ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1999. Серия 1. Том 6, № 4, 3–19

УДК 519.17

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ НАИБОЛЬШИХ НЕЗАВИСИМЫХ МНОЖЕСТВ В ГРАФАХ БЕЗ ВИЛОК*)

В. Е. Алексеев

Вилка — это граф, получаемый из звезды $K_{1,3}$ подразбиением одного ребра. Известно [6–8], что для графов без звезд задача нахождения наибольшего независимого множества решается за полиномиальное время. Доказывается, что это верно и для более широкого класса графов без вилок.

Введение

Независимым множеством в обыкновенном графе называется множество попарно не смежных вершин. Независимое множество называется *максимальным*, если оно не содержится в другом независимом множестве, и *наибольшим*, если в нем содержится максимально возможное число вершин; это число называется *числом независимости* графа и обозначается через $\alpha(G)$. Задача о независимом множестве состоит в нахождении наибольшего независимого множества в данном графе. Эта задача NP-полна и остается такой даже при значительных сужениях класса графов [4]. Вместе с тем известны некоторые «области эффективности» — классы графов, для которых эта задача может быть решена за полиномиальное время. Расширение одной из таких областей является целью настоящей статьи.

Класс графов X называется *наследственным*, если каждый порожденный подграф графа из X принадлежит классу X, и *сильно наследственным*, если каждый подграф графа из X принадлежит X. Любой наследственный (и только наследственный) класс X может быть задан множеством M запрещенных порожденных подграфов. Это означает, что X состоит из тех и только тех графов, которые не имеют порожденных подграфов, принадлежащих множеству M. В этом случае пишем

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98–01–00792).

$X = Free(M)$. Если M конечно, то X называется *конечно определенным*.

Класс графов X назовем *α-простым*, если существует алгоритм, находящий наибольшие независимые множества в графах из этого класса за полиномиальное время. В [1] доказано, что задача о независимом множестве остается NP-полной для конечно определенного наследственного класса X, если в X содержится класс T всех тех графов, в которых каждая компонента связности гомеоморфна K_2 или $K_{1,3}$. Таким образом, особый интерес представляют наследственные классы, состоящие из таких графов, в которых среди запрещенных подграфов имеются графы из T, и в первую очередь классы, определяемые единственным запрещенным подграфом, принадлежащим T. В [3] доказано, что каждый сильно наследственный класс, не содержащий T, является α-простым. Для наследственных классов, не являющихся сильно наследственными, дело обстоит значительно сложнее. В настоящее время автору известны следующие случаи полиномиальной разрешимости задачи о независимом множестве для наследственных классов с одним запрещенным подграфом.

1. Класс $Free(P_4)$ (P_n — простая цепь с n вершинами). Эти графы иногда называют кографами, и они устроены достаточно просто: каждый кограф либо несвязен, либо несвязен дополнительный к нему граф. Это позволяет эффективно находить наибольшие независимые множества в кографах.

2. В [2] исследовалось асимптотическое поведение числа максимальных независимых множеств в графах из наследственных классов и было доказано, что это число ограничено сверху полиномом (от числа вершин) для тех и только тех классов, у которых среди запрещенных подграфов есть граф вида mK_2 (граф с $2m$ вершинами, в котором каждая компонента связности состоит из двух вершин). Отсюда следует α-простота каждого класса $Free(mK_2)$, так как известны алгоритмы, позволяющие находить все максимальные независимые множества за время, пропорциональное количеству максимальных независимых множеств, умноженному на полином от числа вершин (см., например, [9]). Это единственное известное бесконечное семейство α-простых классов, определяемых одним запрещенным подграфом из T, если не считать тривиальных расширений, получаемых добавлением изолированных вершин к запрещенному подграфу (см. [3]).

3. Граф $K_{1,3}$ часто называют *звездой*. Полиномиальные алгоритмы нахождения наибольших независимых множеств в графах из класса $Free(K_{1,3})$ были предложены в [6–8]. Эти алгоритмы различны, но имеют общую основу — эффективное решение задачи о наибольшем

паросочетании. При переходе от данного графа к его реберному графу каждое паросочетание (т. е. независимое множество ребер) превращается в независимое множество вершин. Поэтому алгоритм, позволяющий решать задачу о наибольшем паросочетании в произвольных графах, легко преобразуется в алгоритм, решающий задачу о независимом множестве в реберных графах. Класс $Free(K_{1,3})$ является расширением класса реберных графов. В [8] задача о независимом множестве для графов без звезд решается непосредственным применением техники чередующихся цепей, а в [6] и [7] доказывается ее полиномиальная сводимость к той же задаче для реберных графов.

Таким образом, для каждого графа G с четырьмя вершинами из множества T класс $Free(G)$ является α-простым. В T имеется три графа с пятью вершинами без изолированных вершин: P_5, $P_2 + P_3$ и граф, получаемый из звезды подразбиением одного ребра. Последний будем называть *вилкой* и обозначать через F. Класс $Free(F)$ является расширением классов $Free(K_{1,3})$ и $Free(P_4)$. В [5] доказывается α-простота класса, определяемого двумя запрещенными подграфами, одним из которых является F. В данной статье будет доказано, что класс $Free(F)$ является α-простым.

В разд. 1 характеризуются двудольные графы из класса $Free(F)$ (теорема 1) и излагается общий план решения задачи. Остальная часть статьи посвящена реализации этого плана.

