

УДК 519.71

РЕЗИДУАЛЬНАЯ НАДЕЖНОСТЬ P-ПОРОГОВЫХ ГРАФОВ

А. А. Черняк

Задача вычисления резидуальной надежности (RES-проблема) решена для всех классов P-пороговых графов, для которых ранее были получены эффективные структурные характеристики, основанные на декомпозиции этих графов на неразложимые компоненты. В частности, дано конструктивное доказательство существования линейных алгоритмов вычисления резидуальной надежности для псевдоминантно-пороговых, доминантно-пороговых, матрогенных и матроидальных графов. В то же время доказано, что RES-проблема является #P-полной в классе бигулярных графов. Этот результат означает #P-полноту RES-проблемы в классах неразложимых бокс-пороговых и псевдопороговых графов.

Введение

В статье рассматриваются неориентированные, без петель и кратных ребер графы. Пусть G — граф с множеством вершин VG и множеством ребер EG , $T = VG$ или $T = EG$, $\mathcal{P}(T)$ — некоторое семейство непустых подмножеств множества T . Тогда пара $[T, \mathcal{P}(T)]$ называется *графоидной системой* с носителем T и множеством путей $\mathcal{P}(T)$. Если $\mathcal{P}(T)$ совпадает с множеством

$$\{X \mid X \subseteq T \text{ и существует } Y \in \mathcal{P}(T) \text{ такое, что } Y \subseteq X\},$$

то система $[T, \mathcal{P}(T)]$ называется *иерархической*. Предположим, что каждый элемент $s_i \in T$ независимо от других элементов может исключаться (отказываться) из T с вероятностью $1 - p_i$, $0 \leq p_i \leq 1$. Обозначим через $R(T, \mathcal{P}(T), \bar{p})$, где $\bar{p} = (p_1, \dots, p_k)$, $k = |T|$, вероятность события, заключающегося в том, что множество неисключенных (исправных) элементов является путем.

Будем считать, что $\mathcal{P}(T)$ состоит из тех подмножеств в T , которые индуцируют связные подграфы графа G . В этом случае величины $R(EG, \mathcal{P}(EG), \bar{p})$ и $R_v(G, \bar{p}) = R(VG, \mathcal{P}(VG), \bar{p})$ известны как олтерминальная и резидуальная надежности графа G соответственно. При этом

отличие второго понятия от других классических критериев надежности состоит в том, что оно определяется для системы $[VG, \mathcal{P}(VG)]$, не являющейся иерархической.

Алгоритмические аспекты задачи вычисления резидуальной надежности (называемой в дальнейшем RES-проблемой) изучались ранее в [6, 8, 10, 11]. В этих работах были получены полиномиальные алгоритмы определения $R_v(G, \bar{p})$ для деревьев, интервальных графов и графов подстановок. В то же время была доказана $\#P$ -полнота RES-проблемы для расщепляемых и двудольных графов.*)

В данной статье RES-проблема решена для тех классов P -пороговых графов, для которых в [3, 4, 7, 12, 13] были получены эффективные структурные характеристики, основанные на декомпозиции этих графов на неразложимые компоненты. Более конкретно: дано конструктивное доказательство существования линейных алгоритмов вычисления резидуальной надежности для матричных и псевдодоминантно-пороговых графов. Из этих результатов следует существование аналогичных алгоритмов для доминантно-пороговых, матричных и пороговых графов. Получены также эффективные рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять коэффициенты полиномов надежности перечисленных выше классов графов. В то же время доказано, что RES-проблема является $\#P$ -полной даже в классе бирегулярных графов, в которых вероятности отказов всех вершин одинаковы и равны $1/2$. Этот результат означает $\#P$ -полноту RES-проблемы в классах неразложимых бокс-пороговых и псевдопороговых графов.

1. Основные определения

Все неопределяемые в статье понятия теории графов можно найти в [2]. В приведенных ниже определениях, связанных с P -пороговыми графами, мы следуем монографии [9].

Пусть R^+ обозначает множество неотрицательных действительных чисел. Граф G называется *псевдодоминантно-пороговым*, если для каждого индуцированного подграфа H графа G существуют функция $w_H: V_H \rightarrow R^+$, не равная тождественно нулю, и число $t \in R^+$ такие, что для каждого подмножества $S \subseteq V_H$ истинны утверждения:

$$\begin{aligned} \text{если } S \text{ — доминирующее множество в } H, \text{ то } \sum_{v \in S} w_H(v) \geq t, \\ \text{если } S \text{ — не доминирующее множество в } H, \text{ то } \sum_{v \in S} w_H(v) \leq t. \end{aligned} \quad (1)$$

*) Понятие $\#P$ -полноты относится к перечислительным задачам (см., например, [1, с. 208–212]).

Если одно из неравенств в (1) заменить на строгое неравенство, то получим определение *доминантно-порогового* графа.

