ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1999. Серия 1. Том 6, № 3, 87–109

УДК 519.816

О СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧ МИНИМИЗАЦИИ И СЖАТИЯ МОДЕЛЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ВЫБОРА

Л. А. Шоломов

Модель последовательного выбора глубины k по бинарным отношениям $r_1, r_2, \dots, r_k$ на множестве вариантов A каждому $X \subseteq A$ ставит в соответствие его подмножество $C_{r_k}(\dots C_{r_2}(C_{r_1}(X))\dots)$, где $C_r(Y) = \{y \in Y \mid (\forall z \in Y)\, z\bar{r}y\}$, $Y \subseteq A$. Задача минимизации состоит в том, чтобы построить эквивалентную модель наименьшей глубины; задача сжатия ставится аналогично, но построенная модель должна удовлетворять некоторому условию «вложенности». Доказывается, что при $k \geqslant 3$ задача минимизации и задача сжатия моделей глубины k являются NP-трудными (при $k = 2$ они полиномиальны). Исследуются параметры локальных алгоритмов решения этих задач и устанавливается, что задача сжатия разрешима алгоритмами, работающими с окрестностями размера 3, задача минимизации не разрешима ни при каком конечном размере окрестностей. При произвольном k построена модель глубины k, минимизация которой не может быть проведена на основе рассмотрения окрестностей, отличных от всей модели.

Введение

Широкое применение вычислительной техники в процедурах принятия решений приводит к необходимости исследования формальных моделей выбора. Модель выбора M на множестве вариантов A каждому множеству $X \subseteq A$, предъявленному для выбора, ставит в соответствие некоторое подмножество $C_M(X) \subseteq X$ выбранных вариантов и, таким образом, порождает функцию выбора $C_M : 2^A \to 2^A$. Пусть M принадлежит некоторому классу моделей $\mathscr{M}$ и для моделей из $\mathscr{M}$ задана числовая характеристика сложности. Задача минимизации состоит в том, чтобы по модели M найти наиболее простую модель из класса $\mathscr{M}$, реализующую функцию C_M. Отметим, что более простые модели надежнее прогнозируют выбор в новых ситуациях (для распознавания образов подобный факт обоснован в [3]; его аналог для задач выбора имеется в [9]).

В теории выбора базовой моделью считается модель выбора по бинарному отношению. Пусть r — (бинарное) отношение на множестве вариантов A. Для $x, y \in A$ соотношение xry интерпретируется как «вариант x лучше y» и в множество $C_r(X)$ включаются все варианты, лучшие в X по отношению r (т. е. варианты $x \in X$, для которых в X нет таких y, что yrx). Из базовых моделей могут строиться более сложные модели. Одной из них является модель последовательного выбора глубины k. Она задается набором $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ бинарных отношений на A, и выбор из множества вариантов X, $X \subseteq A$, осуществляется за k шагов: вначале выбираются варианты, лучшие в X по отношению r_1, из них выбираются лучшие по r_2 и т. д. и, наконец, лучшие по r_k. Наряду с функцией выбора $C_{\mathbf{r}}$, порождаемой моделью $\mathbf{r} = r_1 r_2 \dots r_k$, можно ввести промежуточные функции $C_{r_1 \dots r_i}$ выбора за i шагов, $i \leqslant k$. Для модели $\mathbf{r}$ ставятся задачи минимизации и сжатия. Первая задача состоит в нахождении эквивалентной (реализующей ту же функцию $C_{\mathbf{r}}$) модели наименьшей глубины, вторая — в нахождении эквивалентной модели наименьшей глубины, которая не порождает новых в сравнении с $\mathbf{r}$ промежуточных функций.

Эти задачи могут быть переформулированы на языке теории графов. Отношению r соответствует ориентированный граф G на множестве вершин A такой, что $(x, y) \in G \Leftrightarrow xry$. Множество $C_G(X)$ вершин, выбранных в графе G из множества $X \subseteq A$, образуется всеми источниковыми (т. е. не имеющими входящих дуг) вершинами подграфа G_X, порожденного множеством X. Модель последовательного выбора, рассматриваемая как набор графов $\mathbf{G} = G_1 G_2 \dots G_k$, реализует функцию выбора $C_{\mathbf{G}}(X) = C_{G_k}(\dots C_{G_2}(C_{G_1}(X)) \dots)$. Задача минимизации состоит в том, чтобы найти последовательность графов $\mathbf{G}'$ наименьшей длины, для которой $C_{\mathbf{G}} = C_{\mathbf{G}'}$. Подобным образом может быть сформулирована и задача сжатия.

Большая часть предшествующих исследований относилась к модели выбора глубины 2. В этом случае задачи минимизации и сжатия совпадают и сводятся к задаче о представимости функции $C_{r_1 r_2}$ одним отношением. В работах [2, 8] (см. также [1, 10]) эта задача решена в постановке, когда r_1 и r_2 — линейные или частичные порядки (там она сформулирована несколько по-иному). Некоторые специальные случаи при условии $r_1 \subseteq r_2$ исследованы в [11, 12]. Эффективный (полиномиальный) алгоритм решения задачи минимизации для общей модели выбора глубины 2 предложен в [9]. Для моделей произвольной глубины k в [9] указан эффективный алгоритм, решающий задачу минимизации почти всегда (но не всегда) при $k = \mathrm{const}$ и растущем числе вариантов n. Там же получена асимптотически точная оценка глубины при $n \to \infty$.

В настоящей работе показано, что задачи минимизации и сжатия моделей глубины k при $k \geqslant 3$ являются NP-трудными (см., например, [4]). Поскольку задачи минимизации и сжатия полиномиально сводятся друг к другу, их временная сложность ведет себя примерно одинаково.

Существенное различие изучаемых задач проявляется при рассмотрении их информационных параметров. Мы применяем подход Ю. И. Журавлева [5, 6], при котором задача характеризуется наименьшим числом d таким, что она может быть решена локальным алгоритмом индекса d, т. е. алгоритмом, имеющим дело с окрестностями порядка d (более подробно об окрестностях см. в [7]). Введенная в данной работе модель отличается от модели локального алгоритма из [5, 6], ориентированной на вычисление предикатов и предполагающей систему окрестностей неизменной. Рассматриваемые нами задачи минимизации и сжатия требуют построения объектов, и в процессе работы алгоритма окрестности меняются в соответствии с преобразованиями модели **r**. Чтобы отметить различие моделей, вместо термина «локальный алгоритм» мы используем термин «локальная процедура».

В работе доказано, что задача сжатия моделей последовательного выбора может быть решена локальными процедурами индекса 3, а задача минимизации не разрешима ни при каком конечном d. Для любых k и d построена модель, глубина k которой не уменьшаема локальными процедурами индекса d, но может быть сокращена до величины d процедурами индекса $d+1$ (за счет увеличения k можно получить сколь угодно большой выигрыш). При $d = k-1$ эта конструкция дает модель глубины k, которая не допускает упрощения процедурами, имеющими дело с любыми окрестностями, отличными от всей модели.

В качестве следствий получен ряд других результатов, относящихся к моделям последовательного выбора. Найден полиномиальный алгоритм, решающий задачу сжатия моделей в случае ацикличных отношений (напомним, что для произвольных отношений она NP-трудна). Доказана NP-трудность задачи эквивалентности моделей и отсутствие конечной полной системы эквивалентных преобразований.

1. Формулировка задач

Задано конечное множество объектов (вариантов) A. Отображение $C : 2^A \to 2^A$ такое, что $C(X) \subseteq X$ для всех $X \in 2^A$, называется *функцией выбора*. Объекты из $C(X)$ считаются *выбранными* из множества X.

Пусть r — иррефлексивное (т. е. удовлетворяющее условию $x\bar{r}x$, $x \in A$) бинарное отношение на A. С ним связывается функция выбора

$$C_r(X) = \{x \in X \mid (\forall y \in X) y\bar{r}x\}.$$

Модель *последовательного выбора* задается набором (бинарных, иррефлексивных) отношений $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$. Модель $\mathbf{r} = r_1 r_2 \ldots r_k$ реализует функцию выбора

$$C_{\mathbf{r}}(X) = C_{r_1 r_2 \ldots r_k}(X) = C_{r_k}(\ldots C_{r_2}(C_{r_1}(X)) \ldots).$$

Число $k = k(\mathbf{r})$ называется *глубиной* модели $\mathbf{r}$. Далее, говоря о моделях, будем иметь в виду модели последовательного выбора.

С моделью $\mathbf{r}$ будем связывать также *усеченные модели* $\mathbf{r}|_i = r_1 \ldots r_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Пусть $\mathscr{C}_{\mathbf{r}} = \{C_{\mathbf{r}|_1}, \ldots, C_{\mathbf{r}|_k}\}$ — множество функций, реализуемых усеченными моделями. Очевидно, что $C_{\mathbf{r}|_1} \supseteq C_{\mathbf{r}|_2} \supseteq \cdots \supseteq C_{\mathbf{r}|_k}$, где запись $C' \supseteq C$ для функций выбора C' и C означает $C'(X) \supseteq C(X)$ для всех $X \subseteq A$. Будем говорить, что модель $\hat{\mathbf{r}}$

- *эквивалентна* модели $\mathbf{r}$, если $C_{\hat{\mathbf{r}}} = C_{\mathbf{r}}$;
- *неотличима* от $\mathbf{r}$, если $k(\hat{\mathbf{r}}) = k(\mathbf{r})$ и $C_{\hat{\mathbf{r}}|_i} = C_{\mathbf{r}|_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k(\mathbf{r})$;
- *вложена* в $\mathbf{r}$, если $\mathscr{C}_{\hat{\mathbf{r}}} \subseteq \mathscr{C}_{\mathbf{r}}$.

Модель $\hat{\mathbf{r}}$ назовем *минимальной* (*кратчайшей*) для $\mathbf{r}$, если она эквивалентна модели $\mathbf{r}$ (эквивалентна и вложена в $\mathbf{r}$) и при этом имеет наименьшую возможную глубину. Задачу построения минимальной (кратчайшей) модели будем называть задачей *минимизации* (*сжатия*) модели. Данная работа посвящена сложностному анализу сформулированных задач.

2. Эквивалентные преобразования моделей

Сначала рассмотрим преобразования неотличимых моделей. Модели $\mathbf{r} = r_1 \ldots r_k$ поставим в соответствие *нижний набор отношений* $\mathbf{r}^- = (r_1^-, \ldots, r_k^-)$ и *верхний набор отношений* $\mathbf{r}^+ = (r_1^+, \ldots, r_k^+)$, положив

$$r_i^- = r_i \setminus \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant i-1} (r_j \cup r_j^{-1}), \quad r_i^+ = r_i \cup \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant i-1} (r_j \cup r_j^{-1}), \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Будем говорить, что элементы x и y *связаны* отношением r, если xry или yrx. В этих терминах отношение r_i^- образовано удалением из r_i пар (x, y) для элементов x и y, связанных каким-либо из предшествующих отношений $r_1, \ldots, r_{i-1}$.