Несколько замечаний по поводу терминологии. Термин «максимальное» применительно к множествам с каким-либо свойством всюду в статье означает максимальное по включению множество с этим свойством. Термин «подграф» будет всюду означать «порожденный подграф». В частности, говоря о цепях, звездах, вилках, циклах, содержащихся в рассматриваемом графе, всегда будем, не оговаривая этого специально, подразумевать порожденные подграфы соответствующего типа. Под цепью в статье понимается простая цепь, под циклом — простой цикл. Если A и B — подмножества множества вершин некоторого графа, то через $\langle A\rangle$ обозначаем подграф, порожденный множеством A, а через $N_B(A)$ — множество тех вершин из B, каждая их которых смежна хотя бы с одной вершиной из A.

Автор благодарен А. Д. Коршунову за замечания, способствовавшие улучшению текста статьи.

1. Двудольные графы без вилок

Один из распространенных подходов к решению задачи о независимом множестве состоит в том, что сначала находят какое-нибудь независимое множество A, а затем пытаются получить большее независимое

множество, заменяя некоторую совокупность вершин из A на большее подмножество вершин из $\bar{A}$ ($\bar{A}$ — дополнение A до множества всех вершин графа). Если удается доказать, что такой замены не существует, то A — наибольшее независимое множество. Для $X \subseteq \bar{A}$ величину $inc(X) = |X| - |N_A(X)|$ назовем *приростом* множества X. Независимое множество $X \subseteq \bar{A}$ с положительным приростом будем называть *увеличителем* для A, а подграф $\langle X \cup N_A(X)\rangle$ — *увеличивающим подграфом. Наибольший увеличитель* для A — это увеличитель с наибольшим приростом. Если X — увеличитель для A, то $A' = (A - N_A(X)) \cup X$ — независимое множество и $|A'| > |A|$, а если X — наибольший увеличитель для A, то A' — наибольшее независимое множество графа.

Так как увеличивающий подграф является двудольным графом, то предпосылкой успешного применения такой «стратегии обмена» к тому или иному классу графов может быть информация о достаточно простом строении двудольных графов из этого класса. Например, двудольные графы без звезд устроены крайне просто — в таком графе каждая компонента связности является цепью или циклом. Оказывается, разнообразие двудольных графов без вилок тоже не слишком велико. Связный двудольный граф, в котором каждая вершина смежна со всеми вершинами другой доли, кроме, быть может, одной, будем называть *комплектом.* Иначе говоря, комплект получается из полного двудольного графа удалением ребер некоторого паросочетания.

Теорема 1. *Связный двудольный граф без вилок является либо цепью, либо циклом, либо комплектом.*

Доказательство. Пусть G — связный двудольный граф без вилок. Если степень каждой вершины в G не превосходит 2, то G является цепью или циклом. Допустим, что в G есть вершина a степени не менее 3. Обозначим через A_i множество всех вершин, находящихся от a на расстоянии i. Так как G — двудольный граф, то каждое A_i является независимым множеством.

Сначала докажем, что $\langle A_1 \cup A_2\rangle$ является комплектом. Для каждой вершины $b \in A_2$ имеется смежная вершина $c \in A_1$. Если в A_1 были бы две не смежные с b вершины d_1 и d_2, то образовалась бы вилка $\langle a, b, c, d_1, d_2\rangle$. Значит, каждая вершина из A_2 смежна со всеми вершинами из A_1, кроме, быть может, одной. Допустим, в A_1 есть вершина b, не смежная с какими-либо двумя вершинами c_1 и c_2 из A_2. Тогда по доказанному c_1 и c_2 должны быть смежны с остальными вершинами из A_1. Поэтому любая отличная от b вершина из A_1 вместе с a, b, c_1, c_2 образовала бы вилку.

Теперь рассмотрим множество A_3. Если A_3 не пусто, выберем в нем вершину b и смежную с ней вершину $c_1 \in A_2$. Допустим, в A_2 есть

вершина c_2, не смежная с b. Тогда, взяв в A_1 вершину d, смежную с c_1 и c_2 (существование такой вершины следует из того, что $|A_1| \geqslant 3$ и $\langle A_1 \cup A_2 \rangle$ — комплект), получим вилку $\langle a, b, c_1, c_2, d \rangle$. Следовательно, любая вершина из A_3 смежна со всеми вершинами из A_2. Но тогда в A_3 не может быть больше одной вершины, иначе две вершины из A_3 вместе с вершинами любого кратчайшего пути, соединяющего a с какой-нибудь вершиной из A_2, образовали бы вилку. Ясно также, что $A_i = \varnothing$ при $i \geqslant 4$, так как каждая вершина из A_2 смежна по крайней мере с двумя вершинами из A_1.

Итак, граф G устроен следующим образом: к комплекту $\langle A_1 \cup A_2 \rangle$ добавлена вершина a, смежная со всеми вершинами одной доли, и, возможно, еще вершина, смежная со всеми вершинами другой доли. Отсюда следует, что G является комплектом. Теорема доказана.

В увеличивающем подграфе хотя бы одна из компонент связности является увеличивающим подграфом. Поэтому для нахождения наибольших независимых множеств в графах без вилок достаточно уметь находить увеличивающие цепи и комплекты. Цепь будем называть *длинной*, если в ней содержится не менее восьми вершин. Предлагаемый план решения задачи связан с анализом следующих вариантов.

1. В графе нет звезд.
2. В графе нет длинных цепей.
3. В графе есть звезды и длинные цепи.

Ясно, что за полиномиальное время можно выяснить, какой из этих случаев имеет место. В случае 1 можно применить любой известный алгоритм для графов без звезд. Случаи 2 и 3 рассматриваются ниже. В разд. 2 обосновывается рекурсивный алгоритм для графов без вилок и длинных цепей. В разд. 3 описываются некоторые особенности строения графов, содержащих вилки и длинные цепи, а в разд. 4 показано, как можно использовать эти особенности для эффективной редукции графа с сохранением информации о наибольшем независимом множестве.