Граф G называется *псевдопороговым*, если существуют функция $w : VG \rightarrow R^+$, не равная тождественно нулю, и число $t \in R^+$ такие, что для каждого подмножества $S \subseteq VG$ истинны утверждения:

$$\begin{aligned} \text{если } S \text{ — независимое множество в } G \text{ то } \sum_{v \in S} w(v) \leq t, \\ \text{если } S \text{ — зависимое множество в } G \text{ то } \sum_{v \in S} w(v) \geq t. \end{aligned} \quad (2)$$

Если одно из неравенств в (2) заменить на строгое неравенство, то получим определение порогового графа. Эквивалентное определение пороговых графов может быть дано в терминах предпорядка \geq : если $u, v \in VG$, то $v \geq u$ тогда и только тогда, когда каждая вершина, смежная с u и отличная от v , смежна с вершиной v .

Граф G называется *бокс-пороговым*, если любые две вершины в G , не сравнимые относительно предпорядка \geq , имеют одинаковые степени.

Граф G называется *матрогенным*, если семейство всех подмножеств в VG , индуцирующих пороговые подграфы, образует систему независимости матроида с носителем VG . Граф G называется *матроидальным*, если семейство всех таких подмножеств в EG , что вершины, инцидентные ребрам одного подмножества, индуцируют пороговые подграфы, образует систему независимости матроида с носителем EG .

Если $p_1 = \dots = p_n = p$ и $n = |VG|$, то по определению

$$R_v(G, p) = \sum_{i=0}^n c_i(G) p^i (1-p)^{n-i}, \quad (3)$$

где $c_i(G)$ — число i -вершинных связных индуцированных подграфов в G . Выражение в правой части (3) называется *полиномом (резидуальной) надежности* графа G с коэффициентами $c_i(G)$ и будет обозначаться через $\text{Pol}(G, p)$.

2. Трудноразрешимые случаи RES-проблемы

Здесь используются классические понятия $\#P$ -полноты и полиномиальной сводимости, применяемые к перечислительным задачам; подробности можно найти в [1, 14].

Сначала дадим несколько определений. Граф G называется *расщепляемым*, если существует разбиение $VG = A \cup B$ его вершинного множества на клику A и независимое множество B . Если при этом A и B — орбиты в G , то G называется *бирегулярным* (орбита в графе —

это множество его вершин одинаковой степени d ; при этом d называется *степенью орбиты*).

Будем говорить, что вершина v насыщается паросочетанием P , если v инцидентна некоторому ребру из P . Обозначения: $\mathcal{L}_k(G)$ — множество всех паросочетаний в G , состоящих из k ребер; $\mathcal{L}(G) = \bigcup_k \mathcal{L}_k(G)$; $\text{con}(G) = \sum_k c_k(G)$; $\mathcal{E}(G)$ — множество всех совершенных паросочетаний в G . Задачу определения числа $|\mathcal{E}(G)|$ в классе графов с множеством $\{d_1, \dots, d_r\}$ степеней орбит обозначим через $\text{PM}(d_1, \dots, d_r)$. Пусть H — индуцированный подграф в G и $P \in \mathcal{L}(H)$. Скажем, что P индуцируется некоторым паросочетанием T из $\mathcal{L}(G)$, если $T \cap EH = P$. Длиной рационального числа p/q , где p и q — взаимно простые целые числа, называется величина $1 + \log_2(|p| + 1) + \log_2(|q| + 1)$.

Лемма 1 [14]. Пусть b — n -вектор, A — невырожденная квадратная матрица порядка n и компоненты матрицы A и вектора b — рациональные числа, длины которых ограничены некоторым числом m . Тогда система линейных уравнений $Ax = b$ может быть решена за время, полиномиально зависящее от m и n .

Теорема 1. RES-проблема является $\#P$ -полной в классе бирегулярных графов, вероятности вершин которых одинаковы и равны $1/2$.

Доказательство. В [5] была доказана $\#P$ -полнота задачи $\text{PM}(2,3)$. Сначала докажем полиномиальную сводимость $\text{PM}(2,3)$ к задаче $\text{PM}(3)$. Пусть G — произвольный граф с множеством степеней вершин $\{2,3\}$, содержащий совершенное паросочетание. Так как число $|VG|$ четно и сумма степеней вершин любого графа также четна [2], то орбита степени 2 в G состоит из четного числа вершин. Пусть $\{v_1, \dots, v_{2l}\}$ — орбита степени 2. Введем обозначения: F — $2l$ -вершинный простой цикл, $VF = \{u_1, \dots, u_{2l}\}$, $VF \cap VG = \emptyset$, H — граф с множеством вершин $VH = VF \cup VG$ и множеством ребер

$$EH = EG \cup EF \cup \{u_i v_i : i = 1, \dots, 2l\}$$

(степени всех вершин в H равны 3). Пусть $\mathcal{E}_k(H)$ — множество всех совершенных паросочетаний в H , в каждом из которых содержится k ребер цикла F ; $g_k = |\mathcal{E}_k(H)|$. Так как $|\mathcal{E}(F)| = 2$ и $|\mathcal{E}_1(H)| = |\mathcal{E}(G)| \cdot |\mathcal{E}(F)|$, то $2|\mathcal{E}(G)| = |\mathcal{E}_1(H)|$.

