ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1999. Серия 1. Том 6, № 4, 104–120

УДК 519.176

МАКСИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ЖАДНОГО АЛГОРИТМА*)

В. В. Шенмайер

Рассматриваются задачи, обобщающие известную задачу о базе матроида максимального веса. Цель статьи состоит в выявлении классов задач, при решении которых с использованием жадных алгоритмов удается получать оптимальные решения при любой линейной целевой функции. Предложено обобщение аксиомы матроидов, являющееся достаточным и необходимым условием оптимальности жадного алгоритма в случае монотонных вниз систем целочисленных неотрицательных векторов. Расширена область действия критерия оптимальности, справедливого для случая систем множеств, не обладающих свойством монотонности вниз. Установлены новые критерии и достаточные условия оптимальности жадного алгоритма — как в общем, так и в частных случаях.

Введение

Согласно теореме Радо — Эдмондса [11, 4–6] в случае монотонных вниз систем множеств (систем независимости) жадный алгоритм позволяет находить оптимальное решение тогда и только тогда, когда система является матроидом. В статье рассматривается более общий случай — случай монотонных вниз систем целочисленных неотрицательных векторов, и предлагается обобщение аксиомы матроидов, являющееся достаточным и необходимым условием оптимальности жадного алгоритма для этого случая.

В [7, 8] найден критерий оптимальности жадного алгоритма для случая систем множеств, не обладающих свойством монотонности вниз. Ниже аналогичные критерии установлены для более общих классов задач.

Отметим, что в настоящее время имеется немного результатов, касающихся произвольных систем векторов, не обладающих свойствами

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 1997–А0051).

монотонности или выпуклости. В статье сделана попытка заполнить этот пробел: установлено несколько новых критериев и достаточных условий оптимальности жадного алгоритма как в общем, так и в частных случаях.

1. Постановки задач и описание алгоритма

Ниже рассматриваются следующие три задачи.

(1) БАЗА МАКСИМАЛЬНОГО ВЕСА. Пусть $\mathscr{F}$ — система подмножеств множества $I = \{1, \ldots, n\}$, где n — некоторое натуральное число. *Базой* системы $\mathscr{F}$ называется любое максимальное по включению множество из $\mathscr{F}$.

Пусть система $\mathscr{F}$ удовлетворяет следующему условию:

$$\begin{gathered}\text{если } A \text{ — непустое множество и } A \in \mathscr{F},\\ \text{то } A - i \in \mathscr{F} \text{ при некотором } i \in A.\end{gathered} \tag{1}$$

Системы, удовлетворяющие условию (1), называются *системами достижимых множеств* [7]. Предполагается, что каждому элементу $i \in I$ приписано вещественное число $d(i)$, называемое *весом элемента* i. *Весом подмножества* A из $\mathscr{F}$ называется величина $f(A) = \sum_{i \in A} d(i)$.

Рассматривается задача нахождения среди всех баз системы $\mathscr{F}$ базы максимального веса.

Для решения задачи предлагается использовать жадный алгоритм, который работает следующим образом: алгоритм начинает с пустого множества и на каждом шаге к имеющемуся множеству A добавляет один элемент максимального веса из множества $J(A) \rightleftharpoons \{i \in I \mid A \cup i \in \mathscr{F}$ и $i \notin A\}$.

(2) МАКСИМАЛЬНЫЙ ВЕКТОР МАКСИМАЛЬНОГО ВЕСА. Данная задача является обобщением предыдущей. Пусть $\Im$ — конечная система векторов с целыми неотрицательными компонентами, которые пронумерованы элементами множества $I = \{1, \ldots, n\}$. Положим $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где единственная единица расположена в i-й позиции. Пусть система $\Im$ удовлетворяет следующему условию:

$$\begin{gathered}\text{если } A \text{ — не нулевой вектор и } A \in \Im,\\ \text{то } A - e_i \in \Im \text{ при некотором } i \in I.\end{gathered} \tag{2}$$

Системы, удовлетворяющие условию (2), назовем *системами достижимых векторов*. Через $A(i)$ обозначим i-ю компоненту вектора A. Как и в предыдущей задаче, предполагается, что каждому элементу $i \in I$ приписано вещественное число $d(i)$, называемое весом элемента i. *Весом вектора* A из $\Im$ называется величина $f(A) = \sum_{i \in I} d(i)A(i)$.

Рассматривается задача нахождения среди всех максимальных векторов системы $\Im$ вектора максимального веса.

Для решения задачи предлагается использовать жадный алгоритм, который работает следующим образом: алгоритм начинает с нулевого вектора и на каждом шаге к имеющемуся вектору A добавляет вектор e_i, где i имеет максимальный вес среди элементов множества $J(A) = \{i \in I \mid A + e_i \in \Im\}$.