2. Графы без вилок и длинных цепей

В этом разделе будет доказано, что класс $Free(F, P_8)$ является α-простым.

Пусть G — граф без вилок и длинных цепей. Предлагаемый алгоритм поиска наибольшего независимого множества состоит из двух этапов — предварительного и основного. На предварительном этапе в графе G выбирается какое-нибудь независимое множество и для этого множества ищутся увеличивающие подграфы, содержащие не более 7 вершин. Понятно, что этот поиск можно осуществить за полиномиальное время. Если такой увеличивающий подграф обнаруживается, то

производим обмен, как описано выше, получая большее независимое множество. Такая процедура повторяется до тех пор, пока не будет получено независимое множество A, для которого нет увеличивающих подграфов, содержащих менее 8 вершин.

Обозначим через B множество всех вершин графа, не принадлежащих A; вершины из A будем называть *белыми*, из B — *черными*. Множество всех белых вершин, смежных с черной вершиной x, будем называть *основанием* вершины x и обозначать через $O(x)$. Основание множества черных вершин — это объединение их оснований.

Из сделанных предположений и теоремы 1 следует, что связными увеличивающими подграфами для A могут быть только комплекты. Более того, такой комплект должен содержать не меньше четырех белых вершин, иначе из него можно удалить несколько черных вершин так, что получится увеличивающий подграф с менее чем 8 вершинами. Но если в комплекте одна доля содержит не менее четырех вершин, то каждая вершина другой доли смежна по крайней мере с тремя вершинами комплекта. Значит, никакая черная вершина, смежная менее чем с тремя белыми вершинами, не может входить в увеличитель, а следовательно, и в наибольшее независимое множество. Если такие черные вершины имеются, их можно удалить из графа. Поэтому в дальнейшем считаем, что основание каждой черной вершины состоит не менее чем из трех вершин.

Цель основного этапа алгоритма — найти наибольший увеличитель для A. Покажем, что эта задача полиномиально сводится к нахождению наибольших независимых множеств в некоторых вершинно-непересекающихся подграфах графа $\langle B\rangle$. Установим предварительно некоторые полезные факты.

Лемма 1. *Для любых черных вершин a и b справедливо одно из следующих утверждений*:

(a) $\max\{|O(a)-O(b)|, |O(b)-O(a)|\} \leqslant 1$;

(b) $O(a) \subset O(b)$ *(или наоборот)*, $|O(b)-O(a)| \geqslant 2$, *a и b смежны*;

(c) $O(a)\cap O(b)=\varnothing$, *$a$ и b не смежны.*

Доказательство. Допустим, что множество $O(a)-O(b)$ содержит по крайней мере две вершины c_1 и c_2. Если при этом a и b не смежны, то $O(a)\cap O(b)=\varnothing$, иначе вершины a, b, c_1, c_2 вместе с любой вершиной из $O(a)\cap O(b)$ образуют вилку. Если же a и b смежны, то $O(b)\subset O(a)$, иначе те же четыре вершины образуют вилку вместе с любой вершиной из $O(b)-O(a)$. Лемма доказана.

Черную вершину назовем *сильной*, если ее основание имеет непустое пересечение с основанием любой другой черной вершины, и *слабой* в противном случае.

Лемма 2. *Если граф G связен, то любая черная вершина с максимальным основанием является сильной.*

Доказательство. Допустим, что для некоторой черной вершины a с максимальным основанием есть черные вершины, основания которых не пересекаются с основанием вершины a. Среди них выберем вершину b, наименее удаленную от a. Из леммы 1 следует, что вершины a и b не смежны. Поэтому любой соединяющий их путь проходит хотя бы через одну черную вершину, отличную от a и b. Пусть x — первая после b черная вершина в кратчайшем пути из b в a. Так как расстояние между a и x меньше, чем расстояние между a и b, то $O(a) \cap O(x) \neq \varnothing$. Вершины x и b либо смежны, либо имеется белая вершина, смежная с каждой из них. В любом случае $O(b) \cap O(x) \neq \varnothing$ (если x и b смежны, это следует из леммы 1). Следовательно, множество $O(x)$ не содержится в множестве $O(a)$. Так как $O(a)$ — максимальное основание, то и $O(a)$ не содержится в $O(x)$. Тогда по лемме 1 $|O(x)-O(a)| = 1$, следовательно, $|O(x) \cap O(b)| = 1$. Но из леммы 1 и предположения о том, что основание каждой черной вершины состоит не менее чем из трех вершин, следует, что пересечение любых двух оснований, если оно не пусто, содержит не менее двух вершин. Лемма доказана.

Лемма 3. *Любая сильная вершина смежна с любой слабой.*

Доказательство. Пусть a — сильная, b — слабая вершины. Тогда $O(a) \cap O(b) \neq \varnothing$ и существует третья вершина c такая, что $O(a) \cap O(c) \neq \varnothing$, $O(b) \cap O(c) = \varnothing$. Если предположить, что для вершин a и b имеет место случай (a) леммы 1, то $|O(a) - O(b)| \leqslant 1$ и $|O(c) \cap O(a)| = 1$. Отсюда, учитывая, что $|O(c)| \geqslant 3$, получаем $|O(c) - O(a)| \geqslant 2$. Но это противоречит лемме 1, так как $O(a)$ не содержится в $O(c)$. Следовательно, для вершин a и b может иметь место только случай (b) леммы 1. Лемма доказана.