Далее каждое ребро $u_i u_{i+1}$ из EF в графе H заменим подграфом $M_{i,r}$, изображенным на рис. 1 (множества $VM_{i,r} \setminus \{u_i, u_{i+1}\}$ считаются попарно непересекающимися). Полученный граф обозначим через H_r . Пусть $S \in \mathcal{E}(H_r)$. Непосредственно проверяется, что ребра e_{01} и e_{02} одновременно либо содержатся, либо не содержатся в S . Поэтому корректно

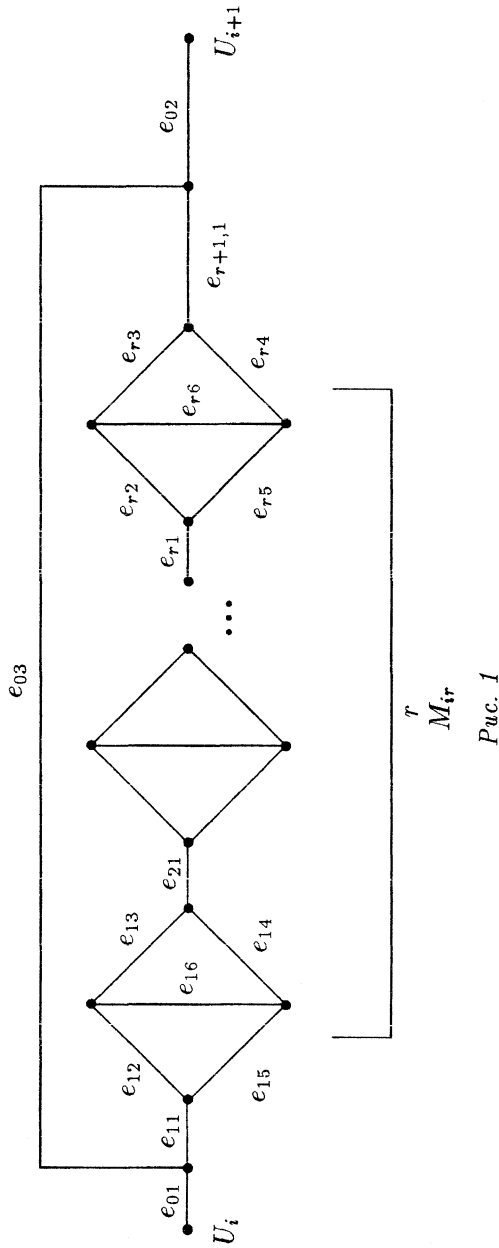


Рис. 1

сюръективное отображение $\varphi: \mathcal{E}(H_r) \rightarrow \mathcal{E}(H)$, определяемое следующим образом: ребро $e = u_i u_{i+1}$ из EF принадлежит множеству $\varphi(S)$ тогда и только тогда, когда $\{e_{01}, e_{02}\} \subseteq S$; ребро e из $EH \setminus EF$ принадлежит множеству $\varphi(S)$ тогда и только тогда, когда $e \in S$.

Из вида графов $M_{i,r}$ вытекает истинность следующих импликаций:

$$\begin{aligned} (\text{либо } e_{01} \notin S \text{ и } e_{03} \in S, \text{ либо } e_{01} \in S) &\Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{либо } \{e_{j2}, e_{j4}\} \subseteq S, \\ \text{либо } \{e_{j3}, e_{j5}\} \subseteq S, \\ \text{для каждого } j = 1, \dots, r \end{array} \right), \\ (e_{01} \notin S, e_{03} \notin S) &\Rightarrow \left(S \cap E M_{i,r} = \bigcup_{j=1}^r \{e_{j1}, e_{j6}, e_{j+1,1}\} \right). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$|\varphi^{-1}(\mathcal{E}_k(H))| = g_k(2^r)^k(2^r + 1)^{2l-k}.$$

Следовательно,

$$|\mathcal{E}(H_r)| = |\varphi^{-1}(\mathcal{E}(H))| = (2^r + 1)^{2l} \sum_{k=0}^l \left(\frac{2^r}{1 + 2^r} \right)^k g_k$$

или

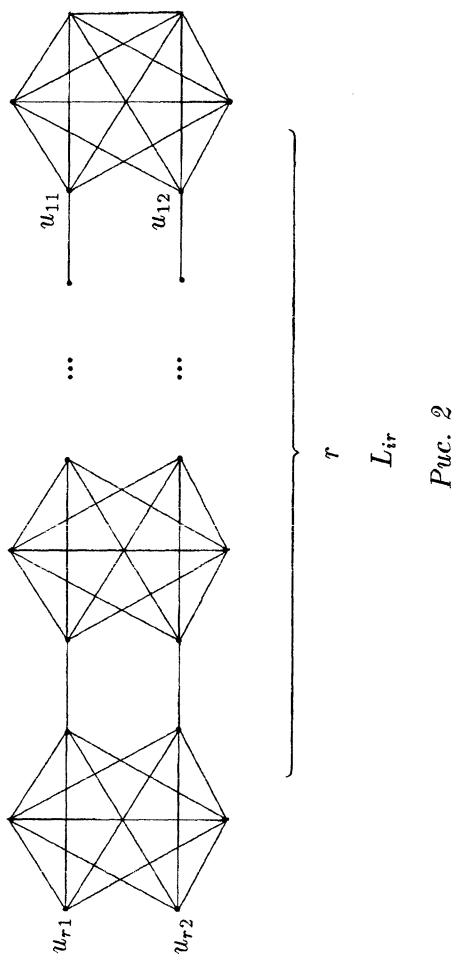
$$|\mathcal{E}(H_r)| / (2^r + 1)^{2l} = \sum_{k=0}^l \left(\frac{2^r}{2^r + 1} \right)^k g_k, \quad r = 1, \dots, l + 1. \quad (4)$$

Коэффициенты системы линейных уравнений (4) образуют матрицу Вандермонда. Отсюда и из леммы 1 следует, что система (4) разрешима за время, полиномиально зависящее от l и $|EH_r|$. Но, как показано выше, $|\mathcal{E}(G)| = g_l/2$, что доказывает полиномиальную сводимость РМ(2, 3) к задаче РМ(3).