(3) Непродолжаемый путь максимального веса. Пусть $G = (V, E)$ — ориентированный бесконтурный граф с одной источниковой вершиной, т. е. граф, содержащий некоторую вершину $x_0 \in V$, из которой достижимы все остальные вершины графа. Кроме того, пусть каждая дуга $u \in E$ помечена индексом $i(u)$, являющимся элементом множества $I = \{1, \dots, n\}$. При этом разные дуги могут быть помечены одинаковыми индексами. Такой граф назовем *индексированным графом.*

Допустимыми путями считаем пути, начинающиеся в x_0. Через $i_s(\mu)$ обозначим индекс s-й дуги пути μ и через $l(\mu)$ — число дуг пути μ. Предполагается, что каждому индексу $i \in I$ приписано вещественное число $d(i)$, называемое *весом индекса i*. *Весом дуги $u \in E$* называется величина $d(i(u))$, являющаяся весом индекса этой дуги. Смысл введения индексов заключается в том, чтобы было ясно, какие дуги имеют одинаковый вес. *Весом пути μ* называется величина $f(\mu) = \sum_{s=1}^{l(\mu)} d(i_s(\mu))$.

Рассматривается задача нахождения среди всех непродолжаемых допустимых путей графа G пути максимального веса.

Для решения задачи предлагается использовать жадный алгоритм, который работает следующим образом: алгоритм начинает с вершины x_0 и на каждом шаге к имеющемуся пути μ добавляет такую дугу, которая выходит из концевой вершины пути μ и имеет максимальный вес. В связи с тем, что граф не содержит контуров, алгоритм завершает свою работу через конечное число шагов.

Примерами индексированных графов являются *диаграммы Хассэ* для задач (1) и (2): вершины — это допустимые решения, x_0 — пустое множество или нулевой вектор, а множество дуг определяется по правилу: вершины A и B связаны дугой с индексом i, если B является непосредственным продолжением A, т. е. либо $B = A \cup i$ и $i \notin A$, либо $B = A + e_i$.

2. Критерии оптимальности матроидного типа

Говорим, что жадный алгоритм *находит оптимальное решение*, если при любых весах $d(i)$ все находимые им решения оптимальны.

Классическим примером критерия оптимальности жадного алгоритма является теорема Радо — Эдмондса. В ней идет речь о системах независимости. Система множеств $\mathscr{F}$ называется *системой независимости,* или *системой, монотонной вниз*, если из того, что $A \subseteq B \in \mathscr{F}$, следует $A \in \mathscr{F}$. Очевидно, что это условие сильнее условия (1).

Пусть $|A|$ — мощность множества A и $J(A) = \{i \in I \mid A \cup i \in \mathscr{F}$ и $i \notin A\}$. Система независимости называется *матроидом*, если выполнено следующее условие:

$$\text{если } A, B \in \mathscr{F} \text{ и } |A| + 1 = |B|, \text{ то } J(A) \cap B \neq \varnothing. \tag{3}$$

Теорема 1 [11, 4–6]. *Жадный алгоритм находит оптимальное решение в случае системы независимости тогда и только тогда, когда эта система является матроидом.*

Система векторов $\Im \subseteq N^I$ называется *монотонной вниз*, если из того, что $A \leqslant B \in \Im$ и $A \in N^I$, следует $A \in \Im$. Очевидно, что это условие сильнее условия (2).

Пусть $\mathscr{B}(\Im)$ — множество максимальных векторов системы $\Im$;
$|A|$ — сумма компонент вектора A;
$I(A) = \{\ i \in I \mid A(i) > 0\ \}$;
$J(A) = \{\ i \in I \mid A + e_i \in \Im\ \}$.

Кроме того, пусть система векторов $\Im$ такова, что

$$\text{если } A, B \in \Im \text{ и } |A| + 1 = |B|, \text{ то } J(A) \cap (I(A) \cup I(B)) \neq \varnothing. \tag{4}$$

Тогда если $\Im$ — система булевых векторов, то условия (3) и (4) эквивалентны, т. е. условие (4) является обобщением условия (3) на случай систем целочисленных неотрицательных векторов.

Теорема 2. *Жадный алгоритм находит оптимальное решение в случае монотонной вниз системы целочисленных неотрицательных векторов тогда и только тогда, когда эта система удовлетворяет условию* (4).

Доказательство. Необходимость. Допустим, что векторы $A, B \in \Im$ таковы, что $|A| + 1 = |B|$ и $J(A) \cap (I(A) \cup I(B)) = \varnothing$. Положим

$$d(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in I(A) \cup I(B), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что при таких весах вектор A может быть построен в соответствии с правилами жадного алгоритма. Следовательно, существует максимальный вектор A', $A' \geqslant A$, полученный с помощью жадного алгоритма. Пусть $i \in I(A' - A)$. Тогда $A + e_i \leqslant A'$. Отсюда и из свойства монотонности вниз системы $\Im$ следует, что $A + e_i \in \Im$. Поэтому $I(A' - A) \subseteq J(A)$.

Так как $J(A) \subseteq \{i \mid d(i) = 0\}$, то $f(A') = f(A) = |A|$. Пусть B' — максимальный вектор такой, что $B' \geqslant B$. Тогда будет справедлива цепочка соотношений $f(B') \geqslant f(B) = |A| + 1 > f(A')$. Но это противоречит оптимальности жадного алгоритма.