Итак, в связном графе обязательно существуют сильные вершины, а если имеются еще и слабые, то из леммы 3 следует, что любой увеличитель для A состоит либо только из сильных, либо только из слабых вершин. Это дает возможность воспользоваться приемом «разделяй и властвуй» для нахождения наибольшего увеличителя: находим наибольший увеличитель в подграфе, порожденном сильными и белыми вершинами, затем в подграфе, порожденном слабыми и белыми, и выбираем тот из них, который имеет больший прирост. Подграф, порожденный множеством слабых вершин и его основанием, является несвязным (лемма 2), и наибольший увеличитель в этом подграфе (для его множества белых вершин) есть объединение наибольших увеличителей его компонент связности. В свою очередь, в каждой компоненте имеются сильные вершины. Продолжая этот процесс измельчения, в конце концов

получим такое разбиение множества B на подмножества $B_1, \ldots, B_k$, что в каждом подграфе $\langle B_i \cup O(B_i) \rangle$ все черные вершины будут сильными (по отношению к множеству $O(B_i)$ белых вершин этого подграфа) и знание наибольших увеличителей для всех этих подграфов позволяет легко найти наибольший увеличитель для исходного графа. Множества белых вершин этих подграфов могут пересекаться, но, как будет видно из дальнейшего, существенно то, что множества черных вершин попарно не пересекаются. Далее рассматриваем один из таких подграфов, а чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что само множество B уже обладает этим свойством, т. е. состоит только из сильных вершин.

Две не смежные вершины будем называть *антиребром*, а три попарно не смежные вершины — *антитреугольником*. Последовательность антитреугольников, в которой каждые два соседних антитреугольника имеют общее антиребро, будем называть *АТ-цепью*. На множестве антиребер графа $\langle B \rangle$ определим отношение достижимости, связывающее два антиребра, если они совпадают или существует АТ-цепь, в которой первый антитреугольник содержит одно из этих антиребер, а последний — другое антиребро. Очевидно, что достижимость — отношение эквивалентности. Множество всех вершин, инцидентных антиребрам из одного класса эквивалентности, назовем *АТ-блоком*. АТ-блок назовем *невырожденным*, если в нем содержится не менее трех вершин. Ясно, что в любом независимом множестве все антиребра принадлежат одному классу достижимости. Следовательно, каждый увеличитель содержится в каком-либо невырожденном АТ-блоке графа $\langle B \rangle$.

Лемма 4. *Независимые множества, содержащиеся в одном АТ-блоке графа $\langle B \rangle$ и состоящие не менее чем из двух вершин, имеют одинаковые основания.*

Доказательство. Пусть X и Y — независимые множества, содержащиеся в одном АТ-блоке графа $\langle B \rangle$, причем $|X| \geqslant 2$, $|Y| \geqslant 2$. Допустим, что имеется белая вершина w, смежная с какой-либо вершиной $x \in X$ и не смежная с каждой вершиной из Y. Возьмем какое-нибудь антиребро из Y и рассмотрим АТ-цепь, связывающую его с каким-нибудь антиребром, инцидентным вершине x. В этой цепи каждый следующий антитреугольник имеет две общие вершины с предыдущим антитреугольником, причем у первого антитреугольника по крайней мере две вершины не смежны с w, а у последнего по крайней мере одна вершина смежна с w. Отсюда следует, что в цепи найдется антитреугольник (z_1, z_2, z_3), в котором две вершины не смежны с w, а одна вершина смежна. Но это противоречит тому, что подграф, порожденный вершинами z_1, z_2, z_3 и всеми смежными с ними белыми вершинами, является комплектом (последнее следует из того, что каждая черная вершина —

сильная и смежна не менее чем с тремя белыми вершинами). Лемма доказана.

Из леммы 4 следует, что среди независимых множеств, содержащихся в одном АТ-блоке, наибольший прирост имеет наибольшее независимое множество этого АТ-блока. Поэтому для нахождения наибольшего увеличителя для множества A достаточно найти наибольшее независимое множество в каждом невырожденном АТ-блоке графа $\langle B \rangle$ и среди них выбрать множество с наибольшим приростом. Дело осложняется тем, что АТ-блоки могут пересекаться. Далее будет показано, что задачу можно свести к поиску наибольших независимых множеств в подграфах, не имеющих общих вершин.

Две черные вершины назовем *подобными*, если они совпадают или если они смежны и каждая черная вершина, смежная с одной из них, смежна и с другой. Легко видеть, что подобие — отношение эквивалентности и каждый класс подобия либо целиком содержится в любом АТ-блоке, либо не пересекается с ним. Если в любом независимом множестве графа $\langle B \rangle$ какую-нибудь вершину заменить подобной ей, то полученное множество тоже будет независимым. Поэтому, приступая к поиску наибольших независимых множеств в АТ-блоках этого графа, можно предварительно редуцировать граф, удалив из каждого класса подобия все вершины, кроме одной. В редуцированном графе каждый класс подобия состоит из единственной вершины, а в каждом его АТ-блоке любое наибольшее независимое множество будет наибольшим независимым множеством в соответствующем АТ-блоке графа $\langle B \rangle$.

Следующее утверждение справедливо для любого графа без вилок с тривиальным отношением подобия.