Теперь докажем полиномиальную сводимость задачи РМ(3) к задаче РReg определения числа всех паросочетаний (необязательно совершенных) в классе регулярных графов. Пусть G — произвольный кубический граф и $VG = \{v_1, \dots, v_n\}$. С каждой вершиной v_i свяжем граф $L_{i,r}$, изображенный на рис. 2, положив вершину v_i смежной с вершинами u_{r1} и u_{r2} графа $L_{i,r}$ (множества $VL_{i,r}$ считаются попарно непересекающимися). Полученный граф обозначим через F_r . По построению граф F_r является регулярным. Обозначим теперь через a_k, b_k, c_k число паросочетаний в L_{ik} , насыщающих соответственно обе вершины u_{k1}, u_{k2} , только вершину u_{k1} и ни одной вершины u_{k1}, u_{k2} . Непосредственно проверяются следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} a_k &= 22a_{k-1} + 56b_{k-1} + 36c_{k-1}, & a_1 &= 24, \\ b_k &= 14a_{k-1} + 40b_{k-1} + 28c_{k-1}, & b_1 &= 16, \\ c_k &= 8a_{k-1} + 24b_{k-1} + 18c_{k-1}, & c_1 &= 10. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим через $N_{i,r}$ подграф в F_r , индуцированный множеством вершин $VG \cup VL_{i,r}$. Пусть $S \in \mathcal{L}(G)$. Если v_i насыщена паросочетанием S , то S индуцирует $|\mathcal{L}(L_{i,r})|$ паросочетаний в $N_{i,r}$, число которых равно



$a_r + 2b_r + c_r$. Если же v_i не насыщена паросочетанием S , то S индуцирует $a_r + 4b_r + 3c_r$ паросочетаний в N_{ir} (при этом ровно $|\mathcal{L}(L_{ir})|$ из них не содержат ребер $v_i u_{r1}, v_i u_{r2}$; остальные $2b_r + 2c_r$ паросочетаний содержат только одно из этих ребер). Положим $m_i = |\mathcal{L}_i(G)|$. Тогда общее число паросочетаний в F_r

$$|\mathcal{L}(F_r)| = \sum_{i=0}^{n/2} m_i (a_r + 2b_r + c_r)^{2i} (a_r + 4b_r + 3c_r)^{n-2i}.$$

Следовательно,

$$|\mathcal{L}(F_r)| / (a_r + 4b_r + 3c_r)^n = \sum_{i=0}^{n/2} m_i \left(\frac{a_r + 2b_r + c_r}{a_r + 4b_r + 3c_r} \right)^{2i}. \quad (6)$$

Докажем, что существует такая константа r_0 , определяемая за полиномиальное время, что $d_i \neq d_j$ для любых $i, j > r_0$, где

$$d_r = \frac{a_r + 2b_r + c_r}{a_r + 4b_r + 3c_r}.$$

Поскольку

$$2\left(\frac{1}{d_r} - 1\right)^{-1} - 1 = \frac{a_r + b_r}{c_r + b_r} = \frac{a_r/b_r + 1}{c_r/b_r + 1},$$

то достаточно доказать, что $a_r \setminus b_r$ и $b_r \setminus c_r$ — строго убывающие последовательности при $r > r_0$.

Введем обозначения:

$$B = \begin{pmatrix} 22 & 56 & 36 \\ 14 & 40 & 28 \\ 8 & 24 & 18 \end{pmatrix}, \quad x_r = \begin{pmatrix} a_r \\ b_r \\ c_r \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями находятся следующие величины: характеристический полином матрицы $B/2$ равен $\lambda^3 - 40\lambda^2 + 63\lambda - 8$; собственные значения матрицы B суть $\lambda_1 = 76,72648$, $\lambda_2 = 2,995$, $\lambda_3 = 0,27854$;

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} 2,3576 \\ 1,6611 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} -2,92146 \\ 0,3486 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^3 = \begin{pmatrix} 1,75144 \\ -1,32221 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— собственные векторы матрицы B ; $\alpha_1 = 9,8564$, $\alpha_2 = -0,10937$, $\alpha_3 = 0,25297$ — компоненты разложения вектора x_0 в базисе ξ^1, ξ^2, ξ^3 . Так как

$$x_r = B^r x_0 = B^r \sum_{i=1}^3 \alpha_i \xi^i = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \lambda_i^r \xi^i,$$