Достаточность. Допустим, что A и B — два максимальных вектора из системы $\Im$ и $|A| < |B|$. Тогда из условия (4) следует, что $J(A) \neq \varnothing$. Но это противоречит максимальности вектора A. Поэтому все максимальные векторы системы $\Im$ имеют одинаковую сумму компонент.

Предположим, что $A = e_{a(1)} + \ldots + e_{a(k)} \in \mathscr{B}(\Im)$, где для каждого $s = 1, \ldots, k$ индекс $a(s)$ выбран в соответствии с правилами жадного алгоритма.

Пусть $B \in \mathscr{B}(\Im)$. Так как система $\Im$ монотонна вниз, то вектор B можно представить в виде $B = e_{b(1)} + \ldots + e_{b(k)}$, где индексы $b(s)$ упорядочены по невозрастанию весов и $e_{b(1)} + \ldots + e_{b(s)} \in \Im$ для всех $s = 1, \ldots, k$. Пусть p — минимальный номер такой, что $d(a(p)) < d(b(p))$. Из условия (4) следует существование индекса $a \in \{a(1), \ldots, a(p-1), b(1), \ldots, b(p)\}$ такого, что $e_{a(1)} + \ldots + e_{a(p-1)} + e_a \in \Im$. Так как индексы $b(s)$ упорядочены по невозрастанию весов, то имеем цепочку неравенств

$$d(a) \geqslant \min\{d(a(1)), \ldots, d(a(p-1)), d(b(p))\} \geqslant \min\{d(b(1)), \ldots, d(b(p-1)), d(b(p))\} = d(b(p)).$$

Следовательно, $d(a) > d(a(p))$. Но это противоречит выбору, который делается жадным алгоритмом на шаге p. Таким образом, получаем, что $d(a(s)) \geqslant d(b(s))$ для всех $s = 1, \ldots, k$. Поэтому $f(A) \geqslant f(B)$. Теорема доказана.

Аналогично показывается, что выполнение условия (4) является необходимым и достаточным условием оптимальности жадного алгоритма и в некоторых более общих случаях, чем случай монотонных вниз систем. Например, если система векторов обладает следующим свойством:

$$\text{если } A \in \Im \text{ и } i \in I, \text{ то } A - A(i)e_i \in \Im.$$

Перейдем к случаю индексированных графов. Введем следующие обозначения:

W — множество допустимых путей;

$\mathscr{B}$ — множество непродолжаемых допустимых путей;

$J(\mu) = \{i(u) \mid \text{дуга } u \text{ продолжает путь } \mu\}$;

$J(x) = \{i \mid i = i(x, x'),\ (x, x') \in E\}$;

$I(\mu) = \{\ i(u) \mid \text{дуга } u \text{ принадлежит пути } \mu\}$.

Если индексированный граф $G(\Im)$ является диаграммой Хассэ для монотонной вниз системы векторов $\Im$, то он обладает следующими свойствами:

(j) множество последовательностей вида $i_1(\mu), \ldots, i_{l(\mu)}(\mu)$, где $\mu \in W$, замкнуто относительно перестановок;

(jj) если $(x, y) \in E$, то $J(y) \subseteq J(x)$.

Если система $\Im$ удовлетворяет условию (4), то граф $G(\Im)$ обладает свойством

$$\text{если } \mu, \eta \in W \text{ и } l(\mu) + 1 = l(\eta), \text{ то } J(\mu) \cap (I(\mu) \cup I(\eta)) \neq \varnothing. \quad (5)$$

Теорема 3. (a) *Если индексированный граф обладает свойством* (j), *то условие* (5) *является достаточным для оптимальности жадного алгоритма;*

(b) *если индексированный граф обладает свойством* (jj), *то условие* (5) *является необходимым для оптимальности жадного алгоритма.*

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Теоремы 2 и 3 свидетельствуют о том, что условия (4) и (5) являются обобщением условия (3) на случай систем векторов и индексированных графов. Это хорошо согласуется со следующим фактом.

Пусть A — произвольное подмножество множества I,

$\mathcal{F}_A = \{F \in \mathcal{F} \mid F \subseteq A\}$,

$\Im_A = \{X \in \Im \mid I(X) \subseteq A\}$,

G_A — граф, составленный лишь из тех допустимых путей графа G, в которых все дуги помечены индексами из A.

Легко проверить, что (3) эквивалентно следующему свойству:

для любого $A \subseteq I$ все базы системы $\mathcal{F}_A$ равномощны.

Теорема 4. (a) *Система достижимых векторов* $\Im$ *обладает свойством* (4) *тогда и только тогда, когда для любого* $A \subseteq I$ *все максимальные векторы системы* $\Im_A$ *имеют одинаковую сумму компонент;*

(b) *индексированный граф* G *обладает свойством* (5) *тогда и только тогда, когда для любого* $A \subseteq I$ *во всех непродолжаемых допустимых путях графа* G_A *содержится по одинаковому числу дуг.*

Доказательство. Необходимость. Пусть индексированный граф удовлетворяет условию (5) и μ, η — два непродолжаемых допустимых пути в графе G_A таких, что $l(\mu) < l(\eta)$. Тогда в исходном графе G имеют место следующие соотношения: $I(\mu) \subseteq A$, $J(\mu) \cap A = \varnothing$ и $I(\eta') \subseteq A$, где η' — путь, состоящий из первых $(l(\mu) + 1)$-й дуги пути η. Отсюда следует, что $J(\mu) \cap (I(\mu) \cup I(\eta')) = \varnothing$. Но это противоречит свойству (5).