Лемма 5. *Если в графе без вилок нет двух различных подобных вершин и некоторая вершина принадлежит двум разным невырожденным АТ-блокам, то она не смежна со всеми остальными вершинами этих АТ-блоков.*

Доказательство. Пусть вершина a принадлежит АТ-блокам X и Y, а C_X и C_Y — классы достижимости антиребер, соответствующие этим АТ-блокам. Допустим, что в X есть вершина x, смежная с a. Существует АТ-цепь класса C_X, соединяющая a с x, т. е. АТ-цепь, в которой антиребра входящих в нее антитреугольников принадлежат классу C_X, первый антитреугольник содержит a, последний — x. В этой АТ-цепи первый антитреугольник содержит две вершины, не смежные с a, а последний антитреугольник содержит вершину x, смежную с a. Поэтому в АТ-цепи найдется антитреугольник (c_1, c_2, b), в котором c_1 и c_2 не смежны с a, а b смежна с a. Так как $a \in Y$, то существует другой антитреугольник (a, d_1, d_2), в котором все антиребра принадлежат классу

C_Y. Каждая вершина c_1, c_2 смежна с каждой из d_1, d_2, иначе был бы антитреугольник, в котором есть антиребра из разных классов. Вершина b не может быть смежна с d_1 или d_2, так как иначе вершины a, b, c_1, c_2 и одна из вершин d_1, d_2 образовали бы вилку. Так как a и b не подобны, то существует вершина, смежная с одной из них и не смежная с другой. Пусть y смежна с a и не смежна с b (другой случай рассматривается совершенно аналогично). Вершина y не может быть смежна одновременно с c_1 и c_2, иначе была бы вилка $\langle a, b, c_1, c_2, y\rangle$. По той же причине y не может быть смежна одновременно с d_1 и d_2. Значит, y не смежна с обеими вершинами какого-либо ребра из цикла $\langle c_1, d_1, c_2, d_2\rangle$, например ребра (c_1, d_2). Но тогда имеется АТ-цепь $(c_1, c_2, b), (c_1, b, y), (b, y, d_1), (b, d_1, d_2)$, первый антитреугольник которой содержит антиребро (c_1, c_2) из класса C_X, а последний — антиребро (d_1, d_2) из класса C_Y. Однако это противоречит тому, что классы C_X и C_Y различны. Лемма доказана.

Множество всех вершин некоторого АТ-блока, которые не принадлежат другим АТ-блокам, назовем *ядром* этого АТ-блока. Из леммы 5 следует, что для нахождения наибольшего независимого множества в АТ-блоке редуцированного графа достаточно найти наибольшее независимое множество в его ядре и добавить к нему те вершины этого АТ-блока, которые не принадлежат ядру. Очевидно, что ядра различных АТ-блоков не пересекаются. Легко также видеть, что все действия, связанные с редукцией графа и с выявлением АТ-блоков, могут быть выполнены за полиномиальное время (например, выявление АТ-блоков можно свести к нахождению компонент связности вспомогательного графа, в котором вершины соответствуют антиребрам исходного графа и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие антиребра принадлежат одному антитреугольнику). Иначе говоря, суммарная трудоемкость всех действий, за исключением рекурсивного поиска наибольших независимых множеств в ядрах АТ-блоков, оценивается сверху некоторым полиномом $P(n)$ от числа вершин, а для трудоемкости $F(n)$ алгоритма в целом получаем соотношение $F(n) \leqslant P(n) + \max(F(n_1) + \ldots + F(n_k))$, где максимум берется по всем наборам натуральных чисел $n_1, \ldots, n_k$ таким, что $n_1 + \ldots + n_k < n$. Отсюда следует, что $F(n)$ ограничена сверху полиномом.

3. Цепи и звезды

В этом и следующем разделах будет доказано, что задача о независимом множестве для графа, в котором имеются звезды и длинные цепи, полиномиально сводится к той же задаче для графа с меньшим числом вершин из $Free(F, P_8)$. Структурное свойство этих графов, на котором основано сведение, описывает следующая теорема.

Теорема 2. *Если в связном графе без вилок имеются звезда и длинная цепь, то в нем есть вершина, смежная со всеми вершинами этой цепи.*

Сначала докажем некоторые вспомогательные утверждения. Чтобы различать концы рассматриваемой цепи, будем называть один из них левым, другой — правым. Тем самым выбирается (во всех случаях произвольно) одно из двух направлений вдоль цепи и можно говорить, что одна вершина расположена левее или правее другой. В звезде вершину степени 3 называем *центральной* (или *центром*), а остальные вершины — *периферийными*.

По ходу доказательства придется рассматривать различные варианты пересечения множеств вершин, порождающих звезду S и цепь P. Для краткости введем числовую характеристику этого пересечения. Присвоим каждой периферийной вершине звезды вес 1, а центральной вершине вес 4 и определим вес пересечения S и P как суммарный вес вершин, принадлежащих их пересечению. Эту величину будем обозначать через t. Очевидно, что $0 \leqslant t \leqslant 7$, но значение $t = 7$ невозможно, так как звезда не может целиком содержаться в цепи. Итак, вес пересечения звезды и цепи может принимать значения от 0 до 6. Следующая лемма устанавливает справедливость теоремы 2 для одного из этих случаев.

Лемма 6. *Если в графе без вилок множества вершин S и P порождают соответственно звезду и цепь, причем $|P| \geqslant 6$ и вес пересечения S и P равен 3, то центральная вершина звезды $\langle S \rangle$ смежна со всеми вершинами цепи $\langle P \rangle$.*

Доказательство. Вес пересечения равен 3 тогда и только тогда, когда все периферийные вершины звезды лежат на цепи, а центр — вне ее. Пусть a — центр звезды, b_1, b_2, b_3 — периферийные вершины, перечисленные слева направо. Предположим, что среди звезд, удовлетворяющих условию леммы, выбрана такая, что расстояние между b_1 и b_3 вдоль этой цепи максимально. Тогда левее b_1 и правее b_3 все вершины цепи не смежны с a. Если в цепи имеется вершина, смежная с одной из вершин b_1, b_3 и не принадлежащая отрезку цепи, заключенному между b_1 и b_3, то она вместе с вершинами звезды порождает вилку. Таким образом, b_1 является левым, а b_3 — правым концом цепи.