то

$$f(r) = \frac{a_r}{b_r} = \frac{\alpha_1 \xi_1^1 + \alpha_2 \xi_1^2 \gamma^r + \alpha_3 \xi_1^3 \Theta^r}{\alpha_1 \xi_2^1 + \alpha_2 \xi_2^2 \gamma^r + \alpha_3 \xi_2^3 \Theta^r},$$

где ξ_i^j — i -я координата вектора ξ^j , $\gamma = \lambda_2/\lambda_1$, $\Theta = \lambda_3/\lambda_1$. Следовательно,

$$\frac{b_r^2 f'(r)}{\gamma^r} = \left(\alpha_2 \xi_1^2 \ln \gamma + \alpha_3 \xi_1^3 \ln \Theta \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right)^r \right) b_r - a_r \left(\alpha_2 \xi_2^2 \ln \gamma + \alpha_3 \xi_2^3 \ln \Theta \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right)^r \right). \quad (7)$$

Так как $\lambda_3/\lambda_2 < 1/10$, то из (7) следует существование такого целого r_1 , что $\text{sign}(f'(r)) = \text{sign}(\alpha_1 \alpha_2 \xi_1^2 \xi_2^1 \ln \gamma - \alpha_1 \alpha_2 \xi_2^2 \xi_1^1 \ln \gamma) < 0$ для $r > r_1$.

Аналогично показывается существование такого целого r_2 , что если $r > r_2$, то $\text{sign}(g'(r)) = \text{sign}(\alpha_1 \alpha_2 \xi_3^1 \xi_2^2 \ln \gamma - \alpha_1 \alpha_2 \xi_3^2 \xi_2^1 \ln \gamma) < 0$, где $g(r) = b_r/c_r$. Положив $r_0 = \max\{r_1, r_2\}$, получим искомое утверждение.

Итак, доказано, что при $r = r_0 + 1, \dots, r_0 + 1 + n/2$ коэффициенты системы линейных уравнений (6) образуют матрицу Вандермонда. Поэтому в силу леммы 1 система разрешима за время, полиномиально зависящее от $|EF_r|$ и n . Это означает полиномиальную сводимость РМ(3) к задаче IPReg, так как $m_{n/2} = |\mathcal{E}(G)|$.

Осталось доказать полиномиальную сводимость IPReg к RES-проблеме в классе бирегулярных графов с вероятностями исправности вершин, равными $1/2$. Для этого возьмем произвольный регулярный граф G и его реберный граф F ; положим $m = |VF|$, $n = |EF|$. Обозначим через $\mathcal{M}_k(F)$ множество вершинных подмножеств в F , каждое из которых покрывает ровно k ребер; $t_k = |\mathcal{M}_k(F)|$. По определению реберных графов F является регулярным графом. Пусть S — произвольное подмножество ребер в EG , T — соответствующее ему вершинное подмножество в реберном графе F . Непосредственно проверяется, что $T \in \mathcal{M}_n(F)$ тогда и только тогда, когда $EG \setminus S \in \mathcal{L}(G)$. Поэтому $t_n = |\mathcal{L}(G)|$. К F добавим n r -элементных множеств V_{ir} , состоящих из новых вершин степени 2, положив каждую вершину из V_{ir} смежной с концевыми вершинами i -го ребра из F . Затем подграф F пополним ребрами до полного подграфа (с множеством вершин VF). Полученный граф обозначим через H_r . Очевидно, что H_r — бирегулярный граф.

Пусть $C(H_r)$ — множество всех связных индуцированных подграфов в H_r , содержащих некоторые вершины из VF (в H_r имеется еще $nr = \left| \bigcup_i V_{ir} \right|$ связных индуцированных одновершинных подграфов). Зададим отображение $\varphi: C(H_r) \rightarrow 2^{VF}$: $\varphi(M) = VF \cap VM$ и выберем произвольное ребро $e_i \in EF$. Если ребро e_i не покрывается множеством $\varphi(M)$, то ввиду связности M имеем $VM \cap V_{ir} = \emptyset$. Если же e_i покрывается множеством $\varphi(M)$, то любое подмножество из V_{ir} (включая и пустое) может принадлежать множеству VM . Отсюда следует, что

$$|\varphi^{-1}(\mathcal{M}_k(F))| = t_k (2^r)^k, \quad |C(H_r)| = \sum_{k=0}^n t_k 2^{rk}$$

или

$$\text{con}(H_r) - nr = \sum_{k=0}^n t_k 2^{rk}, \quad r = 1, \dots, n+1$$

(напомним, что $\text{con}(H_r)$ есть число всех связных индуцированных подграфов в H_r). Теперь из леммы 1 следует полиномиальная сводимость IPReg к задаче определения числа связных индуцированных подграфов

в бирегулярных графах. Но

$$\frac{\text{con}(H_r)}{2^{m+nr}} = \text{Pol}\left(H_r, \frac{1}{2}\right),$$

что и завершает доказательство теоремы 1.

Так как бирегулярный граф является бокс-пороговым графом [12], то из теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. RES-проблема является $\#P$ -полной в классе бокс-пороговых графов, в которых вероятности исправности вершин одинаковы и равны $1/2$.

Так как всякий бирегулярный граф является псевдопороговым, то верно

Следствие 1. В классе псевдопороговых графов RES-проблема является $\#P$ -полной.