Достаточность. Пусть μ и η — такие допустимые пути графа G, что $l(\mu) + 1 = l(\eta)$ и $J(\mu) \cap (I(\mu) \cup I(\eta)) = \varnothing$. Тогда если $A = I(\mu) \cup I(\eta)$, то в графе G_A имеются допустимый путь η и непродолжаемый допустимый путь μ такие, что $l(\eta) > l(\mu)$. Но это противоречит условию, что в непродолжаемых допустимых путях графа G_A содержится по одинаковому числу дуг.

Утверждение (a) доказывается аналогично.

3. Критерий оптимальности в общем случае

Пусть G — произвольный индексированный граф и $\mu \in W$. Обозначим через $J_s(\mu)$ множество индексов дуг, выходящих из s-й вершины пути μ. На множестве индексов I определим бинарное отношение доминирования $>_\mu$. Пусть $i, j \in I$. Тогда если $i = i_s(\mu)$ и $j \in J_s(\mu)$ для некоторого $s \in \{1, \dots, l(\mu)\}$, то считаем, что

$i \succ_\mu j$ (*i непосредственно доминирует j относительно пути μ*).

Если $i = i_1 \succ_\mu i_2 \succ_\mu \dots \succ_\mu i_p = j$ для некоторого набора индексов $i_1, i_2, \dots, i_p$, то считаем, что

$$i >_\mu j \text{ (}i\text{ доминирует } j \text{ относительно пути } \mu\text{)}.$$

Отметим, что отношение $>_\mu$ рефлексивно на множестве $I(\mu)$ и транзитивно на I.

Пусть $A \subseteq I$. Обозначим через $\mu * A$ множество дуг пути μ с индексами из A. По аналогии с [7] определим *базисный ранг множества* A следующим образом:

$$\beta(A) = \max_{\mu \in \mathscr{B}} |\mu * A|.$$

Говорим, что A *согласовано с путем* μ, если для каждого $s = 1, \dots, l(\mu)$

$$\text{из } i_s(\mu) \notin A \text{ следует } J_s(\mu) \cap A = \varnothing.$$

Лемма 1. *Если жадный алгоритм находит оптимальное решение при весах 0 и 1, то во всех непродолжаемых допустимых путях содержится по одинаковому числу дуг.*

Доказательство. Положим веса всех индексов равными 1. Тогда любой путь $\mu \in \mathscr{B}$ может быть получен по правилам жадного алгоритма и при этом имеет вес $l(\mu)$. Поэтому для всех $\mu \in \mathscr{B}$ имеем $l(\mu) \equiv \mathrm{const}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Следующие высказывания эквивалентны:*

(a) *путь $\mu \in W$ построен в соответствии с правилами жадного алгоритма;*

(b) *если $i \succ_\mu j$, то $d(i) \geqslant d(j)$;*

(c) *если $i >_\mu j$, то $d(i) \geqslant d(j)$.*

Доказательство. ((a) $\Rightarrow$ (b)). Пусть $i \succ_\mu j$. Тогда для некоторого $s \in \{1, \dots, l(\mu)\}$ имеем $i = i_s(\mu)$ и $j \in J_s(\mu)$. Отсюда в соответствии с правилами жадного алгоритма получаем $d(i) \geqslant d(j)$.

((b) $\Rightarrow$ (c)). Предположим, что $i >_\mu j$. Тогда существует последовательность $i_1, i_2, \dots, i_p$ такая, что $i = i_1 \succ_\mu i_2 \succ_\mu \dots \succ_\mu i_p = j$. Следовательно, $d(i) = d(i_1) \geqslant d(i_2) \geqslant \dots \geqslant d(i_p) = d(j)$.

((c) $\Rightarrow$ (a)). Пусть $j \in J_s(\mu)$ для некоторого $s \in \{1, \dots, l(\mu)\}$. Тогда $i_s(\mu) >_\mu j$. Следовательно, $d(i_s(\mu)) \geqslant d(j)$. Таким образом, путь μ построен в соответствии с правилами жадного алгоритма. Лемма доказана.

Теорема 5. *Следующие высказывания эквивалентны:*

(a) *жадный алгоритм находит оптимальное решение;*

(b) *жадный алгоритм находит оптимальное решение при весах* 0 *и* 1;

(c) *если пути μ, η принадлежат множеству $\mathscr{B}$, то $l(\mu) = l(\eta)$ и существует такая перестановка π множества $\{1, \dots, l\}$, где $l = l(\mu)$, что*

$$i_s(\mu) >_\mu i_{\pi(s)}(\eta) \text{ для всех } s = 1, \dots, l;$$

(d) *если путь μ принадлежит множеству $\mathscr{B}$ и множество A согласовано с μ, то*

$$|\mu * A| = \beta(A).$$

Доказательство. ((a)$\Rightarrow$ (b)). Очевидно.