Лемма 1. *Модель $\hat{\mathbf{r}} = \hat{r}_1 \ldots \hat{r}_k$ неотличима от модели $\mathbf{r}$ тогда и только тогда, когда $r_i^- \subseteq \hat{r}_i \subseteq r_i^+$, $1 \leqslant i \leqslant k$.*

Доказательство. (а) Вначале установим неотличимость моделей $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}^-$. Индукцией по i, $1 \leqslant i \leqslant k$, докажем, что $C_{\mathbf{r}|_i}(X) = C_{\mathbf{r}^-|_i}(X)$ для любого $X \subseteq A$. Равенство $C_{\mathbf{r}|_1}(X) = C_{\mathbf{r}^-|_1}(X)$ следует из $r_1 = r_1^-$. Пусть $C_{\mathbf{r}|_{i-1}}(X) = C_{\mathbf{r}^-|_{i-1}}(X)$. Если элементы x и y связаны каким-либо отношением r_j, $1 \leqslant j \leqslant i-1$, то в множестве $X_{i-1} = C_{\mathbf{r}_{i-1}}(X)$ присутствует не более одного из них. Поэтому связь в r_i между x и y не оказывает влияния на выбор $C_{r_i}(X_{i-1})$ и вместо r_i может быть использовано r_i^-. Следовательно,

$$C_{\mathbf{r}|_i}(X) = C_{r_i}(C_{\mathbf{r}|_{i-1}}(X)) = C_{r_i^-}(C_{\mathbf{r}|_{i-1}}(X)) = C_{r_i^-}(C_{\mathbf{r}^-|_{i-1}}(X)) = C_{\mathbf{r}^-|_i}(X).$$

(б) Теперь убедимся, что модели $\mathbf{r}$ и $\hat{\mathbf{r}}$ неотличимы тогда и только тогда, когда $\mathbf{r}^- = \hat{\mathbf{r}}^-$. Если $\mathbf{r}^- = \hat{\mathbf{r}}^-$, то модели $\mathbf{r}$ и $\hat{\mathbf{r}}$ неотличимы, поскольку в силу (а) они неотличимы от моделей $\mathbf{r}^-$ и $\hat{\mathbf{r}}^-$. Предположим, что $\mathbf{r}^- \neq \hat{\mathbf{r}}^-$. Пусть наборы $\mathbf{r}^-$ и $\hat{\mathbf{r}}^-$ впервые различаются в i-м отношении и пусть для определенности $(x,y) \in r_i^- \setminus \hat{r}_i^-$. Тогда x и y не связаны в $r_1^-, \ldots, r_i^-$ и, следовательно, в $\hat{r}_1^-, \ldots, \hat{r}_{i-1}^-$. Взяв $X = \{x,y\}$, получаем $y \notin C_{r_i^-}(\{x,y\}) = C_{\mathbf{r}^-|_i}(\{x,y\})$ и $y \in C_{\hat{r}_i^-}(\{x,y\}) = C_{\hat{\mathbf{r}}^-|_i}(\{x,y\})$. Это означает отличимость $\mathbf{r}^-$ и $\hat{\mathbf{r}}^-$. То же в силу (а) относится к $\mathbf{r}$ и $\hat{\mathbf{r}}$.

Утверждение леммы следует из (б) и легко проверяемого факта, что соотношения $r_i^- \subseteq \hat{r}_i \subseteq r_i^+$, $1 \leqslant i \leqslant k$, необходимы и достаточны для равенства наборов $\mathbf{r}^-$ и $\hat{\mathbf{r}}^-$. Лемма 1 доказана.

Ниже важную роль будут играть два специальных типа моделей. Отношения r и $\hat{r}$ назовем *разделенными*, если $(r \cup r^{-1}) \cap (\hat{r} \cup \hat{r}^{-1}) = \varnothing$ (т. е. элементы, связанные одним из них, не связаны другим). Модель $\mathbf{r}$ последовательного выбора назовем *приведенной*, если все отношения из $\mathbf{r}$ попарно разделены. Пусть $r|_{x,y} = r \cap \{(x,y),(y,x)\}$ — сужение отношения r на множество $\{x,y\}$. Модель $\mathbf{r} = r_1 \ldots r_k$ назовем *канонической*, если $r_i|_{x,y} \neq \varnothing \Longrightarrow r_{i+1}|_{x,y} = r_i|_{x,y}$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $x, y \in A$ (т. е. если x и y связаны некоторым отношением, то они связаны тем же образом и всеми последующими отношениями).

Лемма 2. *Для каждой модели $\mathbf{r}$ существуют единственная неотличимая приведенная модель $\mathbf{r}^0$ и единственная неотличимая каноническая модель $\mathbf{r}^1$. При этом $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}^-$, $\mathbf{r}^1 = (r_1^-, r_1^- \cup r_2^-, \ldots, r_1^- \cup \cdots \cup r_k^-)$.*

Доказательство. Согласно пункту (а) из доказательства леммы 1 модель $\mathbf{r}^-$ неотличима от $\mathbf{r}$. Очевидно, что $\mathbf{r}^-$ является приведенной. Пусть $\hat{\mathbf{r}}$ — приведенная модель глубины k, отличная от $\mathbf{r}^-$. Тогда $\hat{\mathbf{r}}^- = \hat{\mathbf{r}} \neq \mathbf{r}^-$ и в соответствии с пунктом (б) леммы 1 модели $\hat{\mathbf{r}}$ и $\mathbf{r}$ отличимы.

Легко видеть, что модель $\mathbf{r}^1$ удовлетворяет условиям $r_i^- \subseteq r_i^1 \subseteq r_i^+$, $1 \leqslant i \leqslant k$, и по лемме 1 она неотличима от $\mathbf{r}$. Очевидно, что модель $\mathbf{r}^1$ каноническая. Рассмотрим произвольную каноническую модель $\hat{\mathbf{r}}$, неотличимую от $\mathbf{r}$. Ясно, что $\hat{\mathbf{r}}^- = (\hat{r}_1, \hat{r}_2 \setminus \hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_k \setminus \hat{r}_{k-1})$. Из пункта (б) леммы 1 следует, что $\hat{\mathbf{r}}^- = \mathbf{r}^-$. Отсюда можно заключить, что $\hat{\mathbf{r}} = (r_1^-, r_1^- \cup r_2^-, \ldots, r_1^- \cup \cdots \cup r_k^-) = \mathbf{r}^1$. Лемма 2 доказана.

На множестве отношений введем операцию *лексикографии* $r_1 \otimes r_2$, положив $x(r_1 \otimes r_2)y \Leftrightarrow xr_1y \vee y\bar{r}_1x \wedge xr_2y$. Легко проверить, что $(r_1 \otimes r_2) \otimes r_3 = r_1 \otimes (r_2 \otimes r_3)$. Поэтому можно рассматривать многоместную операцию $r_1 \otimes r_2 \otimes \cdots \otimes r_k$, которую будем обозначать через $\otimes\mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = r_1 \ldots r_k$. Отметим, что если набор $\mathbf{r}$ приведен, то $\otimes\mathbf{r}$ совпадает с $\cup\mathbf{r}$, где $\cup\mathbf{r} = r_1 \cup r_2 \cup \cdots \cup r_k$. Нетрудно видеть, что каноническая модель для $\mathbf{r}$ может быть записана в виде

$$\mathbf{r}^1 = (r_1, r_1 \otimes r_2, \ldots, r_1 \otimes r_2 \otimes \cdots \otimes r_k) = (\mathbf{r}|_1, \otimes(\mathbf{r}|_2), \ldots, \otimes(\mathbf{r}|_k)).$$

Пусть задана функция выбора C. Ее *нижней аппроксимацией* (в классе отношений) называется реализуемая некоторым отношением r функция выбора C_r такая, что $C_r \subseteq C$ и для любого отношения r', удовлетворяющего условию $C_{r'} \subseteq C$, выполнено $C_{r'} \subseteq C_r$. Ясно, что нижняя аппроксимация для C, если существует, единственна и однозначно определяет отношение $r : xry \Leftrightarrow y \notin C_r(\{x, y\})$.

Лемма 3. *Для любой модели $\mathbf{r} = r_1 \ldots r_k$ нижняя аппроксимация функции $C_{\mathbf{r}}$ существует и реализуется отношением $\otimes\mathbf{r}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{r}^1 = r_1^1 \ldots r_k^1$ — соответствующая каноническая модель. Тогда $C_{\mathbf{r}^1} = C_{\mathbf{r}}$, $r_1^1 \subseteq \cdots \subseteq r_k^1$ и $r_k^1 = \otimes\mathbf{r}$. Рассмотрим произвольное $X \subseteq A$. Если $x \in X \setminus C_{\mathbf{r}}(X)$, то найдутся $y \in X$ и отношение r_i^1 набора $\mathbf{r}^1$ такие, что $(y, x) \in r_i^1$. В силу $r_i^1 \subseteq \otimes\mathbf{r}$ выполнено $(y, x) \in \otimes\mathbf{r}$, а потому $x \notin C_{\otimes\mathbf{r}}(X)$. Это означает, что $C_{\otimes\mathbf{r}}(X) \subseteq C_{\mathbf{r}}(X)$.

Пусть r' — любое отношение, для которого $C_{r'} \subseteq C_{\mathbf{r}}$, и пусть (x, y) — любая пара из $\otimes\mathbf{r} = r_k^1$. Возьмем отношение r_j^1 из набора $\mathbf{r}^1$, в котором x и y связаны впервые. По свойству каноничности имеем $(x, y) \in r_j^1$ и, следовательно, $y \notin C_{r_j^1}(\{x, y\}) = C_{\mathbf{r}^1}(\{x, y\}) = C_{\mathbf{r}}(\{x, y\})$. Но тогда $y \notin C_{r'}(\{x, y\})$ и поэтому $(x, y) \in r'$. Это означает, что $r' \supseteq \otimes\mathbf{r}$ и $C_{r'} \subseteq C_{\otimes\mathbf{r}}$. Лемма 3 доказана.

Следствие 1. *Если модели $\mathbf{r} = r_1 \ldots r_k$ и $\mathbf{r}' = r_1' \ldots r_l'$ эквивалентны, то $\otimes\mathbf{r} = \otimes\mathbf{r}'$. В частности, если $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ — приведенные модели, то $\cup\mathbf{r} = \cup\mathbf{r}'$, а если канонические, то $r_k = r_l'$.*

Это вытекает из леммы 3 и единственности нижней аппроксимации.

Следствие 2. *Если функция выбора $C_{\mathbf{r}}$, $\mathbf{r} = r_1 \ldots r_k$, представима отношением r, то $r = \otimes\mathbf{r}$ ($r = \cup\mathbf{r}$ для приведенной модели, $r = r_k$ для канонической).*

Этот факт следует из того, что если функция выбора C представима отношением, то нижняя аппроксимация совпадает с C.

Для модели $\mathbf{r} = r_1 \ldots r_k$ через $\{\mathbf{r}\}$ обозначим множество $\{r_1, \ldots, r_k\}$ входящих в нее отношений.

Лемма 4. *Если $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ — канонические модели и $\mathbf{r}'$ вложена в $\mathbf{r}$, то $\{\mathbf{r}'\} \subseteq \{\mathbf{r}\}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{r} = r_1 \dots r_k$ и $\mathbf{r}' = r'_1 \dots r'_{k'}$. Из условия вложенности $\mathscr{C}_{\mathbf{r}'} \subseteq \mathscr{C}_{\mathbf{r}}$ следует, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant k'$, найдется j, $1 \leqslant j \leqslant k$, такое, что $C_{\mathbf{r}'|_i} = C_{\mathbf{r}|_j}$. Эти функции имеют равные нижние аппроксимации, которые по лемме 3 (с учетом каноничности моделей $\mathbf{r}'|_i$ и $\mathbf{r}|_j$) реализуются отношениями r'_i и r_j. Это дает $r'_i = r_j$. Лемма 4 доказана.