3. Полиномиально разрешимые случаи RES-проблемы

Граф G с упорядоченным разбиением $VG = A \cup B$ вершинного множества называется *триадой* и обозначается через (G, A, B) . Множество триад и множество всех графов будем обозначать через \mathcal{P} и \mathcal{I} соответственно. Операция композиции $\circ : \mathcal{P} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ определяется следующим образом: если $VG \cap VH = \emptyset$, $G \in \mathcal{P}$ и $H \in \mathcal{I}$, то

$$(G, A, B) \circ H = G \cup H \cup K_{A, VH},$$

где $K_{A, VH}$ — полный двудольный граф с долями A и VH . Если при этом $H \in \mathcal{P}$, то

$$(G, A, B) \circ (H, C, D) = ((G, A, B) \circ H, A \cup C, B \cup D).$$

Композиция \circ является ассоциативной операцией [3].

Триада (G, A, B) называется *сетевым графом*, если $|A| = |B|$, G — расщепляемый граф с долями A и B , а множество ребер, полученное из EG удалением всех ребер из A , есть совершенное паросочетание в G . Вершины $a \in A$ и $b \in B$ в сетевом графе (G, A, B) (или в дополнительном к сетевому графу (G, A, B)) назовем *соответствующими*, если a и b смежны в G . \bar{G} — граф, дополнительный к G . Триада $\bar{F} = (\bar{G}, A, B)$ называется *дополнительной* к триаде $F = (G, A, B)$.

Введем обозначения: $O_n = (G, \emptyset, B)$, где $n = |B|$ и B — независимое множество в G ; $Q_n = (G, A, \emptyset)$, где $n = |A|$ и A — независимое множество в G ; \mathcal{M} — множество сетевых и дополнительных графов; $P_4 = (G, A, B)$, где $|A| = |B| = 2$ и $(G, A, B) \in \mathcal{M}$; \mathcal{R} — множество

графов, дополнительных к простым циклам и простым цепям; $P_5(C_5)$ — простая 5-вершинная цепь (цикл); если (G, A, B) — триада, то $u_k(G)$ есть число k -вершинных индуцированных подграфов, в которых каждая компонента связности содержит не менее одной вершины из A , а $P_u(G, \bar{p})$ есть вероятность того, что компоненты связности подграфа, индуцированного исправными вершинами, обладают этим свойством; p_v — вероятность исправности вершины v ; $P_f(G, \bar{p}) = \prod_{v \in VG} (1 - p_v)$;

$$\text{Upol}(G, p) = \sum_{k=0}^n u_k(G) p^k (1-p)^{n-k}, \quad n = |VG|.$$

Лемма 2 [4, 7]. Граф G является псевдодоминантно-пороговым тогда и только тогда, когда G представим в виде

$$G = X_1 \circ \dots \circ X_m \circ Y_1 \circ \dots \circ Y_n \circ Z, \quad m \geq 0, \quad n \geq 0,$$

где $X_i \in \{Q_2, Q_1, O_1, P_4\}$, $1 \leq i \leq m$, $Y_j = (F_j, A_j, \emptyset)$, $F_j \in \mathcal{R}$, $1 \leq j \leq n$, $Z \in \mathcal{R} \cup \{P_5\}$, причем это разложение осуществимо за время $O(|VG| + |EG|)$.

Лемма 3 [13]. Граф G является матрогенным тогда и только тогда, когда G представим в виде

$$G = X_1 \circ \dots \circ X_m \circ Y_1 \circ \dots \circ Y_n$$

или

$$G = X_1 \circ \dots \circ X_m \circ Z,$$

где $X_i \in \{Q_1, O_1\} \cup \mathcal{M}$, $1 \leq i \leq m$, $Y_1 = \dots = Y_n = Y$, $Y \in \{Q_2, \overline{O_2}\}$, $Z \in \{C_5\}$, причем это разложение осуществимо за время $O(|VG| + |EG|)$.

Лемма 4. Пусть $G \in \mathcal{P}$. Тогда

$$R_v = (G \circ H, \bar{p}) = R_v(H, \bar{p}) \cdot P_f(G, \bar{p}) + R_v(G, \bar{p}) \cdot P_f(H, \bar{p}) + P_u(G, \bar{p})(1 - P_f(H, \bar{p})). \quad (8)$$

Доказательство. Пусть F — произвольный связный индуцированный подграф в графе $G \circ H$. Тогда $F = (F_1, A, B) \circ F_2$, где F_1 и F_2 — индуцированные подграфы в G и H соответственно. Если $VF_1 = \emptyset$ ($VF_2 = \emptyset$), то F_2 (F_1) — связный индуцированный подграф в H (G), и эта ситуация учитывается в первых двух слагаемых формулы (8). Предположим, что $VF_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. Тогда ввиду связности графа F каждая компонента связности в F_1 должна содержать некоторую вершину из A . При этом F_2 может быть любым (непустым) индуцированным подграфом в H . Эта ситуация учитывается в третьем слагаемом формулы (8). Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $G \in \mathcal{P}$, $m = |VG|$ и $n = |VH|$. Тогда

$$c_k(G \circ H) = c_k(H) + c_k(G) + \sum_{i=1}^{k-1} u_i(G) \binom{n}{k-i}, \quad 1 \leq k \leq m+n. \quad (9)$$

Доказательство. В силу леммы 4 имеем

$$\text{Pol}(G \circ H, p) = \text{Pol}(H, p)(1-p)^m + \text{Pol}(G, p)(1-p)^n + \text{Upol}(G, p)(1-(1-p)^n).$$

Пользуясь этим фактом и тем, что

$$1 - (1-p)^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

получаем (9). Лемма доказана.