Допустим, левее b_2 в цепи есть вершина, не смежная с a, и пусть y — самая правая из таких вершин. Если y не смежна с b_1, то $\langle a, b_1, b_3, y, z \rangle$ — вилка, где z — вершина цепи, смежная с y и расположенная правее y. Если y смежна с b_1, но не смежна с b_2, то вилку порождает множество $\{a, b_1, b_2, b_3, y\}$. Остается случай, когда на отрезке цепи между b_1 и b_2 имеется единственная вершина. Но тогда на отрезке между b_2 и b_3 есть не менее двух вершин. Если хотя бы одна из них не смежна с a, то, как и выше, получаем вилку. Если же все вершины этого отрезка смежны

с a, то вилкой будет $\langle a, b_1, b_3, y, u\rangle$, где u — вершина цепи, лежащая через одну слева от b_3. Лемма доказана.

Пусть a — вершина, лежащая вне некоторой цепи. Максимальную подцепь этой цепи, состоящую целиком из вершин, смежных с a, будем называть *a-сегментом*; a-сегмент назовем *внутренним*, если в нем нет концевых вершин цепи.

Лемма 7. *Если в графе без вилок множество вершин P порождает цепь, $|P| \geqslant 6$, вершина a не принадлежит P и не смежна хотя бы с одной вершиной из P, то в цепи имеется не более двух a-сегментов, причем в каждом внутреннем a-сегменте содержится не менее двух вершин.*

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 6, поскольку наличие трех a-сегментов влечет существование звезды с центром a и тремя периферийными вершинами на цепи.

Допустим, что имеется внутренний a-сегмент, состоящий из единственной вершины x, и пусть y_1, y_2 — вершины цепи, смежные с x и расположенные соответственно левее и правее x. Так как имеется не более двух a-сегментов, то либо слева от y_1, либо справа от y_2 в цепи нет вершин, смежных с a. Допустим, слева от y_1 нет вершин, смежных с a. Если y_1 — не концевая вершина цепи, то соседняя с ней слева вершина цепи вместе с a, x, y_1, y_2 образует вилку. Значит, y_1 — левый конец цепи. Правее y_2 в цепи есть еще по крайней мере три вершины, пусть z_1, z_2, z_3 — вершины, следующие за y_2 слева направо. Вершина z_1 должна быть смежна с a, иначе имелась бы вилка $\langle a, x, y_1, y_2, z_1\rangle$. Если какая-нибудь из вершин z_2, z_3 смежна с a, то вместе с a, x, y_1, y_2 она образует вилку. Значит, z_2 и z_3 не смежны с a. Но и в этом случае имеется вилка $\langle a, y_2, z_1, z_2, z_3\rangle$. Лемма доказана.

Из леммы 7 следует, что нет звезд и цепей с весом пересечения 6. Действительно, если вес пересечения звезды и цепи равен 6, то у звезды имеется единственная периферийная вершина b, лежащая вне цепи. Но тогда центр звезды образует внутренний b–сегмент, состоящий из одной вершины, а это противоречит лемме 7.

Доказательство теоремы 2. Пусть P — множество вершин, порождающее цепь в связном графе без вилок, $|P| \geqslant 8$, и предположим, что в графе есть звезда. Докажем, что в нем имеется звезда, у которой вес пересечения с этой цепью равен 3. Для завершения доказательства останется применить лемму 6.

Среди множеств вершин, порождающих звезды в данном графе, выберем множество S, имеющее наибольший вес пересечения t с множеством P. Докажем, что $t > 0$. Действительно, предположим, что ни одна из звезд не имеет общих вершин с цепью $\langle P\rangle$. Тогда уточним выбор множества S: выберем его так, чтобы расстояние между множествами S и P

в графе было минимальным. Допустим, что это расстояние равно $d > 0$ и $S = \{a, b_1, b_2, b_3\}$, где a — центр звезды. Пусть x — первая вершина кратчайшего пути π от S до P, не принадлежащая множеству S. Докажем, что x смежна точно с двумя периферийными вершинами звезды. Действительно, все другие варианты приводят к противоречию:

- если x не смежна ни с одной периферийной вершиной, то x смежна с a и вершины a, x, b_1, b_2 порождают звезду, находящуюся на меньшем расстоянии от P;
- если x смежна только с одной периферийной вершиной b_1 и не смежна с a, то вершины a, x, b_1, b_2, b_3 порождают вилку;
- если x смежна только с одной периферийной вершиной b_1 и смежна с a, то вершины a, x, b_2, b_3 порождают звезду, находящуюся на меньшем расстоянии от P;
- если x смежна со всеми тремя периферийными вершинами, то $\langle x, b_1, b_2, b_3 \rangle$ — звезда на меньшем расстоянии от P.