Отметим, что лемма 4 справедлива лишь для канонических моделей, а условие $\{\mathbf{r}'\} \subseteq \{\mathbf{r}\}$ не достаточно для вложенности.

Введем операцию *суперпозиции* $C_1 \circ C_2$ функций выбора C_1 и C_2, положив $(C_1 \circ C_2)(X) = C_2(C_1(X))$.

Лемма 5. *Операция суперпозиции ассоциативна, т. е.*

$$(C_1 \circ C_2) \circ C_3 = C_1 \circ (C_2 \circ C_3).$$

Действительно, всякая функция выбора представляет собой отображение $2^A \to 2^A$, а суперпозиция соответствует произведению отображений, которое, как известно, ассоциативно.

В силу леммы 5 можно рассматривать многоместную операцию $C_1 \circ C_2 \circ \dots \circ C_k$, при выполнении которой допускается произвольная расстановка скобок. Тогда функция последовательного выбора может быть записана в виде $C_{\mathbf{r}} = C_{r_1} \circ C_{r_2} \circ \dots \circ C_{r_k}$. Фрагмент $r_i r_{i+1} \dots r_j$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, модели $\mathbf{r} = r_1 \dots r_k$ будем обозначать $\mathbf{r}|_j^i$, а числа i и j будем называть *границами* фрагмента (левой и правой). Из $\mathbf{r} = (\mathbf{r}|_i^1, \mathbf{r}|_j^{i+1}, \mathbf{r}|_k^{j+1})$ и ассоциативности суперпозиции следует, что

$$C_{\mathbf{r}} = C_{\mathbf{r}|_i^1} \circ C_{\mathbf{r}|_j^{i+1}} \circ C_{\mathbf{r}|_k^{j+1}}. \tag{1}$$

Пусть заданы последовательности отношений $\mathbf{f}' = r'_1 \dots r'_u$ и $\mathbf{f}'' = r''_1 \dots r''_v$ и модель $\mathbf{r}$ содержит фрагмент $\mathbf{f}'$, т. е. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \mathbf{f}' \mathbf{r}_2$ при некоторых $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ (возможно, пустых). Будем говорить, что к модели $\mathbf{r}$ применено *локальное преобразование* $\mathbf{f}' \to \mathbf{f}''$, если фрагмент $\mathbf{f}'$ в $\mathbf{r}$ заменен фрагментом $\mathbf{f}''$. Результатом является модель $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_1 \mathbf{f}'' \mathbf{r}_2$. Локальное преобразование $\mathbf{f}' \to \mathbf{f}''$ назовем *корректным*, если оно переводит всякую модель (к которой преобразование применимо) в эквивалентную.

Лемма 6. *Локальное преобразование $\mathbf{f}' \to \mathbf{f}''$ корректно тогда и только тогда, когда $C_{\mathbf{f}'} = C_{\mathbf{f}''}$.*

Доказательство. Если $C_{\mathbf{f}'} = C_{\mathbf{f}''}$, то, используя введенные выше обозначения и (1), получаем

$$C_{\hat{\mathbf{r}}} = C_{\mathbf{r}_1} \circ C_{\mathbf{f}''} \circ C_{\mathbf{r}_2} = C_{\mathbf{r}_1} \circ C_{\mathbf{f}'} \circ C_{\mathbf{r}_2} = C_{\mathbf{r}}.$$

В случае $C_{\mathbf{f}'} \neq C_{\mathbf{f}''}$ применение преобразования $\mathbf{f}' \to \mathbf{f}''$ к модели $\mathbf{r} = \mathbf{f}'$ приводит к неэквивалентной модели $\mathbf{f}''$. Лемма 6 доказана.

3. Анализ задач на NP-трудность и полиномиальность

Напомним ряд известных понятий. *Произведением отношений* r_1 и r_2 называется отношение $r_1 \cdot r_2$ такое, что $x(r_1 \cdot r_2)y \Leftrightarrow \exists z(xr_1z \wedge zr_2y)$. Отношение r *ациклично*, если в нем отсутствуют *циклы* $x_1rx_2 \wedge x_2rx_3 \wedge \dots \wedge x_{s-1}rx_s \wedge x_srx_1$, $s \geqslant 1$. Для $x \in A$, $Y \subseteq A$ и отношения r положим $r^{-1}(x) = \{y \mid yrx\}$, $r|_Y = r \cap Y^2$ (сужение r на Y).

Лемма 7. *Если $\mathbf{r} = r_1r_2$ — приведенная модель глубины 2, то для представимости функции $C_{\mathbf{r}}$ отношением необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$r_1 \cdot r_2 \subseteq r_1 \cup r_2 \tag{2}$$

и чтобы для каждого $x \in A$ отношение $r_1|_{r_2^{-1}(x)}$ (сужение r_1 на множество $r_2^{-1}(x)$) было ацикличным.

Доказательство. Необходимость. Если функция выбора $C_{\mathbf{r}}$ представима отношением r, то в силу следствия 2 имеем $r = r_1 \otimes r_2 = r_1 \cup r_2$.

Предположим, что (2) нарушено и x, y, z таковы, что xr_1y, yr_2z и $x\bar{r}z$. Положим $X = \{x, y, z\}$. Из $(y, z) \in r_2 \subseteq r$ следует, что $z \notin C_r(X)$. С другой стороны, $x\bar{r}z$ влечет $x\bar{r}_1z$, а из yr_2z и разделенности r_1 и r_2 следует $y\bar{r}_1z$. Поэтому $z \in C_{r_1}(X)$. С учетом соотношения $y \notin C_{r_1}(X)$, вытекающего из xr_1y, и соотношения $x\bar{r}_2z$, справедливого в силу $r_2 \subseteq r$ и $x\bar{r}z$, получаем $z \in C_{r_2}(C_{r_1}(X)) = C_{\mathbf{r}}(X)$. Это означает, что $C_{\mathbf{r}} \neq C_r$ и функция выбора $C_{\mathbf{r}}$ не представима отношением.

Предположим, что при некотором x отношение $r_1|_{r_2^{-1}(x)}$ содержит цикл, т. е. имеются $x_1, \dots, x_s \in r_2^{-1}(x)$ такие, что $x_1r_1x_2 \wedge \dots \wedge x_{s-1}r_1x_s \wedge x_sr_1x_1$. Положим $X = \{x, x_1, \dots, x_s\}$. Так как x связан в r_2 с $x_1, \dots, x_s$, а отношения r_1 и r_2 разделены, то в r_1 отсутствуют пары $(x_1, x), \dots, (x_s, x)$ и, следовательно, $x \in C_{r_1}(X)$. В то же время ясно, что $x_1, \dots, x_s \notin C_{r_1}(X)$, а потому $C_{\mathbf{r}}(X) = C_{r_1}(X) = \{x\}$. Но из $(x_1, x) \in r_1 \cup r_2 = r$ вытекает $x \notin C_r(X)$. Это дает $C_{\mathbf{r}} \neq C_r$ и означает непредставимость функции $C_{\mathbf{r}}$ отношением.

Достаточность. Пусть модель $\mathbf{r}$ удовлетворяет условиям леммы. Докажем, что $C_{\mathbf{r}} = C_r$, где $r = r_1 \cup r_2$. В силу леммы 3 функция выбора C_r является нижней аппроксимацией. Поэтому достаточно убедиться, что $C_{\mathbf{r}} \subseteq C_r$.

Рассмотрим множество X и элемент $x \in X$ такие, что $x \notin C_r(X)$. Предположим, что $x \in C_{\mathbf{r}}(X)$. Из $x \notin C_r(X)$ следует наличие в X элемента x_1 такого, что x_1rx. При этом условие $x \in C_{\mathbf{r}}(X)$ может быть удовлетворено лишь тогда, когда x_1r_2x и существует $x_2 \in X$ такой, что $x_2 r_1 x_1$. Из $x_2 r_1 x_1$, $x_1 r_2 x$ и (2) следует $x_2 r x$. Заменяя в предыдущих рассуждениях x_1 на x_2, придем к $x_2 r_2 x$ и убедимся в существовании элемента x_3 такого, что $x_3 r_1 x$, и так далее. Поскольку множество A конечно, в последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$ встретятся повторяющиеся элементы. Если $x_u = x_v$, $u < v$, то в r_1 имеется цикл $x_u r_1 x_{u+1} r_1 \ldots r_1 x_{v-1} r_1 x_u$ и при этом $x_u, \ldots, x_{v-1} \in r_2^{-1}(x)$. Это противоречит ацикличности отношения $r_1|_{r_2^{-1}(x)}$. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Если* $\mathbf{r} = r_1 r_2 r_3$ *— приведенная модель глубины 3, то для представимости функции* $C_{\mathbf{r}}$ *моделью* $\mathbf{r}' = r_1 r$ *при некотором* r *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$r_2 \cdot r_3 \subseteq r_1 \cup r_1^{-1} \cup r_2 \cup r_3 \tag{3}$$

и того, чтобы для каждого $x \in A$ *всякий цикл отношения* $r_2|_{r_3^{-1}(x)}$ *(сужения* r_2 *на множество* $r_3^{-1}(x)$*) проходил через некоторую пару элементов, связанных в* r_1.

Доказательство. Необходимость. Модель $\mathbf{r}' = r_1 r$ можно считать приведенной. Если $\mathbf{r}'$ эквивалентна $\mathbf{r}$, то по следствию 1 выполнено $r_1 \cup r_2 \cup r_3 = r_1 \cup r$ и $r = r_2 \cup r_3$ в силу приведенности моделей.

Допустим, что (3) нарушено и для некоторых x, y, z выполнено $x r_1 y$, $y r_2 z$ и $x(r_1 \cup r_1^{-1} \cup r_2 \cup r_3)z$. Тогда x и z не связаны в r_1 и $x\bar{r}z$. Положим $X = \{x, y, z\}$. Как и при доказательстве леммы 7, можно проверить, что $C_{r_3}(C_{r_2}(X)) \neq C_r(X)$. Из приведенности $\mathbf{r}$ следует, что в r_1 элемент x не связан с y, а y с z. Отсюда с учетом несвязанности x и z вытекает $C_{r_1}(X) = X$. Следовательно,

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{r}}(X) = C_{r_3}(C_{r_2}(C_{r_1}(X))) = C_{r_3}(C_{r_2}(X)) \\ \neq C_r(X) = C_r(C_{r_1}(X)) = C_{\mathbf{r}'}(X), \end{aligned} \tag{4}$$

т. е. $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ неэквивалентны.

Предположим, что при некотором x отношение $r_2|_{r_3^{-1}(x)}$ содержит цикл, элементы которого попарно не связаны в r_1, т. е. в $r_3^{-1}(x)$ имеются такие $x_1, \ldots, x_s$, что $x_1 r_2 x_2 \wedge \cdots \wedge x_{s-1} r_2 x_s \wedge x_s r_2 x_1$ и $x_i \bar{r}_1 x_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant s$. Из приведенности $\mathbf{r}$ и из $x r_3 x_1, \ldots, x r_3 x_s$ следует, что x не связан в r_1 с $x_1, \ldots, x_s$. Положим $X = \{x, x_1, \ldots, x_s\}$. Тогда $C_{r_1}(X) = X$. Как и при доказательстве леммы 7, можно проверить, что $C_{r_3}(C_{r_2}(X)) \neq C_r(X)$. После этого неэквивалентность моделей $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ вытекает из цепочки соотношений (4).

