Адрес автора:

МГУ, мех.-мат. факультет,
Воробьевы горы,
119899 Москва, Россия.
E-mail: chash@glasnet.ru

Статья поступила
2 апреля 1998 г.