Итак, можно считать, что x смежна с b_1 и b_2 и не смежна с b_3. Если теперь предположить, что $d \geqslant 2$, то вершина y, следующая за x на π, вместе с x, b_1, b_2 образует звезду на меньшем расстоянии от P. Значит, $d = 1$ и $x \in P$. Пусть вершина y принадлежит цепи и смежна с x. Вершина y должна быть смежна хотя бы с одной из b_1, b_2, так как иначе подграф $\langle x, y, b_1, b_2 \rangle$ является звездой на расстоянии 0 от P. Но тогда y тоже является первой вершиной кратчайшего пути от S к P и, следовательно, она смежна только с двумя периферийными вершинами. Итак, каждая вершина цепи смежна ровно с двумя периферийными вершинами звезды. Следовательно, общее число m ребер, соединяющих вершины цепи с периферийными вершинами звезды, равно $2|P|$. С другой стороны, каждая вершина b_i смежна не более чем с четырьмя вершинами цепи (иначе она была бы центром звезды с тремя периферийными вершинами на цепи). Поэтому $m \leqslant 12$, откуда $|P| \leqslant 6$, что противоречит условию.

Осталось рассмотреть случаи, когда t принимает одно из значений 1, 2, 4, 5. Предположим сначала, что $t < 3$. Вершину из P назовем *свободной*, если она не смежна ни с одной вершиной из S. Обозначим через f число всех свободных вершин, а через m число упорядоченных пар смежных вершин (x, y) таких, что $x \in P$, $y \in S$. Пусть $x \in P - S$. Если предположить, что x смежна с центром звезды и не смежна с каждой периферийной вершиной, то получается звезда с тем же центром, но с бóльшим весом пересечения. Если же x смежна только с одной периферийной вершиной звезды и не смежна с центром, то вместе со всеми вершинами звезды она образует вилку. Следовательно, всякая вершина цепи, не являющаяся свободной и не принадлежащая звезде, смежна по

крайней мере с двумя вершинами звезды. Каждая же вершина из $P \cap S$ смежна точно с одной вершиной звезды — ее центром. Поэтому получаем $m \geqslant 2(8-f-t)+t = 16-2f-t$. С другой стороны, каждая вершина звезды, не принадлежащая цепи, смежна не более чем с четырьмя вершинами цепи (иначе имелась бы звезда с $t = 3$), а каждая вершина, принадлежащая цепи, смежна не более чем с двумя другими вершинами цепи. Поэтому $m \leqslant 4(4-t)+2t = 16-2t$. Сравнивая два последних неравенства, получаем $2f \geqslant t > 0$. Следовательно, существует хотя бы одна свободная вершина. Выберем такую свободную вершину x, у которой есть смежная вершина $y \in P$, не являющаяся свободной. Если y смежна не более чем с одной периферийной вершиной звезды, то по доказанному выше она смежна и с ее центром. Но в этом случае две другие периферийные вершины, центр и вершины x, y образуют вилку. Значит, y смежна по крайней мере с двумя периферийными вершинами. Но тогда y — центр звезды с $t = 5$.

Итак, существует звезда, у которой вес пересечения с цепью не меньше трех. Предположим, что имеется звезда с $t = 4$, и докажем, что в этом случае есть и звезда с $t = 3$ или 5. Доказательство почти полностью повторяет рассуждения из предыдущего абзаца с той лишь разницей, что теперь множество $P \cap S$ состоит из единственной вершины — центра звезды, а множество $P - S$ — из трех периферийных вершин. Поэтому первое неравенство приобретает вид $m \geqslant 2(8-f-1)+3 = 17-2f$, а второе — $m \leqslant 4 \times 3 + 2 = 14$. Из сравнения этих неравенств следует существование свободной вершины. Дальше рассуждаем точно так же, как и выше, приходя к выводу, что существует звезда с $t = 5$.

Остается рассмотреть случай $t = 5$. Пусть множество S порождает звезду, у которой две периферийные вершины b_1 и b_2 находятся вне цепи P, а третья периферийная вершина b_3 и центр a лежат на P. Если какая-либо из вершин b_1, b_2 смежна с пятью или более вершинами цепи, то она является центром звезды с $t = 3$. Поэтому предполагаем, что каждая из b_1, b_2 смежна не более чем с четырьмя вершинами цепи. Вершину цепи, не смежную с обеими вершинами b_1, b_2, будем называть *чистой*. Допустим, что существует вершина $z \in P$, смежная с b_1 и не смежная с b_2. Если z смежна с a, то образуется b_2-сегмент, состоящий из единственной вершины a, что противоречит лемме 7. Если же z не смежна ни с a, ни с b_3, то z вместе с вершинами звезды образует вилку. Таким образом, в цепи существует не более чем одна вершина, смежная с b_1 и не смежная с b_2 (или наоборот). Любая из остальных вершин цепи либо смежна с каждой из вершин b_1, b_2, либо не смежна с каждой из них. Отсюда следует, что имеется не менее четырех чистых вершин. Так как по лемме 7 имеется не более двух b_1-сегментов, то найдутся две

смежные чистые вершины. Такие две вершины x_1, x_2 можно выбрать так, чтобы в цепи имелась вершина y, смежная с одной из них и не являющаяся чистой. Если y смежна с вершинами b_1, b_2, то $\langle b_1, b_2, x_1, x_2, y\rangle$ — вилка. Если же y смежна только с одной из них, скажем, с b_1, то вилкой является $\langle b_1, b_3, x_1, x_2, y\rangle$. Теорема доказана.

4. Устранение длинных цепей

Покажем, как можно использовать описанные в предыдущем разделе свойства графов, в которых есть звезды и длинные цепи, для полиномиального сведения задачи о независимом множестве для такого графа к той же задаче для графа без вилок с меньшим числом вершин.