Достаточность. Пусть условия леммы 8 выполнены. Рассмотрим произвольное $X \subseteq A$ и положим $Y = C_{r_1}(X)$, $\hat{r}_2 = r_2|_Y$, $\hat{r}_3 = r_3|_Y$, $\hat{r} = r|_Y$. Для любого x отношение $\hat{r}_2|_{\hat{r}_3^{-1}(x)}$ ациклично, иначе отношение $r_2|_{r_3^{-1}(x)}$ содержит цикл, все элементы которого попарно не связаны в r_1

(множество Y не содержит связанных в r_1 элементов). Условие $\hat{r}_2 \cdot \hat{r}_3 \subseteq \hat{r}_2 \cup \hat{r}_3$ вытекает из (3) и несвязанности в r_1 элементов множества Y. Применив к $\hat{r}_2$ и $\hat{r}_3$ лемму 7, заключаем, что $C_{\hat{r}_3}(C_{\hat{r}_2}(Z)) = C_{\hat{r}}(Z)$ для любого $Z \subseteq A$. Следовательно,

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{r}}(X) &= C_{r_3}(C_{r_2}(C_{r_1}(X))) = C_{r_3}(C_{r_2}(Y)) = C_{r_3|_Y}(C_{r_2|_Y}(Y)) \\ &= C_{\hat{r}_3}(C_{\hat{r}_2}(Y)) = C_{\hat{r}}(Y) = C_{r|_Y}(Y) = C_r(Y) = C_r(C_{r_1}(X)) = C_{\mathbf{r}'}(X). \end{aligned}$$

Лемма 8 доказана.

Сформулируем основное утверждение данного раздела. Понятия NP-полноты, NP-трудности и полиномиальности (полиномиальной решаемости) задач предполагаются известными (см., например, [4]).

Теорема 1. (а) *При любом $k \geqslant 3$ задачи сжатия и минимизации моделей последовательного выбора глубины k являются* NP*-трудными.*

(б) *При $k = 2$ эти задачи полиномиальны.*

Доказательство. (а) Сначала рассмотрим случай $k = 3$. NP-трудность задач сжатия и минимизации будем доказывать путем сведения к ним NP-полной задачи ПУТЬ С ЗАПРЕЩЕННЫМИ ПАРАМИ (задача ТГ 54 в [4]). Будем использовать специальный случай этой задачи (см. Комментарий к ТГ 54). Заданы ациклический ориентированный граф $G \subseteq V^2$, множество $U = \{(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)\}$ пар вершин из V и две выделенные вершины $s, t \in V$. Требуется узнать, существует ли в G ориентированный путь из s в t, содержащий не более одной вершины из каждой пары, входящей в U. Можно считать, что граф G не содержит дуг $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m), (b_1, a_1), \dots, (b_m, a_m)$ (иначе их можно удалить), а множество U не содержит взаимно обратных пар (a_i, b_i) и (b_i, a_i).

Пусть $V = \{x_1, \dots, x_n\}$. Введем элементы $x'_1, \dots, x'_n$, z и положим $A = \{x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n, z\}$. Построим на A модель последовательного выбора $\mathbf{r} = r_1 r_2 r_3$, взяв $r_1 = \{(x'_i, x_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup U$, $r_2 = G \cup \{(t, s)\}$, $r_3 = \{(x_i, z),\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Легко проверить, что модель $\mathbf{r}$ является приведенной.

Рассмотрим произвольную приведенную модель $\mathbf{r}' = r'_1 \dots r'_l$, реализующую функцию выбора $C_{\mathbf{r}}$. По следствию 1 выполнено равенство $r'_1 \cup \dots \cup r'_l = r_1 \cup r_2 \cup r_3$. Для каждой пары $(x_i, y) \in r_2 \cup r_3$, где $y \in V \cup \{z\}$, имеется пара $(x'_i, x_i) \in r_1 \setminus U$, расположенная в модели $\mathbf{r}'$ строго раньше (т. е. в отношении с меньшим номером), чем (x_i, y). Это следует из $C(\{x'_i, x_i, y\}) = \{x'_i, y\}$, в чем можно убедиться непосредственно. Кроме того, каждая пара $(a_j, b_j) \in U$ расположена в $\mathbf{r}'$ в том же отношении, что и пара $(a'_j, a_j) \in r_1 \setminus U$, поскольку $C(\{a'_j, a_j, b_j\}) = \{a'_j\}$ и $(a'_j, b_j) \notin r_1 \cup r_2 \cup r_3$. Отсюда следует, что если для функции выбора $C_{\mathbf{r}}$ имеется модель $\mathbf{r}'$ глубины 2, то $\mathbf{r}' = (r_1, r_2 \cup r_3)$.

Применительно к модели $\mathbf{r}$ воспользуемся леммой 8. Из вида отношений r_2 и r_3 следует, что $r_2 \cdot r_3 \subseteq r_3$. Поэтому (3) выполнено. Так как единственным непустым множеством вида $r_3^{-1}(x)$ является $r_3^{-1}(y) = V$, то функция $C_{\mathbf{r}}$ представима моделью $(r_1, r_2 \cup r_3)$ тогда и только тогда, когда в $G \cup \{(t,s)\}$ имеется цикл, не проходящий ни через одну пару вершин из U. Поскольку граф G ацикличен, этот цикл должен содержать дугу (t,s), т. е. в G должен присутствовать ориентированный путь из s в t. Таким образом, задача ПУТЬ С ЗАПРЕЩЕННЫМИ ПАРАМИ сведена к задаче минимизации модели глубины 3, что доказывает NP-трудность последней. То же относится к задаче сжатия модели глубины 3, поскольку модель $(r_1, r_2 \cup r_3)$ является кратчайшей для $\mathbf{r}$.

Теперь рассмотрим произвольное $k > 3$; пусть $k = 3 + h$. Возьмем построенную выше модель $\mathbf{r} = r_1 r_2 r_3$ глубины 3 на множестве A. Введем элементы $y_1, y_2, \ldots, y_{h+1}$ и положим $A' = A \cup \{y_1, \ldots, y_{h+1}\}$. По $\mathbf{r}$ построим модель $\mathbf{r}' = r'_1 \ldots r'_{h+1} \hat{r}_1 r_2 r_3$ глубины k на A', где $r'_j = \{(y_j, y_{j+1})\}$, $1 \leqslant j \leqslant h$, $\hat{r}_1 = r_1 \cup \{(y_{h+1}, x'_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Поскольку $C_{\mathbf{r}'}(\{y_j, y_{j+1}, y_{j+2}\}) = \{y_j, y_{j+2}\}$ и $C_{\mathbf{r}'}(\{y_h, y_{h+1}, x'_i\}) = \{y_h, x'_i\}$, во всякой модели для функции выбора $C_{\mathbf{r}'}$ пара (y_j, y_{j+1}) предшествует паре (y_{j+1}, y_{j+2}), $1 \leqslant j \leqslant h-1$, а пара (y_h, y_{h+1}) — парам (y_{h+1}, x'_i), $1 \leqslant i \leqslant n$. Отсюда следует, что модель $\mathbf{r}'$ допускает минимизацию и сжатие тогда и только тогда, когда минимизацию и сжатие допускает модель $\mathbf{r}$. Это доказывает NP-трудность рассматриваемых задач при произвольном $k \geqslant 3$.

(б) Очевидно, что при $k = 2$ задачи минимизации и сжатия моделей совпадают. Эффективный (полиномиальный) способ проверки реализуемости функции выбора $C_{r_1 r_2}$ одним отношением r ($r = r_1 \cup r_2$) может быть основан на лемме 7. Ясно, что условия (2) допускают эффективную проверку, а вопрос о существовании в графе (отношении) цикла может быть решен с помощью следующей эффективной процедуры. Вершину графа назовем *источником* (*стоком*), если она не имеет входящих (исходящих) дуг. В графе будем последовательно устранять (в любом порядке) источники и стоки вместе с инцидентными им дугами, пока возможно. Исходный граф содержит цикл тогда и только тогда, когда полученный в результате граф непуст. Действительно, если граф непуст, то, двигаясь из какой-либо вершины произвольным образом вдоль дуг (пока возможно) и устраняя пройденные дуги, мы окажемся в вершине, выход из которой невозможен. Это значит, что вершина посещалась, т. е. пройден ориентированный цикл. Теорема 1 доказана.

Замечание. 1. Поскольку для построенной в пункте (а) модели $\mathbf{r} = r_1 r_2 r_3$ возможность минимизации равносильна ее эквивалентности модели $(r_1, r_2 \cup r_3)$ или, что то же самое, вложенности в нее модели

$(r_1, r_2 \cup r_3)$, вытекает NP-полнота задач об эквивалентности и о вложенности моделей. Задача о неотличимости моделей полиномиальна при любом k (см. лемму 1).

2. В [9] полиномиальность задачи минимизации моделей глубины 2 доказана другим методом, использующим логическое представление моделей выбора.

4. Локальная процедура сжатия моделей

Индексом локального преобразования $\mathbf{f}' \to \mathbf{f}''$ будем называть максимум из длин наборов отношений $\mathbf{f}'$ и $\mathbf{f}''$. Далее, не оговаривая особо, будем рассматривать только корректные локальные преобразования. Пересекающиеся фрагменты $\mathbf{f}'$ и $\mathbf{f}''$ модели $\mathbf{r}$ будем называть *сцепленными*.

Локальная процедура осуществляется шагами, на каждом из которых к фрагменту модели, называемому *активным* на данном шаге, применяется некоторое локальное преобразование и указывается один из сцепленных с ним фрагментов, активный на следующем шаге. Процедура может находиться в конечном числе (*внутренних*) *состояний*, одно из которых является *заключительным*. Опишем работу процедуры на шаге t $(t = 1, 2, \dots)$. Пусть $\mathbf{r}_t$ — модель, полученная к шагу t, $\mathbf{f}_t$ — ее активный фрагмент и q_t — состояние на шаге t. Если q_t — заключительное состояние, процедура останавливается и ее результатом считается модель $\mathbf{r}_t$. В противном случае по паре $(\mathbf{f}_t, q_t)$ указываются

- локальное преобразование $\mathbf{f}' \to \mathbf{f}''$ $(\mathbf{f}' = \mathbf{f}_t)$, выполняемое на шаге t;
- границы нового активного фрагмента $\mathbf{f}_{t+1}$, сцепленного с $\mathbf{f}''$ в модели $\mathbf{r}_{t+1}$ (полученной из $\mathbf{r}_t$ применением локального преобразования $\mathbf{f}' \to \mathbf{f}''$);
- новое состояние q_{t+1}

и осуществляется переход к шагу $t+1$. Начальное состояние q_1 и границы начального активного фрагмента $\mathbf{f}_1$ заданы заранее, а в качестве $\mathbf{r}_1$ берется исходная модель $\mathbf{r}$.

Пару $(\mathbf{r}_t, f_t)$ будем называть *конфигурацией* на шаге t и представлять путем заключения фрагмента $\mathbf{f}_t$ модели $\mathbf{r}_t$ в скобки (например, запись $r_3(r_2r_3)r_1r_4$ соответствует случаю $\mathbf{r}_t = r_3r_2r_3r_1r_4$, $\mathbf{f}_t = r_2r_3$).