Лемма 6. Если A — клика в (G, A, B) , то

$$R_v(G \circ H, \bar{p}) = R_v(H, \bar{p}) \cdot P_f(G, \bar{p}) + R_v(G, \bar{p}),$$

$$c_k(G \circ H) = c_k(H) + \sum_{i=1}^k c_i(G) \binom{n}{k-i}, \quad 1 \leq k \leq m+n.$$

Доказательство. Если A — клика в триаде (G, A, B) , то в любом несвязном индуцированном подграфе графа G есть компонента связности, не содержащая вершин из A . Поэтому $P_u(G, \bar{p}) = R_v(G, \bar{p})$ и первая формула в лемме следует из леммы 4. Вторая формула следует из равенства

$$c_k(G) + \sum_{i=1}^{k-1} c_i(G) \binom{n}{k-i} = \sum_{i=1}^k c_i(G) \binom{n}{k-i}.$$

Лемма 7. Если в триаде (G, A, B) множество B пусто, то

$$R_v(G \circ H, \bar{p}) = R_v(H, \bar{p}) \cdot P_f(G, \bar{p}) + R_v(G, \bar{p}) \cdot P_f(H, \bar{p}) + (1 - P_f(G, \bar{p}))(1 - P_f(H, \bar{p})),$$

$$c_k(G \circ H) = c_k(H) + c_k(G) + \binom{m+n}{k} - \binom{m}{k} - \binom{n}{k}.$$

Если в триаде (G, A, B) множество A пусто, то

$$R_v(G \circ H, \bar{p}) = R_v(H, \bar{p}) \cdot P_f(G, \bar{p}) + R_v(G, \bar{p}) \cdot P_f(H, \bar{p}),$$

$$c_k(G \circ H) = c_k(H) + c_k(G).$$

Справедливость этой леммы непосредственно следует из лемм 4 и 5.

В лемме 8 все индексы приводятся к числам $1, \dots, n$ по модулю n .

Лемма 8. Пусть $H \in \mathcal{R}$ и $VH = \{1, \dots, n\}$, где $n \geq 5$, причем вершины занумерованы так, что вершины i и $i+1$ не смежны, $1 \leq i \leq n$. Тогда

$$R_v(H, \bar{p}) = 1 - \sum_{i=1}^l p_i p_{i+1} p_{i+2} \prod_{j \notin \{i, i+1, i+2\}} (1 - p_j) - \sum_{i=1}^k p_i p_{i+1} \prod_{j \notin \{i, i+1\}} (1 - p_j),$$

$$c_k(H) = \binom{n}{k}, \quad k \neq 2, 3, \quad c_2(H) = \binom{n}{2} - k, \quad c_3(H) = \binom{n}{3} - l,$$

где $l = k = n$, если \bar{H} — цикл, и $l = n - 2$, $k = n - 1$, если \bar{H} — цепь.

Доказательство. Пусть F — произвольный несвязный индуцированный подграф в H . Так как в \bar{F} степени вершин не превосходят 2, то все компоненты связности в F являются 1- или 2-вершинными. Кроме того, так как \bar{F} не содержит треугольников, то имеется не более двух таких компонент. Если бы F состоял из двух 2-вершинных компонент, то \bar{F} содержал бы индуцированный подграф C_4 , что невозможно. Таким образом, либо $VF = \{i, i+1\}$, либо $VF = \{i, i+1, i+2\}$. Остальное очевидно.

Лемма 9. Пусть (G, A, B) — сетевой граф, $A = \{1, \dots, n\}$, $B = \{n+1, \dots, 2n\}$, причем вершины i и $n+i$ являются соответствующими, $1 \leq i \leq n$. Тогда

$$R_v(G, \bar{p}) = \prod_{i=1}^n (1 - (1 - p_i) p_{n+i}) - \prod_{i=1}^{2n} (1 - p_i) + \sum_{i=n+1}^{2n} p_i \prod_{j \neq i} (1 - p_j), \quad (10)$$

$$R_v(\bar{G}, \bar{p}) = 1 - \prod_{i=n+1}^{2n} (1 - p_i) - \sum_{i=1}^n p_i p_{n+i} \prod_{\substack{j \neq n+i \\ j=n+1}}^{2n} (1 - p_j),$$

$$c_1(G) = c_1(\bar{G}) = 2n,$$

а при любом $k > 1$

$$c_k(G) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k-i}, \quad c_k(\bar{G}) = \binom{2n}{k} - \binom{n}{k} - n \binom{n-1}{k-2}.$$

Доказательство. Пусть F — произвольный индуцированный подграф в сетевом графе G . Тогда граф F является связным тогда и только тогда, когда либо $|VF| = 1$, либо $VF \neq \emptyset$ и для каждой вершины $i \in A$