((b) $\Rightarrow$ (c)). Пусть пути μ и η принадлежат множеству $\mathscr{B}$. Согласно лемме 1 имеем $l(\mu) = l(\eta)$. Рассмотрим двудольный граф $(V_1,\ V_2;\ E_0)$, где $V_1 = \{a_1, \dots, a_l\}$, $V_2 = \{b_1, \dots, b_l\}$ и множество ребер E_0 определяется по следующему правилу: $\{a_p, b_s\} \in E_0$, если $i_p(\mu) >_\mu i_s(\eta)$.

Для произвольного множества $A \subseteq V_1$ положим

$$d(j) = \begin{cases} 0, & \text{если } j <_\mu i_p(\mu) \text{ для некоторого } p \text{ со свойством } a_p \in A, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если индексы $i, i' \in I$ таковы, что $i <_\mu i'$, то выполняется неравенство $d(i) \leqslant d(i')$. Отсюда с использованием леммы 2 получаем, что путь μ может быть получен по правилам жадного алгоритма. При этом имеют место следующие соотношения:

$$f(\mu) = l - |\{q \mid i_q(\mu) <_\mu i_p(\mu) \text{ для некоторого } p \text{ такого, что } a_p \in A\}| \leqslant l - |A|;$$

$$f(\eta) = l - |\{s \mid i_s(\eta) <_\mu i_p(\mu) \text{ для некоторого } p \text{ такого, что } a_p \in A\}| = l - |\Delta A|,$$

где ΔA — множество вершин из V_2, смежных с вершинами из A.

В силу условия оптимальности при весах 0 и 1 имеем $|A| \leqslant |\Delta A|$. Отсюда в соответствии с теоремой Кенига — Холла [1] о совершенных паросочетаниях получаем, что существует такая перестановка π множества $\{1, \dots, l\}$, что $\{a_s, b_{\pi(s)}\} \in E_0$ для каждого $s = 1, \dots, l$. Но по правилам построения графа $(V_1,\ V_2;\ E_0)$ это эквивалентно тому, что $i_s(\mu) >_\mu i_{\pi(s)}(\eta)$.

((c) $\Rightarrow$ (a)). Пусть пути μ, η принадлежат множеству $\mathscr{B}$ и перестановка π множества $\{1, \dots, l\}$ такова, что $i_s(\mu) >_\mu i_{\pi(s)}(\eta)$ при каждом $s = 1, \dots, l$. Тогда если путь μ построен в соответствии с правилами жадного алгоритма, то согласно лемме 2 имеем $d(i_s(\mu)) \geqslant d(i_{\pi(s)}(\eta))$ при каждом $s = 1, \dots, l$. Отсюда следует неравенство $f(\mu) \geqslant f(\eta)$.

((b) $\Rightarrow$ (d)). Пусть множество A согласовано с путем μ. Положим

$$d(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in A, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $s \in \{1, \dots, l(\mu)\}$ и вес индекса $i_s(\mu)$ равен нулю, то $i_s(\mu)$ не принадлежит множеству A. Отсюда следует, что $J_s(\mu) \cap A = \varnothing$ и $d(j) = 0$ при каждом $j \in J_s(\mu)$. Таким образом, путь μ построен в соответствии с правилами жадного алгоритма. Поэтому выполняется цепочка равенств

$$|\mu * A| = f(\mu) = \max_{\eta \in \mathscr{B}} f(\eta) = \max_{\eta \in \mathscr{B}} |\eta * A| = \beta(A).$$

((d) $\Rightarrow$ (b)). Если путь μ получен в соответствии с правилами жадного алгоритма, то множество $A = \{i \mid d(i) = 1\}$ согласовано с путем μ. Поэтому

$$f(\mu) = |\mu * A| = \beta(A) = \max_{\eta \in \mathscr{B}} |\eta * A| = \max_{\eta \in \mathscr{B}} f(\eta).$$

Теорема доказана.

Сформулируем утверждение, аналогичное теореме 5, для случая систем векторов. Пусть $\Im \subseteq N^I$ — система достижимых векторов и $A = (a(1), \dots, a(k))$ — некоторая последовательность элементов множества I. Будем говорить, что A — *допустимая последовательность*, если $e_{a(1)} + \ldots + e_{a(s)} \in \Im$ при каждом $s = 1, \dots, k$. Ясно, что допустимые последовательности системы $\Im$ соответствуют допустимым путям в графе $G(\Im)$. Пусть $i, j \in I$ и $A = (a(1), \dots, a(k))$ — допустимая последовательность. Тогда если для некоторого s последовательность $(a(1), \dots, a(s-1), j)$ допустима и $i = a(s)$, то считаем, что

$i \succ_A j$ (*i непосредственно доминирует j относительно последовательности A*).