Локальной процедурой индекса d называется локальная процедура, в которой все локальные преобразования имеют индекс не выше d. Задачу преобразования моделей назовем

- *d-разрешимой*, если для нее существует локальная процедура индекса d;
- *строго d-разрешимой*, если она d-разрешима, но не $(d-1)$-разрешима;

- *локально неразрешимой*, если ни при каком конечном d она не является d-разрешимой.

Лемма 9. *Задачи построения по модели* $\mathbf{r}$ *канонической и приведенной моделей строго 2-разрешимы.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{r} = r_1 \dots r_k$, $\mathbf{r}^1 = r_1^1 \dots r_k^1$ и $r = r_1^0 \dots r_k^0$ — исходная, каноническая и приведенная модели соответственно. Тогда

$$r_1^1 = r_1,\ r_2^1 = r_1^1 \otimes r_2,\ r_3^1 = r_2^1 \otimes r_3,\ \dots,\ r_k^1 = r_{k-1} \otimes r_k$$

и модель $\mathbf{r}^1$ может быть получена из модели $\mathbf{r}$ применением преобразований вида $r'r'' \to (r', r' \otimes r'')$ при движении активного фрагмента слева направо. Далее с учетом соотношений

$$r_k^0 = r_k^1 \setminus r_{k-1}^1,\ r_{k-1}^0 = r_{k-1}^1 \setminus r_{k-2}^1,\ \dots,\ r_2^0 = r_2^1 \setminus r_1^1,\ r_1^0 = r_1^1$$

при движении активного фрагмента справа налево модель $\mathbf{r}^1$ может быть переведена в $\mathbf{r}^0$ с помощью преобразований вида $r'r'' \to (r', r'' \setminus r')$. Это означает 2-разрешимость указанных задач. Их 1-неразрешимость очевидна. Лемма 9 доказана.

Учитывая лемму 9, далее будем иметь дело лишь с каноническими либо приведенными моделями. Модель $\mathbf{r}$ назовем *избыточной*, если для некоторых i и j, $j > i$, справедливо равенство $C_{\mathbf{r}|_i} = C_{\mathbf{r}|_j}$. В этом случае отношения $r_{i+1}, \dots, r_j$ могут быть удалены без изменения множества $\mathscr{C}_{\mathbf{r}}$. Легко доказать, что равенство $C_{\mathbf{r}|_i} = C_{\mathbf{r}|_j}$ для приведенной модели $\mathbf{r}$ эквивалентно условиям $r_{i+1} = \dots = r_j = \varnothing$, а для канонической модели $\mathbf{r}$ — условиям $r_i = r_{i+1} = \dots = r_j$. Ясно, что избыточные отношения $r_{i+1}, \dots, r_j$ могут быть устранены из канонической либо приведенной модели с помощью локальной процедуры индекса 2. Далее будем считать модели неизбыточными.

Если $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ — канонические модели и $\mathbf{r}'$ вложена в $\mathbf{r}$, то (при условии их неизбыточности) согласно лемме 4 имеем

$$\mathbf{r}' = r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_u}, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_u \leqslant k, \tag{5}$$

т. е. $\mathbf{r}'$ может быть образована из $\mathbf{r}$ удалением фрагментов $\mathbf{r}|_{i_j}^{i_{j+1}-1}$, $i_{j+1} > i_j + 1$. Фрагмент $\mathbf{r}|_i^j$, $j < k$, канонической модели $\mathbf{r}$ (неизбыточной) назовем *устранимым*, если модель $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}|_{i-1}, \mathbf{r}|_{j+1}^k)$ вложена в $\mathbf{r}$ (из $j < k$ и леммы 3 следует эквивалентность моделей $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$). Можно говорить и об устранимости отдельных отношений, рассматривая их как фрагменты длины 1.

Лемма 10. *Если фрагмент* $\mathbf{r}|_i^j$ *канонической модели* $\mathbf{r}$ *устраним, то отношение* r_j *устранимо из* $\mathbf{r}$.

Доказательство. Положим $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}|_{i-1}$ и $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}|_i^{j-1}$. Достаточно установить эквивалентность моделей $\mathbf{r}_1 r_{j+1}$ и $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 r_{j+1}$.

Из леммы 3 и $r_j \otimes r_{j+1} = r_{j+1}$, $\otimes(\mathbf{r}_2 r_{j+1}) = r_{j+1}$ следует, что $C_{r_{j+1}}$ есть нижняя аппроксимация функций $C_{r_j r_{j+1}}$ и $C_{\mathbf{r}_2 r_{j+1}}$. Поэтому $C_{r_j r_{j+1}} \geqslant C_{r_{j+1}}$ и $C_{\mathbf{r}_2 r_{j+1}} \geqslant C_{r_{j+1}}$. Следовательно,

$$C_{\mathbf{r}_2 r_j r_{j+1}} = C_{\mathbf{r}_2} \circ C_{r_j r_{j+1}} \geqslant C_{\mathbf{r}_2} \circ C_{r_{j+1}} = C_{\mathbf{r}_2 r_{j+1}} \geqslant C_{r_{j+1}}.$$

Отсюда вытекают соотношения

$$C_{\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 r_j r_{j+1}} \geqslant C_{\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 r_{j+1}} \geqslant C_{\mathbf{r}_1 r_{j+1}}.$$

Так как фрагмент $\mathbf{r}_2 r_j = \mathbf{r}|_i^j$ устраним, модели $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 r_j r_{j+1}$ и $\mathbf{r}_1 r_{j+1}$ эквивалентны и неравенства могут быть заменены на равенства. Это дает $C_{\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 r_{j+1}} = C_{\mathbf{r}_1 r_{j+1}}$, что означает эквивалентность моделей $\mathbf{r}_1 r_{j+1}$ и $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 r_{j+1}$. Лемма 10 доказана.

Замечание. Лемма 10 гарантирует устранимость из $\mathbf{r}$ заключительного отношения r_j фрагмента $\mathbf{r}|_i^j$. Начальное отношение r_i может быть неустранимым. Рассмотрим на множестве $A = \{x, y, z\}$ каноническую модель $\mathbf{r} = r_1 r_2 r_3$, $r_1 = \{(y,x)\}$, $r_2 = \{(y,x),(x,z)\}$, $r_3 = \{(y,x),(x,z),(y,z),(z,y)\}$. Можно проверить, что $C_{\mathbf{r}} = C_{r_3}$, а потому фрагмент $r_1 r_2$ устраним из $\mathbf{r}$ (то же по лемме относится к отношению r_2). Но r_1 неустранимо, поскольку $C_{\mathbf{r}}(A) = \varnothing \neq C_{r_2 r_3}(A) = \{y\}$.

Лемма 11. *Отношение r_i, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, канонической модели $\mathbf{r} = r_1 \ldots r_k$ устранимо тогда и только тогда, когда r_i устранимо в модели $\mathbf{r}' = r_{i-1} r_i r_{i+1}$ глубины 3, где $r_0 = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть r_i устранимо из $\mathbf{r}$. Рассмотрим произвольное $X \subseteq A$ и положим $Y = C_{r_{i-1}}(X)$. Поскольку $C_{r_{i-1}}(Y) = Y$ и $C_{r_{i-1}}$ — нижняя аппроксимация функции $C\mathbf{r}|_{i-1}$, выполнено $Y \supseteq C_{\mathbf{r}|_{i-1}}(Y) \supseteq Y$, т. е. $C_{\mathbf{r}|_{i-1}}(Y) = Y$. Учитывая устранимость r_i из $\mathbf{r}$, имеем

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{r}'}(X) &= C_{r_{i+1}}(C_{r_i}(C_{r_{i-1}}(X)) = C_{r_{i+1}}(C_{r_i}(Y)) = C_{r_{i+1}}(C_{r_i}(C_{\mathbf{r}|_{i-1}}(Y))) \\ &= C_{\mathbf{r}|_{i+1}}(Y) = C_{r_{i+1}}(C_{\mathbf{r}|_{i-1}}(Y)) = C_{r_{i+1}}(Y) = C_{r_{i+1}}(C_{r_{i-1}}(X)). \end{aligned}$$

В силу произвольности X это означает устранимость r_i из $\mathbf{r}'$.

Обратно, если r_i устранимо из $\mathbf{r}'$, то

$$C_{\mathbf{r}|_{i+1}} = C_{\mathbf{r}|_{i-2}} \circ C_{\mathbf{r}'} = C_{\mathbf{r}|_{i-2}} \circ C_{r_{i-1} r_{i+1}} = C_{\mathbf{r}_{i-1} r_{i+1}}.$$

Отсюда следует устранимость r_i из $\mathbf{r}$. Лемма 11 доказана.

Для канонической модели $\mathbf{r}$ обозначим через $\mathscr{R} = \mathscr{R}(\mathbf{r})$ множество моделей, которые вложены в $\mathbf{r}$ и эквивалентны ей. Вложенные модели имеют вид (5), и для них будем использовать обозначение $\mathbf{r}[I]$, где

$I = i_1 i_2 \dots i_u$. Из эквивалентности $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}[I]$ в силу следствия 1 вытекает $i_u = k$. С числом h, $1 \leqslant h \leqslant k$, и моделью $\mathbf{r}[I]$ свяжем *левое сечение* $\mathbf{r}[I,h] = r_{i_1} \dots r_{i_a}$ и *правое сечение* $\mathbf{r}[h,I] = r_{i_{a+1}} \dots r_{i_u}$, где $a = \mu(h,I)$, $\mu(h,I) = \max\{s \mid i_s \leqslant h,\ 1 \leqslant s \leqslant u\}$. В случае $i_1 > h$ $(i_u \leqslant h)$ левое (правое) сечение считается пустым. Моделям $\mathbf{r}[I]$, $\mathbf{r}[J]$ и числу h поставим в соответствие модель $\mathbf{r}[I,h,J] = \mathbf{r}[I,h]\mathbf{r}[h,J]$ — результат приписывания к левому сечению модели $\mathbf{r}[I]$ правого сечения модели $\mathbf{r}[J]$.

Лемма 12. *Если* $\mathbf{r}[I]$, $\mathbf{r}[J] \in \mathscr{R}$ *и* $i_{\mu(h,I)} \geqslant j_{\mu(h,J)}$, *то* $\mathbf{r}[I,h,J] \in \mathscr{R}$.