истинна импликация

$$(n + i \in VF) \Rightarrow (i \in VF).$$

Вероятность этого события определяется формулой (10). Поэтому, положив $t = p/(1 - p)$, имеем

$$\begin{aligned} \text{Pol}(G, p) &= (1 - p + p^2)^n - (1 - p)^{2n} + np(1 - p)^{2n-1} \\ &= (1 - p)^{2n}((t^2 + t + 1)^n - 1 + nt) = (1 - p)^{2n} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} t^j - 1 + nt \right). \end{aligned}$$

Следовательно, при любом $k > 1$

$$c_k(G) = \sum_{i+j=k} \binom{n}{i} \binom{i}{j}.$$

Пусть теперь F — несвязный индуцированный подграф в \overline{G} . Так как любые две вершины из B образуют в \overline{G} доминирующее множество, то $|VF \cap B| \leq 1$. При этом если $n + i \in VF \cap B$, то $i \in VF \cap A$. Остальное очевидно.

Теорема 3. В классах псевдодоминантно-пороговых и матрогенных графов RES-проблема разрешима за линейное (относительно размерности графов) время.

Доказательство. Пусть G является либо псевдодоминантно-пороговым, либо матрогенным графом. Тогда в силу лемм 2 и 3 за время $O(|VG| + |EG|)$ осуществимо представление G в виде $G = H_r \circ \dots \circ H_2 \circ H_1$, где

$$H_i \in \{Q_2, Q_1, O_1, \overline{O}_2, P_4, P_5, C_5, \mathcal{M}, \mathcal{R}\}, \quad 1 \leq i \leq r,$$

причем если $i \geq 2$, то $H_i = (F_i, A_i, B_i)$ и либо A_i — клика, либо $A_i = \emptyset$, либо $B_i = \emptyset$ (все эти случаи были охвачены леммами 6 и 7). В силу лемм 8 и 9 величина $R_v(H_i, \overline{p})$, $1 \leq i \leq r$, вычисляется за линейное (относительно размерности H_i) время (если $|VH_i| \leq 5$, то $R_v(H_i, \overline{p})$ вычисляется непосредственно исходя из определения). Но тогда в силу лемм 6 и 7 величины $R_v(H_j \circ \dots \circ H_1, \overline{p})$, $2 \leq j \leq r$, могут быть последовательно вычислены за линейное (относительно размерности графа G) время. Теорема 3 доказана.

Так как матроидальные графы являются матрогенными, а доминантно-пороговые и пороговые графы — псевдодоминантно-пороговыми, то из теоремы 3 вытекают следствия 2 и 3.

Следствие 2. В классах матроидальных и доминантно-пороговых графов RES-проблема разрешима за линейное время.

Следствие 3 [10]. В классе пороговых графов RES-проблема разрешима за линейное время.

Теорема 4. Коэффициенты полинома надежности псевдоминантно-порогового (матрогенного, доминантно-порогового, матрицального, порогового) графа G могут быть вычислены за время $O(|VG|^3)$.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
3. Тышкевич Р. И., Черняк А. А. Декомпозиция графов // Кибернетика. 1985. № 2. С. 67–74.
4. Черняк А. А. Псевдоминантно-пороговые графы // Весці НАН Беларусі. Сер. физ.-мат. наук. 1988. № 4–5. С. 37–43, 18–22.
5. Черняк А. А. Двойственные задачи надежности k -униформных гиперграфов // Докл. НАН Беларусі. 1999. Т. 43, № 2. С. 34–35.
6. Boesch F., Satyanarayana A., Suffel C. L. On residual connectedness network reliability // Reliability of computer and communication networks. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. P. 51–59. (DIMACS. Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.; V. 5.).
7. Chernyak A. A., Chernyak Zh. A. Pseudodominant graphs // Discrete Math. 1990. V. 84, N 2. P. 193–196.
8. Colbourn C. J., Satyanarayana A., Suffel C., Sutner K. Computing residual connectedness reliability for restricted networks // Discrete Appl. Math. 1993. V. 44, N 1–3. P. 221–232.
9. Mahadev N. R., Peled U. N. Threshold graphs and related topics. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1995.
10. Stivaros C. On the residual node connectedness network reliability model. PhD Diss. Stevens Inst. Technol., 1990.
11. Sutner K., Satyanarayana A., Suffel C. The complexity of the residual node connectedness reliability problem // SIAM J. Comput. 1993. V. 20, N 1. P. 149–155.
12. Tyshkevich R. I., Chernyak A. A. Boxthreshold graphs: structure and enumeration // Graphen und Netzwerke — Theorie und Anwendungen: 30 Intern. Wissenschaftliches Kolloquium (Ilmenau, 1985). Ilmenau: Technische Hochschule Ilmenau, 1985. S. 119–121.

13. **Tyshkevich R. I.** Once more on matrogenic graphs // *Discrete Math.* 1984. V. 51, N 1. P. 91–100.
14. **Valiant L.** The complexity of enumeration and reliability problems // *SIAM J. Comput.* 1979. V. 8, N 3. P. 410–421.

Адрес автора:

Белорусский государственный
университет,
220141 Минск, Беларусь.

E-mail:

zhanna.chernyak@usa.net

Статья поступила

11 ноября 1998 г.,
переработанный вариант —
9 марта 1999 г.