Если $i = i_1 \succ_A i_2 \succ_A \ldots \succ_A i_p = j$ для некоторого набора индексов $i_1, i_2, \ldots, i_p$, то считаем, что

$i >_A j$ (*i доминирует j относительно последовательности A*).

Следствие теоремы 5. *Следующие высказывания эквивалентны:*
(a) *жадный алгоритм находит оптимальное решение;*
(b) *жадный алгоритм находит оптимальное решение при весах* 0 *и* 1;
(c) *если $A = (a(1), \ldots, a(l))$ и $B = (b(1), \ldots, b(m))$ — непродолжаемые допустимые последовательности, то $l = m$ и существует такая перестановка π множества $\{1, \ldots, l\}$, что*

$$a(s) >_A b(\pi(s)) \text{ для всех } s = 1, \ldots, l.$$

4. Критерии оптимальности в частных случаях

Введем следующие обозначения:
a — произвольная вершина некоторого индексированного графа;
$W(a)$ — множество путей, начинающихся в вершине a;
$\mathscr{B}(a)$ — множество непродолжаемых путей с началом в a;
$\mathscr{B}^*(a)$ — множество непродолжаемых путей, построенных по правилам жадного алгоритма при условии, что он начинает свою работу в вершине a;
$\mathscr{B}^* = \mathscr{B}^*(x_0)$;
$\mu\eta$ — путь, получаемый после склейки путей μ и η;
μ^* — вектор, в котором компонента $\mu^*(i)$, $i \in I$, равна $|\mu * \{i\}|$ — числу дуг в пути μ с индексом i.

Теорема 6. *Пусть индексированный граф удовлетворяет условию*

$$\text{если две дуги } (x, y) \text{ и } (x', y') \text{ одного пути имеют одинаковый индекс и первая дуга предшествует второй дуге, то } J(x) \subseteq J(x'). \tag{6}$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:
(a) *жадный алгоритм находит оптимальное решение;*
(b) *для любой дуги $(x, z) \in E$ и пути $\eta \in \mathscr{B}(x)$ существует путь $\zeta \in W(z)$ такой, что*

$$\zeta^* = \eta^* - e_j, \text{ где } j \in J(x);$$

(c) *если пути μ, η принадлежат множеству $\mathscr{B}$, то $l(\mu) = l(\eta)$ и существует такая перестановка π множества $\{1, \ldots, l\}$, где $l = l(\mu)$, что*

$$i_{\pi(s)}(\eta) \in J_s(\mu) \text{ для всех } s = 1, \ldots, l.$$

Для доказательства теоремы 6 нам потребуются две следующие леммы.

Лемма 3. *Если жадный алгоритм оптимален и выполнено условие* (6), *то имеет место свойство*

$$\text{если } \mu \in W - \mathscr{B} \text{ и } \eta \in \mathscr{B}, \text{ то } J(\mu) \cap I(\eta^* - \mu^*) \neq \varnothing. \tag{7}$$

Доказательство леммы 3. Положим

$$d(i) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \in J(\mu), \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $d(i_s(\mu)) = 0$ для некоторого $s \in \{1, \dots, l(\mu)\}$, то $i_s(\mu) \in J(\mu)$. Отсюда согласно условию (6) следует, что $J_s(\mu) \subseteq J(\mu)$. Таким образом, получаем $d(j) = 0$ при каждом $j \in J_s(\mu)$. Следовательно, путь μ может быть получен в соответствии с правилами жадного алгоритма.

Согласно лемме 1 все пути из множества $\mathscr{B}$ имеют одинаковое число дуг. Обозначим это число через l. Пусть a — концевая вершина пути μ и $\mu' \in \mathscr{B}^*(a)$. Так как первая дуга пути μ' имеет индекс из множества $J(\mu)$, то вес пути μ' не превосходит $l - l(\mu) - 1$. При этом имеем $f(\mu) = l(\mu) - |\mu * J(\mu)|$. Таким образом, получаем соотношение $f(\mu\mu') \leqslant l - 1 - |\mu * J(\mu)|$. С другой стороны, вес пути η равен $l - |\eta * J(\mu)|$. Отсюда и из условия оптимальности жадного алгоритма следует, что $|\eta * J(\mu)| \geqslant |\mu * J(\mu)| + 1$. Поэтому существует индекс $i \in J(\mu)$ такой, что $|\eta * \{i\}| > |\mu * \{i\}|$, что означает $i \in I(\eta^* - \mu^*)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если выполнено условие* (6) *и* $i_s(\xi) = i >_\xi j$, *где* $\xi \in \mathscr{B}$, *то существует такая последовательность* $s(1), s(2), \dots, s(p)$, *что* $s = s(1) < s(2) < \dots < s(p)$, $j \in J_{s(p)}(\xi)$ *и* $i_{s(t+1)}(\xi) \in J_{s(t)}(\xi)$ *при каждом* $t = 1, \dots, p-1$.