Доказательство. Пусть

$$I = i_1 i_2 \dots i_u, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_u = k, \tag{6}$$

$$J = j_1 j_2 \dots j_v, \quad 1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_v = k, \tag{7}$$

$a = \mu(h,I)$, $b = \mu(h,J)$. Тогда $j_b \leqslant i_a \leqslant h < j_{b+1}$ и

$$\mathbf{r}[I,h,J] = r_{i_1} \dots r_{i_a} r_{j_{b+1}} \dots r_{j_v}.$$

Положим $K = \{1, \dots, k\}$ и рассмотрим модель

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}[I, i_a, K] = r_{i_1} \dots r_{i_a} r_{i_a+1} \dots r_k = r_{i_1} \dots r_{i_a} \dots r_{j_{b+1}} \dots r_k.$$

При $s \leqslant a$ имеем $\mathbf{r}'|_s = \mathbf{r}[I]|_s$. Поскольку $\mathbf{r}[I] \in \mathscr{R}$, функции $C_{\mathbf{r}'|_s}$ содержатся в $\mathscr{C}_{\mathbf{r}}$. При этом (см. доказательство леммы 4) $C_{\mathbf{r}'|_a} = C_{\mathbf{r}|_{i_a}}$. Далее имеем

$$C_{\mathbf{r}'|_{a+1}} = C_{r_{i_a+1}}(C_{\mathbf{r}'|_a}) = C_{r_{i_a+1}}(C_{\mathbf{r}|_{i_a}}) = C_{\mathbf{r}|_{i_a+1}}$$

и т. д., пока не придем к $C_{\mathbf{r}'} = C_{\mathbf{r}'|_{k-i_a+a}} = C_{\mathbf{r}|_k} = C_{\mathbf{r}}$. Таким образом, модель $\mathbf{r}'$ вложена в $\mathbf{r}$ и эквивалентна ей, т. е. $\mathbf{r}' \in \mathscr{R}$.

Рассмотрим теперь модель

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r}[J, j_b, K] = r_{j_1} \dots r_{j_b} r_{j_b+1} \dots r_k.$$

Из $\mathbf{r}[J] \in \mathscr{R}$ и (7) следует устранимость из $\mathbf{r}''$ фрагмента $r_{j_b+1} \dots r_{j_{b+1}-1}$. По лемме 10 отсюда заключаем, что в $\mathbf{r}''$ устранимо отношение $r_{i_{b+1}-1}$. Согласно лемме 11 устранимость $r_{j_{b+1}-1}$ в $\mathbf{r}''$ определяется тройкой $(r_{j_{b+1}-2}, r_{j_{b+1}-1}, r_{j_{b+1}})$. Поскольку эта тройка присутствует в $\mathbf{r}'$, отношение $r_{j_{b+1}-1}$ устранимо из $\mathbf{r}'$. Применяя те же рассуждения к моделям, полученным из $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ удалением $r_{j_{b+1}-1}$, можно доказать устранимость из них отношения $r_{j_{b+1}-2}$. Поскольку $j_b \leqslant i_a$, эта процедура может быть продолжена вплоть до отношения r_{i_a+1}. В результате получим модель $r_{i_1} \dots r_{i_a} r_{j_{b+1}} r_{j_{b+1}+1} \dots r_k \in \mathscr{R}$. Удалив из нее аналогичным образом все непустые фрагменты $r_{j_s+1} \dots r_{j_{s+1}-1}$, $b+1 \leqslant s \leqslant v-1$, придем к модели $\mathbf{r}[I,h,J]$. Это дает $\mathbf{r}[I,h,J] \in \mathscr{R}$. Лемма 12 доказана.

Введем множество $\mathscr{I} = \mathscr{I}(\mathbf{r}) = \{I \mid \mathbf{r}[I] \in \mathscr{R}\}$. Лексикографически упорядочим $\mathscr{I}$, положив для наборов (6)–(7)

$$I \succ J \Leftrightarrow i_1 > j_1 \vee (i_1 = j_1,\ i_2 > j_2) \vee (i_1 = j_1,\ i_2 = j_2,\ i_3 > j_3) \vee \dots$$

Легко видеть, что выполнено условие полноты $I \neq J \Rightarrow I \succ J \vee J \succ I$, а потому это строгий линейный порядок. В частности, имеется максимальный набор $I_0 : (\forall I \in \mathscr{I}) I_0 \succ I$.

Лемма 13. *Вложенная модель* $\mathbf{r}[I_0]$, *соответствующая максимальному* I_0, *является кратчайшей для модели* $\mathbf{r}$.

Доказательство. Достаточно установить, что для всякой модели $\mathbf{r}[J] \in \mathscr{R}$, $J \neq I_0$, найдется модель $\mathbf{r}[J'] \in \mathscr{R}$, $J' \succ J$, глубина которой не больше глубины модели $\mathbf{r}[J]$.

Пусть I — набор из $\mathscr{I}$ такой, что $I \succ J$, и пусть I и J имеют вид (6) и (7). Найдем a и b из условий

$$a = \min\{s \mid i_s > j_s,\ 1 \leqslant s \leqslant u\}, \quad b = \min\{s \mid j_s > i_a,\ a < s \leqslant v\}$$

и образуем набор $J' = (i_1, \dots, i_a, j_b, \dots, j_v)$. Из $i_s = j_s$, $1 \leqslant s \leqslant a-1$, и $i_a > j_a$ следует $J' \succ J$. Длина $v - (b-a) + 1$ набора J' не больше длины v набора J. Модель $\mathbf{r}[J']$ совпадает с $\mathbf{r}[I, i_a, J]$. Отсюда с учетом соотношений $i_a = \mu(i_a, I) \geqslant \mu(i_a, J) = j_{b-1}$ по лемме 12 заключаем, что $\mathbf{r}[J'] \in \mathscr{R}$. Лемма 13 доказана.

Основным результатом данного раздела является

Теорема 2. *Задача сжатия моделей последовательного выбора строго* 3*-разрешима.*

Доказательство. Задачу сжатия будем решать путем построения модели $\mathbf{r}[I_0]$ (лемма 13). Обозначим через $\Delta(i, \mathbf{r})$, $1 \leqslant i \leqslant k$, устранимый фрагмент $\mathbf{r}|_i^j$ (канонической) модели $\mathbf{r}$, имеющий левую границу i и максимально возможное значение $j = j(i, \mathbf{r})$ правой границы (если $\Delta(i, \mathbf{r}) = \varnothing$, полагаем $j(i, \mathbf{r}) = i - 1$). Модель $\mathbf{r}[I_0]$ будем строить путем последовательного удаления из $\mathbf{r}$ фрагментов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s, \dots$, где $\Delta_1 = \Delta(1, \mathbf{r})$, $\Delta_s = \Delta(j_{s-1} + 1, \mathbf{r})$, $j_{s-1} - 1$ является правой границей фрагмента Δ_{s-1}. В соответствии с леммой 10 удаление фрагмента Δ_s может быть осуществлено последовательным исключением отношений $r_{j_s - 1}, r_{j_s - 2}, \dots, r_{j_{s-1}+1}$. Правая граница $j_s - 1$ фрагмента Δ_s может быть найдена путем просмотра значений $j = k-1, k-2, \dots$ и построения при каждом j максимально возможной последовательности устранимых отношений $r_j, r_{j-1}, \dots$ Значение $j_s - 1$ совпадает с первым встреченным j таким, что эта последовательность включает $r_{j_{s-1}+1}$.

Локальная процедура индекса 3, реализующая указанный план, распадается на *этапы* s, $s = 1, 2, \dots$, которые состоят из *заходов* (s, j), $j = k-1, k-2, \dots$ Цель этапа s — удаление фрагмента Δ_s. На заходе (s, j) находится максимальный устранимый фрагмент, завершающийся отношением r_j.

Перейдем к описанию процедуры. Состояния указывать не будем; они соответствуют типам поведения в различных ситуациях, число которых, как нетрудно видеть, конечно. Корректность используемых в локальной процедуре преобразований может быть проверена непосредственно.

Процедура. Исходной конфигурацией является $(r_1)r_2\dots r_k$. На шаге 1 применяется локальное преобразование $r_1 \to r_0 r_0 r_1$ (r_0 — пустое отношение) и в конфигурации $(r_0 r_0 r_1)r_2\dots r_k$ начинается этап 1.

Этап s. К началу этапа s конфигурация имеет вид

$$r_{j_1}\dots r_{j_{s-2}}(r_{j_{s-1}} r_{j_{s-1}} r_{j_{s-1}+1})r_{j_{s-1}+2}\dots r_k.$$

Работа на этапе s происходит в зоне $r_{j_{s-1}} r_{j_{s-1}} r_{j_{s-1}+1}\dots r_k$. Вначале активный фрагмент последовательно перемещается в конец (без изменения текущей модели). После того как активным станет фрагмент $r_{k-2}r_{k-1}r_k$, начинается заход $(s, k-1)$.

Заход (s, j). Исходной конфигурацией для захода является

$$r_{j_1}\dots r_{j_{s-2}} r_{j_{s-1}} r_{j_{s-1}} r_{j_{s-1}+1}\dots r_{j-2}(r_{j-1} r_j r_{j+1})r_{j+2}\dots r_k.$$

1. Если $j = j_{s-1}+1$, то конфигурация имеет вид

$$r_{j_1}\dots r_{j_{s-2}} r_{j_{s-1}}(r_{j_{s-1}} r_j r_{j+1})r_{j+2}\dots r_k.$$

При этом

1-1) если r_j не устранимо из $r_{j_{s-1}} r_j r_{j+1}$, то активным становится фрагмент $r_{j_{s-1}} r_{j_{s-1}} r_j$, выполняется локальное преобразование $r_{j_{s-1}} r_{j_{s-1}} r_j \to r_{j_{s-1}} r_j r_j$ и после перехода к фрагменту $r_j r_{j+1} r_{j+2}$ начинается этап $s+1$ (здесь $j_s = j$);

1-2) если r_j устранимо из $r_{j_{s-1}} r_j r_{j+1}$, то выполняются преобразования $r_{j_{s-1}} r_j r_{j+1} \to r_{j_{s-1}} r_{j+1}$, $r_{j_{s-1}} r_{j_{s-1}} r_{j+1} \to r_{j_{s-1}} r_{j+1} r_{j+1}$ и после перехода к фрагменту $r_{j+1} r_{j+2} r_{j+3}$ начинается этап $s+1$ (здесь $j_s = j+1$).

2. Пусть $j > j_{s-1}+1$. Тогда если r_j устранимо из $r_{j-1} r_j r_{j+1}$, то выполняется локальное преобразование $r_{j-1} r_j r_{j+1} \to r_{j-1} r_{j+1} r_j$ и активной становится тройка $r_{j-2} r_{j-1} r_{j+1}$. Если r_{j-1} из нее устранимо, то выполняется преобразование $r_{j-2} r_{j-1} r_{j+1} \to r_{j-2} r_{j+1} r_{j-1}$, активной становится тройка $r_{j-3} r_{j-2} r_{j+1}$ и так далее. Возможны 2 варианта:

2-1) цепочка устранимых отношений не достигает $r_{j_{s-1}+1}$. В этом случае конфигурация приобретает вид

$$r_{j_1}\dots r_{j_{s-1}+1}\dots(r_u r_{u+1} r_{j+1})r_{u+2}\dots r_j r_{j+2}\dots r_k,$$

где r_{u+1} не устранимо из тройки. На следующем шаге активным становится фрагмент $r_{u+1} r_{j+1} r_{u+2}$ и далее с помощью цепочки преобразований $r_{u+1} r_{j+1} r_{u+2} \to r_{u+1} r_{u+2} r_{j+1}, \dots, r_{j-1} r_{j+1} r_j \to r_{j-1} r_j r_{j+1}$ отношение

r_{j+1} перемещается на исходное место (на это указывает соотношение $r_{j+1} \subset r_{j+2}$, проверяемое на следующем шаге). Затем активным становится фрагмент $r_{j-2}r_{j-1}r_j$ и начинается заход $(s, j-1)$;

2-2) цепочка устранимых отношений включает $r_{j_{s-1}+1}$. Тогда достигается конфигурация

$$r_{j_1} \dots (r_{j_{s-1}} r_{j_{s-1}} r_{j+1}) r_{j_{s-1}+1} \dots r_k.$$

После локального преобразования $r_{j_{s-1}} r_{j_{s-1}} r_{j+1} \to r_{j_{s-1}} r_{j+1}$ начинается движение вправо с удалением устранимых отношений $r_{j_{s-1}+1}, \dots, r_j$. Это осуществляется преобразованиями $r_{j_{s-1}} r_{j+1} r_{j_{s-1}+1} \to r_{j_{s-1}} r_{j+1}, \dots$, $r_{j_{s-1}} r_{j+1} r_j \to r_{j_{s-1}} r_{j+1}$. При следующем сдвиге вправо активным становится фрагмент $r_{j_{s-1}} r_{j+1} r_{j+2}$ (включение $r_{j+1} \subset r_{j+2}$ указывает, что отношение r_{j+1} заняло свое место). Локальное преобразование $r_{j+1} r_{j+2} \to r_{j+1} r_{j+1} r_{j+2}$ приводит (с учетом $r_{j+1} = r_{j_s}$) к конфигурации $r_{j_1} \dots r_{j_{s-1}}$ $(r_{j_s} r_{j_s} r_{j_s+1}) r_{j_s+2} \dots r_k$, в которой начинается этап $s+1$.