Теорема 3. *Пусть G — связный граф без вилок, в котором имеются звезда и длинная цепь. Тогда множество вершин графа G можно разбить на три подмножества A, B и C такие, что*

1) *каждая вершина из A смежна с каждой вершиной из B;*
2) *каждая вершина из B не смежна с каждой вершиной из C;*
3) *в подграфе $\langle B\rangle$ имеется компонента связности, содержащая не менее двух вершин и не содержащая звезд.*

Доказательство. Пусть P — множество вершин, порождающее длинную цепь в G. Определим A как множество вершин, каждая из которых не принадлежит множеству P и смежна со всеми вершинами из P. Из теоремы 2 следует, что $A \neq \varnothing$. Определим B как множество вершин, не принадлежащих множеству A и смежных со всеми вершинами из A. Очевидно, что $P \subseteq B$. Все оставшиеся вершины образуют множество C. В подграфе $\langle B\rangle$ нет вершины, смежной со всеми вершинами из P, так как все такие вершины были включены в A. Поэтому по теореме 2 компонента связности этого подграфа, включающая множество P, не содержит звезд.

Остается доказать, что каждая вершина из B не смежна с каждой вершиной из C. Действительно, допустим, что вершина $x \in C$ смежна с какой-либо вершиной из B. Сначала предположим, что смежная с x вершина y имеется в P. По построению существует вершина $z \in A$, не смежная с x. Так как x смежна не со всеми вершинами из P (иначе она вошла бы в A), то по лемме 6 она не является центром звезды с периферийными вершинами на P. Поэтому кроме y в цепи имеется не более трех вершин, смежных с x. При этом если y — внутренняя вершина цепи, то хотя бы одна из смежных с y вершин цепи смежна и с x, иначе образовался бы внутренний x-сегмент из одной вершины. Отсюда следует, что в цепи имеются по крайней мере еще три вершины, не смежные ни с x, ни с y. Среди таких трех вершин найдутся две не

смежные между собой, но тогда эти две вершины вместе с x, y, z образуют вилку. Остается рассмотреть случай, когда вершина x не смежна с каждой вершиной из P и смежна по крайней мере с одной вершиной из $B - P$, скажем с вершиной y. Но тогда по лемме 6 в P имеется не более четырех вершин, смежных с y, а среди остальных вершин можно опять выбрать две вершины, образующие вилку с вершинами x, y, z. Теорема доказана.

Ясно, что построение разбиения, описанное в доказательстве, может быть выполнено в полиномиальное время. Покажем теперь, как можно использовать это разбиение для нахождения наибольшего независимого множества.

Пусть G — граф, удовлетворяющий условиям теоремы 3, A, B, C — множества, существование которых утверждается в теореме. Разобьем B на два подмножества: B_1, порождающее в подграфе $\langle B\rangle$ компоненту связности, не содержащую звезд и состоящую не менее чем из двух вершин (на самом деле, как видно из доказательства, имеется такая компонента не менее чем с восемью вершинами), и $B_2 = B - B_1$. В графе без звезд $\langle B_1\rangle$ найдем наибольшее независимое множество W. Так как $\langle B_1\rangle$ — связный граф, то $|W| < |B_1|$. Удалим из G все вершины множества $B_1 - W$, т. е. рассмотрим подграф $G' = \langle A \cup C \cup B_2 \cup W\rangle$. Из строения графа G следует, что каждое независимое множество M этого графа целиком содержится либо в $A \cup C$, либо в $B \cup C$. В первом случае M будет независимым множеством и в G', а во втором случае множество $(M - B_1) \cup W$ является независимым множеством в G' и содержит не менее $|M|$ вершин. Таким образом, для всякого независимого множества в графе G имеется независимое множество той же мощности в его подграфе G'. Отсюда следует, что наибольшее независимое множество в G' будет наибольшим и в G. Отметим, что B_1 и W находятся за полиномиальное время.

Итак, при наличии в графе звезд и длинных цепей задача о независимом множестве для этого графа полиномиально сводится к той же задаче для его подграфа с меньшим числом вершин. Эта редукция повторяется до тех пор, пока не получится граф, не содержащий либо звезд, либо длинных цепей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е.** О влиянии локальных ограничений на сложность определения числа независимости графа // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1982. С. 3–13.

2. **Алексеев В. Е.** О числе тупиковых независимых множеств в графах из наследственных классов // Комбинаторно-алгебраические методы в дискретной оптимизации. Н. Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 1991. С. 5–8.
3. **Алексеев В. Е., Коробицын Д. В.** О сложности некоторых задач на наследственных классах графов // Дискрет. математика. 1992. Т. 4, вып. 4. С. 34–40.
4. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
5. **De Simone C., Sassano A.** Stability number of bull- and chair-free graphs // Discrete Appl. Math. 1993. V. 41, N 2. P. 121–129.
6. **Lovász L., Plummer M. D.** Matching Theory. Amsterdam: Norh-Holland, 1986. (Ann. Discrete Math.; V. 29).
7. **Minty G.** On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs // J. Combin. Theory. Ser. B. 1980. V. 28, N 3. P. 284–304.
8. **Sbihi N.** Algorithme de recherche d'un stable de cardinalite maximum dans un graphe sans etoile // Discrete Math. 1980. V. 29, N 1. P. 53–76.
9. **Tsukigama S., Ide M., Ariochi H., Ozaki H.** A new algorithm for generating all the maximal independent sets // SIAM J. Comput. 1977. V. 6, N 3. P. 505–517.

Адрес автора:

Нижегородский
государственный университет,
пр. Гагарина, 23, корп. 2,
603600 Нижний Новгород,
ГСП-20, Россия.
E-mail: aleve@mail.ru

Статья поступила
14 января 1999 г.,
переработанный вариант —
19 июля 1999 г.