Доказательство леммы 4. Существование последовательности $s(1), \dots, s(p)$ такой, что $s = s(1)$, $j \in J_{s(p)}(\xi)$ и $i_{s(t+1)}(\xi) \in J_{s(t)}(\xi)$, $t = 1, \dots, p-1$, следует из определения отношения $>_\xi$. Пусть $s(1), \dots, s(p)$ — минимальная по числу элементов такая последовательность и $s(t) \geqslant s(t+1)$ для некоторого $t \in \{1, \dots, p-1\}$. Через a' и (a, b) обозначим $s(t)$-ю вершину и $s(t+1)$-ю дугу пути ξ. Так как $i(a, b) \in J(a')$, то существует дуга (a', b') такая, что $i(a, b) = i(a', b')$. При этом из неравенства $s(t) \geqslant s(t+1)$ следует, что либо вершины a и a' совпадают, либо дуга (a, b) предшествует дуге (a', b'). Отсюда с учетом условия (6) получаем $J_{s(t+1)}(\xi) = J(a) \subseteq J(a') = J_{s(t)}(\xi)$. Но это противоречит минимальности последовательности $s(1), \dots, s(p)$, так как в этом случае из нее может быть исключен элемент $s(t+1)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 6. ((a) $\Rightarrow$ (b)). Согласно лемме 1 во всех путях из множества $\mathscr{B}$ содержится по одинаковому числу дуг. Обозначим это число через l. Пусть алгоритм оптимален и μ — некоторый

путь из x_0 в x. Определим путь $\zeta \in W(z)$ по следующему правилу. Положим путь $\zeta_{l(\mu)+1}$ состоящим из единственной вершины z и допустим, что путь ζ_{s-1} уже построен для некоторого $s = l(\mu) + 2, \dots, l$. Рассмотрим множество $A(s) = I(\eta^* - e_{i(x,z)} - \zeta^*_{s-1}) = I((\mu\eta)^* - (\mu(x,z)\zeta_{s-1})^*)$. Согласно лемме 3 существует дуга u_s, продолжающая путь ζ_{s-1} и такая, что

$$i(u_s) \in J(\zeta_{s-1}) \cap A(s) \text{ и если } J(\zeta_{s-1}) \cap A(s) \not\subseteq J(x), \text{ то } i(u_s) \notin J(x).$$

Положим $\zeta_s = \zeta_{s-1}u_s$, и пусть $\zeta = \zeta_l$. Тогда $\zeta^* \leqslant \eta^*$ и $|\zeta^*| = |\eta^*| - 1$. Отсюда следует равенство $\zeta^* = \eta^* - e_j$ для некоторого $j \in I(\eta)$. Осталось показать, что $j \in J(x)$.

Рассмотрим путь $\xi = \mu(x,z)\zeta$. Согласно построению пути ζ имеем, что при каждом s, $l(\mu)+2 \leqslant s \leqslant l$, справедливо следующее утверждение:

$$i_s(\xi) \in J_s(\xi) \cap A(s) \text{ и если } J_s(\xi) \cap A(s) \not\subseteq J(x), \text{ то } i_s(\xi) \notin J(x).$$

Положим $A = \{\, i \in I \mid i <_\xi i(x,z) \,\}$ и

$$d(i) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \in A, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если индексы $i, i' \in I$ связаны соотношением $i <_\xi i'$, то выполняется неравенство $d(i) \leqslant d(i')$. Отсюда и из леммы 2 следует, что путь ξ может быть получен по правилам жадного алгоритма. С другой стороны, так как $l((x,z)\zeta) = l(\eta)$, то в силу леммы 1 имеем $\xi \in \mathscr{B}$. Таким образом, получаем $f(\xi) \geqslant f(\mu\eta)$, что означает $|\zeta * A| \leqslant |\eta * A| - 1$. Но поскольку $\zeta^* = \eta^* - e_j$, то $j \in A$. Поэтому имеем $i(x,z) >_\xi j$.

Пусть $s = l(\mu) + 1$. Тогда согласно лемме 4 существует такая последовательность $s(1), s(2), \dots, s(p)$, что $s = s(1) < s(2) < \dots < s(p)$, $j \in J_{s(p)}(\xi)$ и $i_{s(t+1)}(\xi) \in J_{s(t)}(\xi)$ при любом $t = 1, \dots, p-1$. С другой стороны, так как $i_q(\xi) \in A(q)$ и $A(q) \subseteq A(q-1)$ при каждом $q = s+1, \dots, l$, то индекс $i_{s(t+1)}(\xi)$ принадлежит множеству $J_{s(t)}(\xi) \cap A(s(t))$.

Далее, поскольку $i_{s(2)}(\xi) \in J_{s(1)}(\xi) = J(x)$, то с учетом свойств пути ξ имеем $J_{s(2)}(\xi) \cap A(s(2)) \subseteq J(x)$. Отсюда следует, что $i_{s(3)}(\xi) \in J(x)$. Аналогично можно показать, что $i_{s(t)}(\xi) \in J(x)$ при любом $t = 2, \dots, p$. Следовательно, $i_{s(p)}(\xi) \in J(x)$ и $J_{s(p)}(\xi) \cap A(s(p)) \subseteq J(x)$.