Если по окончании этапа s оказывается, что $j_s + 1 = k$, то выполняется локальное преобразование $r_{j_s} r_{j_s} r_k \to r_{j_s} r_k$ и процедура останавливается.

3-Разрешимость задачи сжатия установлена. Чтобы доказать, что она не решается процедурами индекса 2, рассмотрим пример из замечания к лемме 10. Ему соответствует приведенная модель $\mathbf{r} = r_1 r_2 r_3$, $r_1 = \{(y,x)\}$, $r_2 = \{(x,z)\}$, $r_3 = \{(y,z),(z,y)\}$, $A = \{x,y,z\}$. Пусть к $\mathbf{r}$ применяется локальная процедура индекса 2, $\mathbf{r}_t$ — текущая модель на шаге t, $\hat{\mathbf{r}}_t$ — соответствующая приведенная модель. Обозначим через a_t (через b_t) порядковый номер отношения модели $\hat{\mathbf{r}}_t$, содержащего пару (x,z) (пары (y,z), (z,y)). Покажем, что $a_t < b_t$ при всех t.

Предположим, что это не так и t — первое значение, при котором $a_t \geqslant b_t$. Для модели $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ выполнено $a_1 < b_1$, поэтому $t \geqslant 2$. Рассмотрим шаг $t-1$. Для него $a_{t-1} < b_{t-1}$. Пусть модель $\mathbf{r}_t$ получена из $\mathbf{r}_{t-1}$ преобразованием $r_\alpha r_\beta \to r_\gamma r_\delta$. Докажем его некорректность, т. е. неэквивалентность моделей $r_\alpha r_\beta$ и $r_\gamma r_\delta$. Вместо них можно рассматривать приведенные модели $\hat{r}_\alpha \hat{r}_\beta$ и $\hat{r}_\gamma \hat{r}_\delta$. Очевидно, что $(x,z) \in \hat{r}_\alpha, \hat{r}_\delta$, а $(y,z),(z,y) \in \hat{r}_\beta, \hat{r}_\gamma$. Кроме того, некоторые из отношений $\hat{r}_\alpha, \hat{r}_\beta, \hat{r}_\gamma, \hat{r}_\delta$ могут содержать пару (y,x). Неэквивалентность моделей $\hat{r}_\alpha \hat{r}_\beta$ и $\hat{r}_\gamma \hat{r}_\delta$ следует из соотношений $y \in C_{\hat{r}_\alpha \hat{r}_\beta}(\{x,y,z\})$ и $y \notin C_{\hat{r}_\gamma \hat{r}_\delta}(\{x,y,z\})$, проверяемых непосредственно. Аналогично рассматривается случай, когда $\mathbf{r}_t$ получено из $\mathbf{r}_{t-1}$ подстановкой $r_\alpha r_\beta \to r_\gamma$ (это имеет место при $a_t = b_t$).

Легко проверить, что исходная модель $\mathbf{r}$ представима отношением $r = \{(y,x),(x,z),(y,z),(z,y)\}$, которое является единственным решением задачи сжатия. Но оно не может быть получено процедурой индекса 2, поскольку нарушает условие $a_t < b_t$. Теорема 2 доказана.

В приложениях обычно используются ацикличные отношения. Из конструкции теоремы 2 вытекает

Следствие 3. *Задача сжатия моделей, использующих лишь ацикличные отношения, полиномиальна.*

Легко видеть, что локальная процедура из теоремы 2 выполняется за полиномиальное число шагов. Временная сложность каждого шага определяется временем проверки устранимости отношений из тройки. Для ацикличных отношений оно полиномиально, ибо приведенная модель также состоит из ацикличных отношений и требуется лишь проверить условие (3).

В общем случае задача сжатия NP-трудна (теорема 1).

5. Локальная неразрешимость задачи минимизации

Из теоремы 1 следует, что между задачами сжатия и минимизации нет принципиального различия по временной сложности (они полиномиально сводятся друг к другу). Ниже устанавливается, что с информационной точки зрения эти задачи ведут себя существенно по-разному. Будем говорить, что модель *d-неупрощаема*, если ее глубина не может быть понижена процедурами индекса d.

Теорема 3. *При любых d и k, $3 \leqslant d < k$, существует модель глубины k, которая d-неупрощаема и имеет эквивалентную минимальную модель глубины d, которая может быть получена процедурой индекса $d+1$.*

Доказательство. Положим $s = k - d$,

$$A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s, \gamma_1, \dots, \gamma_s, \sigma_1, \dots, \sigma_{d-1}, \tau_1, \dots, \tau_{d-1}\}$$

и на множестве A рассмотрим модель $\mathbf{r} = r_1 r_2 \dots r_{s+d}$, (рис. 1; двусторонние стрелки обозначают пары противоположных дуг), где

$$r_1 = \{(\alpha_1, \beta_1), (\beta_1, \sigma_j),\ 1 \leqslant j \leqslant d-1\};$$

$$r_i = \{(\alpha_i, \beta_i), (\beta_i, \beta_{i-1}), (\beta_{i-1}, \gamma_{i-1}), (\beta_i, \sigma_j),\ 1 \leqslant j \leqslant d-1\},\ 2 \leqslant i \leqslant s;$$

$$r_{s+1} = \{(\beta_s, \gamma_s)\};$$

$$r_{s+j+1} = \{(\alpha_i, \tau_j), (\tau_j, \alpha_i), (\gamma_i, \tau_j), (\tau_j, \gamma_i), (\gamma_i, \sigma_j),\ 1 \leqslant i \leqslant s\},\ 1 \leqslant j \leqslant d-2;$$

$$r_{s+d} = \{(\alpha_i, \tau_{d-1}), (\tau_{d-1}, \alpha_i), (\gamma_i, \tau_{d-1}), (\tau_{d-1}, \gamma_i), (\gamma_i, \sigma_{d-1}), (\alpha_i, \gamma_i),\ 1 \leqslant i \leqslant s\}.$$

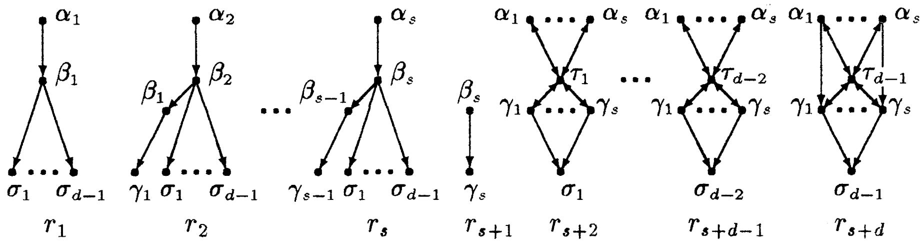

Рис. 1

Эта модель является приведенной. По следствию 1 любая приведенная модель $\mathbf{r}'$, реализующая функцию выбора $C_{\mathbf{r}'}$, удовлетворяет условию $\cup\mathbf{r}' = \cup\mathbf{r}$. Для $(x, y) \in \cup\mathbf{r}$ и приведенной модели $\mathbf{r}'$ через $\#(x, y)_{\mathbf{r}'}$ обозначим порядковый номер отношения из $\mathbf{r}'$, содержащего пару (x, y) (иногда будем записывать $\#(x, y)$, если ясно, какая модель $\mathbf{r}'$ рассматривается).

Пусть к модели $\mathbf{r}$ применяется некоторая локальная процедура индекса d, $\mathbf{r}_t$ — текущая модель на шаге t, $\hat{\mathbf{r}}_t$ — соответствующая приведенная модель. Так как все преобразования корректны, то модели $\mathbf{r}_t$ и $\hat{\mathbf{r}}_t$ эквивалентны модели $\mathbf{r}$ и, следовательно, $\cup\hat{\mathbf{r}}_t = \cup\mathbf{r}$.

Индукцией по t покажем, что для модели $\hat{\mathbf{r}}_t$ справедливы соотношения

$$\#(\alpha_i, \beta_i) < \#(\beta_i, \gamma_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant s. \tag{8}$$

Модель $\hat{\mathbf{r}}_1$ совпадает с $\mathbf{r}$ и для нее соотношения (8) выполнены. Предположим, что они справедливы для модели $\hat{\mathbf{r}}_{t-1}$. Тогда при каждом i в $\hat{\mathbf{r}}_{t-1}$ имеет место цепочка соотношений

$$\begin{aligned}
&\#(\alpha_i, \beta_i) < \#(\beta_i, \gamma_i) < [\gamma_i \in C_{\mathbf{r}}(\{\beta_i, \gamma_i, \sigma_1\})] < \#(\gamma_i, \sigma_1)\\
&\leqslant [\tau_1 \in C_{\mathbf{r}}(\{\gamma_i, \sigma_1, \tau_1\})] \leqslant \#(\tau_1, \gamma_i) < [\sigma_2 \in C_{\mathbf{r}}(\{\gamma_i, \tau_1, \sigma_2\})] < \#(\gamma_i, \sigma_2)\\
&\leqslant [\text{аналогично}] \leqslant \#(\tau_2, \gamma_i) < \#(\gamma_i, \sigma_2) \leqslant \ldots < \#(\gamma_i, \sigma_{d-1})\\
&\leqslant [\sigma_{d-1} \notin C_{\mathbf{r}}(\{\alpha_i, \gamma_i, \sigma_{d-1}\})] \leqslant \#(\alpha_i, \gamma_i).
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь в квадратных скобках помещены пояснения к соответствующим неравенствам. Так, включение $\gamma_i \in C_{\mathbf{r}}(\{\beta_i, \gamma_i, \sigma_1\})$, проверяемое непосредственно (по рис. 1), гарантирует неравенство $\#(\beta_i, \gamma_i) < \#(\gamma_i, \sigma_1)$, ибо в случае $\#(\beta_i, \gamma_i) \geqslant \#(\gamma_i, \sigma_1)$ выполнено $\gamma_i \notin C_{\hat{\mathbf{r}}_{t-1}}(\{\beta_i, \gamma_i, \sigma_1\})$, что противоречит эквивалентности моделей $\hat{\mathbf{r}}_{t-1}$ и $\mathbf{r}$.

Пусть модель $\mathbf{r}_t$ получена из модели $\mathbf{r}_{t-1}$ применением локального преобразования $\mathbf{f}' \to \mathbf{f}''$. Предположим, что (8) для $\hat{\mathbf{r}}_t$ нарушено, т. е. при некотором i имеет место $\#(\alpha_i, \beta_i)_{\hat{\mathbf{r}}_t} \geqslant \#(\beta_i, \gamma_i)_{\hat{\mathbf{r}}_t}$. Отсюда с учетом (8) для $\hat{\mathbf{r}}_{t-1}$ заключаем, что первые вхождения пар (α_i, β_i) и (β_i, γ_i) в модель $\mathbf{r}_{t-1}$ присутствуют в $\mathbf{f}'$. В силу (9) пара (α_i, γ_i) отделена от (α_i, β_i) в $\mathbf{r}_{t-1}$ не менее чем $d - 1$ промежуточными отношениями и поэтому не может попасть в фрагмент $\mathbf{f}'$ длины d. Это и (8) дают $C_{\mathbf{f}'}(\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}) = \{\alpha_i,\gamma_i\}$. В то же время из $\#(\alpha_i,\beta_i)_{\hat{\mathbf{r}}_t} \geqslant \#(\beta_i,\gamma_i)_{\hat{\mathbf{r}}_t}$ вытекает $\gamma_i \notin C_{\mathbf{f}''}(\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\})$. Это означает неэквивалентность моделей $\mathbf{f}'$ и $\mathbf{f}''$ и тем самым некорректность преобразования $\mathbf{f}' \to \mathbf{f}''$. Полученное противоречие завершает индукционный шаг и доказывает соотношения (8) для $\hat{\mathbf{r}}_t$ при любом t.

Из (8) следует, что

$$\begin{aligned}\#(\alpha_i,\beta_i) < \#(\beta_i,\gamma_i) \leqslant [\gamma_i \notin C_{\mathbf{r}}(\{\beta_i,\beta_{i+1},\gamma_i\})] \leqslant \#(\beta_{i+1},\beta_i)\\ \leqslant [\beta_i \notin C_{\mathbf{r}}(\{\alpha_{i+1},\beta_i,\beta_{i+1}\})] \leqslant \#(\alpha_{i+1},\beta_{i+1}).\end{aligned}$$

В сочетании с (9) применительно к $\hat{\mathbf{r}}_t$ это дает

$$\#(\alpha_1,\beta_1) < \ldots < \#(\alpha_s,\beta_s) < \#(\beta_s,\gamma_s) < \#(\gamma_s,\sigma_1) < \ldots < \#(\gamma_s,\sigma_{d-1}).$$

Отсюда вытекает, что на любом шаге t глубина модели $\mathbf{r}_t$, равная глубине модели $\hat{\mathbf{r}}_t$, не меньше $s+d=k$. Это означает d-неупрощаемость $\mathbf{r}$.

Для каждого i, $0 \leqslant i \leqslant s$, введем отношение

$$r^{(i)} = \bigcup_{0\leqslant u\leqslant i} r_{s+1-u} \qquad (r^{(0)} = r_{s+1})$$

(оно изображено на рис. 2) и рассмотрим модель $\mathbf{r}^{(i)} = r^{(i)} r_{s+2}\ldots r_{s+d}$. Индукцией по i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ докажем, что модели $\mathbf{r}^{(i)}$ и $r_{s+1-i}\mathbf{r}^{(i-1)}$ эквивалентны, т. е. соответствующие им функции выбора, которые обозначим через C_i и C_i', равны.

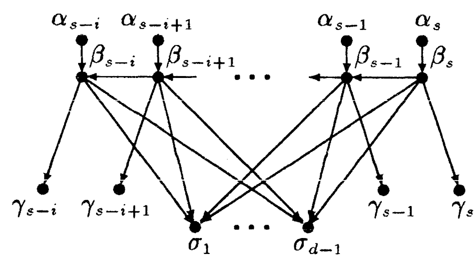

Рис. 2

Основание индукции $i=1$ аналогично индуктивному шагу. Поэтому сразу рассмотрим переход от i к $i+1$, т. е. докажем эквивалентность моделей $\mathbf{r}^{i+1}$ и $r_{s-i}\mathbf{r}^{(i)}$ при условии эквивалентности моделей $\mathbf{r}^{(i)}$ и $r_{s+1-i}\mathbf{r}^{(i-1)}$. Рассмотрим произвольное $X \subseteq A$.

Случай 1 $(\beta_{s-i} \notin X)$. В этом случае отношение $r^{(i+1)}|_X$ (сужение $r^{(i+1)}$ на X) распадается на несвязные части $r^{(i)}|_X$ и $r_{s-i}|_X$. Поэтому $C_{r^{(i+1)}}(X) = C_{r_{s-i}r^{(i)}}(X)$, что приводит к $C_{i+1}(X) = C'_{i+1}(X)$.

Случай 2 ($\beta_{s-i} \in X$). Обозначим через $T = \{\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_s}\}$, $j_1 < \dots < j_s$, множество всех элементов τ_j, присутствующих в X. Положим $X' = X \setminus \{\sigma_1, \dots, \sigma_{d-1}\}$. Так как в моделях отсутствуют пары вида (σ_j, x), а отношения $r^{(i+1)}$ и r_{s-i} содержат пары (β_{s-i}, σ_j) при всех j, то выполнено $C_{i+1}(X) = C_{i+1}(X')$, $C'_{i+1}(X) = C'_{i+1}(X')$ и вместо X можно рассматривать X'. Если $\tau_j \notin T$, то при $j \leqslant d-2$ отношение $r_{s+j+1}|_X$ пусто (и может быть опущено), а при $j = d-1$ оно состоит лишь из пар вида (α_i, γ_i). Обозначим через Y и Y' соответственно множества элементов, выбранных из X' отношением $r^{(i+1)} = r^{(i)} \cup r_{s-i}$ и моделью $r^{(i)} r_{s-i}$ соответственно. Из рис. 1 и 2 видно, что Y' отличается от Y лишь в случае, когда $\alpha_{s-i}, \beta_{s-i}, \gamma_{s-i} \in X'$. При этом $Y' \setminus Y = \{\gamma_{s-i}\}$ и $\alpha_{s-i} \in Y, Y'$. Тогда с учетом сказанного выше об отношениях $r_{s+j+1}|_{X'}$ можно заключить, что если $T \neq \varnothing$, то $C_{i+1}(X) = C_{i+1}(X') = T \setminus \{\tau_{j_1}\}$. Если же $T = \varnothing$, то множества $C_{i+1}(X)$ и $C_{i+1}(X')$ выбираются из Y и Y' с использованием отношения $r_{s+d}|_{X'}$, содержащего, в частности, пару $(\alpha_{s-i}, \gamma_{s-i})$. При этом элемент γ_{s-i} будет устранен, что приведет к $C_{i+1}(X') = C'_{i+1}(X')$ и, следовательно, к $C_{i+1}(X) = C'_{i+1}(X)$.

Этим индукция завершена. Рассмотрим следующую локальную процедуру индекса $d+1$. К модели $\mathbf{r}$, которую можно записать в виде $r_1 \dots r_s \mathbf{r}^{(0)}$, применим локальное преобразование $r_s \mathbf{r}^{(0)} \to \mathbf{r}^{(1)}$, к полученной модели $r_1 \dots r_{s-1} \mathbf{r}^{(1)}$ применим локальное преобразование $r_{s-1} \mathbf{r}^{(1)} \to \mathbf{r}^{(2)}$ и так далее. Выполнив в заключение локальное преобразование $r_1 \mathbf{r}^{(s-1)} \to \mathbf{r}^{(s)}$, придем к модели $\mathbf{r}^{(s)} = r^{(s)} r_{s+2} \dots r_{s+d} = (r_1 \cup \dots \cup r_s \cup r_{s+1}) r_{s+2} \dots r_{s+d}$ глубины d. Из доказанного выше следует, что эти преобразования корректны и, следовательно, полученная модель $\mathbf{r}^{(s)}$ эквивалентна исходной модели $\mathbf{r}$. Согласно (9) для любой приведенной модели, эквивалентной модели $\mathbf{r}$, справедлива цепочка соотношений

$$\#(\beta_s, \gamma_s) < \#(\gamma_s, \sigma_1) < \#(\gamma_s, \sigma_2) \dots < \#(\gamma_s, \sigma_{d-1}).$$

Это означает, что глубина любой модели, эквивалентной $\mathbf{r}$, не меньше d и потому модель $\mathbf{r}^{(s)}$ минимальна. Теорема 3 доказана.

Замечание. 1. При $d = k-1$ конструкция из теоремы 3 дает для любого $k \geqslant 4$ модель глубины k, которая не допускает упрощения процедурами, имеющими дело с ее фрагментами, отличными от всей модели. Задача минимизации может быть решена лишь при рассмотрении модели целиком.

2. Теорема 3 показывает, что при любом $d = \text{const} \geqslant 3$ процедуры индекса $d+1$ обладают гораздо большими возможностями, чем процедуры индекса d: имеются модели сколь угодно большой глубины k, которая не уменьшаема процедурами индекса d, но может быть сокращена до величины $d = \text{const}$ процедурами индекса $d+1$.

3. Из теоремы 3 следует, что для данного множества A не существует конечной полной системы эквивалентных преобразований моделей последовательного выбора на множестве A.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т.** Выбор вариантов: основы теории. М.: Наука, 1990.
2. **Айзерман М. А., Малишевский А. В.** Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов // Автоматика и телемеханика. 1981. № 2. С. 65–83.
3. **Вапник В. Н., Червоненкис А. Я.** Теория распознавания образов: статистические проблемы обучения. М.: Наука, 1974.
4. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
5. **Журавлев Ю. И.** Локальные алгоритмы вычисления информации. I // Кибернетика. 1965. № 1. С. 12–19.
6. **Журавлев Ю. И.** Локальные алгоритмы вычисления информации. II // Кибернетика. 1966. № 3. С. 1–11.
7. **Журавлев Ю. И., Лосев Г. Ф.** Окрестности в задачах дискретной математики // Кибернетика и системный анализ. 1995. № 2. С. 32–41.
8. **Малишевский А. В.** Сохранение рациональности в двухступенчатых механизмах оптимального выбора // Анализ данных и экспертные оценки в организационных системах: Сб. тр. Ин-та проблем управления. М., 1985. С. 51–61.
9. **Шоломов Л. А.** Логические методы исследования дискретных моделей выбора. М.: Наука, 1989.
10. **Aizerman M. A., Malishevski A. V.** Conditions for universal reducibility of a two-stage extremization problem to one-stage problem // J. Math. Analysis and Appl. 1986. V. 119, N 1–2. P. 361–388.
11. **Vol'sky V. I.** Characteristic conditions for a class of choice functions // Systems and Control Letters. 1982. V. 2, N 3. P. 189–193.
12. **Vol'sky V. I.** Application of two-stage procedures of multicriterial optimization to computer-aided process control systems // Preprints of the IFAC / IFORS Conf. of Control Sci. and Technology for Development (Beijing, China). 1985. V. 1. P. 467–476.

Адрес автора:

Институт системного анализа РАН,
пр. 60-летия Октября, 9,
117312 Москва, Россия.
E-mail: sholomov@cs.isa.ac.ru

Статья поступила
22 февраля 1999 г.