Так как $\zeta^* = \eta^* - e_j$, то либо $j = i(x,z)$, либо индекс j принадлежит множеству $I(\eta^* - e_{i(x,z)} - \zeta^*)$. В первом случае $j \in J(x)$ по определению множества $J(x)$. Во втором случае $j \in J_{s(p)}(\xi) \cap A(s(p))$. Следовательно, снова имеем $j \in J(x)$.

((b) $\Rightarrow$ (c)). Сначала покажем, что все пути множества $\mathscr{B}$ состоят из одинакового числа дуг. Предположим, что пути $\mu, \eta \in \mathscr{B}$ таковы, что $l(\mu) < l(\eta)$, и среди всех таких путей они имеют максимальное по числу

дуг общее начало η_0. Пусть (x, z) — первая дуга пути μ, не принадлежащая η, и η_x — часть пути η, расположенная после вершины x. Из справедливости утверждения (b) данной теоремы следует существование пути $\zeta \in W(z)$ такого, что $l(\zeta) = l(\eta_x) - 1$. Поэтому $l(\eta_0(x, z)\zeta) = l(\eta)$. Продолжим путь $\eta_0(x, z)\zeta$ до непродолжаемого пути $\eta' \in \mathscr{B}$. Тогда получим соотношение $l(\eta') \geqslant l(\eta)$, что противоречит выбору пути η.

Пусть $\mu, \eta \in \mathscr{B}$ и $x_0 = x_1, \dots, x_{l+1}$ — последовательность вершин пути μ. Индукцией по s докажем, что для любого $s = 1, \dots, l+1$ существует такой путь $\eta_s \in \mathscr{B}(x_s)$, что

$$\eta^* = \eta_s^* + \sum_{t=1}^{s-1} e(i_t), \text{ где } i_t \in J_t(\mu),\ t = 1, \dots, s-1.$$

При $s = 1$ утверждение очевидно, так как $\eta_1 = \eta$. Предположим, что доказываемое свойство верно для некоторого $s \in \{1, \dots, l\}$. По условию (b) данной теоремы существует путь $\zeta \in \mathscr{B}(x_{s+1})$ такой, что $\eta_s^* = \zeta^* + e_j$, где $j \in J(x_s)$. Следовательно, $\eta^* = \zeta^* + e_j + \sum\limits_{t=1}^{s-1} e(i_t)$. Отсюда, если положить $\eta_{s+1} = \zeta$ и $i_s = j$, получим $\eta^* = \eta_{s+1}^* + \sum\limits_{t=1}^{s} e(i_t)$, где $i_t \in J_t(\mu)$, $t = 1, \dots, s$. Таким образом, для $s+1$ доказываемое свойство также верно.

При $s = l+1$ это свойство принимает вид $\eta^* = \sum\limits_{t=1}^{l} e(i_t)$, где $i_t \in J_t(\mu)$ для всех $t = 1, \dots, l$. С другой стороны, вектор η^* можно представить в виде суммы $\sum\limits_{t=1}^{l} e(i_t(\eta))$. Следовательно, существует такая перестановка π множества $\{1, \dots, l\}$, что $i_{\pi(t)}(\eta) = i_t \in J_t(\mu)$ для всех $t = 1, \dots, l$.

((c) $\Rightarrow$ (a)). Пусть пути μ, η принадлежат множеству $\mathscr{B}$ и π — перестановка множества $\{1, \dots, l\}$ такая, что $i_{\pi(s)}(\eta) \in J_s(\mu)$ для всех $s = 1, \dots, l$. Тогда если путь μ построен в соответствии с правилами жадного алгоритма, то для любого $s = 1, \dots, l$ справедливо неравенство $d(i_{\pi(s)}(\eta)) \leqslant d(i_s(\mu))$. Отсюда следует, что $f(\eta) \leqslant f(\mu)$. Теорема 6 доказана.

Замечание 1. При доказательстве импликаций (b) $\Rightarrow$ (c) и (c) $\Rightarrow$ (a) в предыдущей теореме не было использовано свойство (6). Поэтому утверждения (b) и (c) теоремы 6 являются достаточными условиями оптимальности жадного алгоритма в случае произвольных индексированных графов.

Сформулируем аналог этой теоремы для случая систем векторов.

Теорема 7. *Пусть система достижимых векторов $\Im \subseteq N^I$ такова, что*

$$\text{если для всех } s = 1, \ldots, q \text{ векторы } A_s = e(i_1) + \ldots + e(i_s) \\ \text{принадлежат системе } \Im \text{ и } i_p = i_q \text{ для некоторого } p \leqslant q, \\ \text{то } J(A_{p-1}) \subseteq J(A_{q-1}). \tag{8}$$

Тогда для оптимальности жадного алгоритма необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее обменное свойство:

$$\text{если } A \leqslant B \text{ и } A(i) = B(i), \text{ где } A \in \Im,\ B \in \mathscr{B}(\Im) \text{ и } i \in J(A), \\ \text{то существует элемент } j \in J(A) \cap I(B - A) \text{ такой}, \\ \text{что } B + e_i - e_j \in \Im. \tag{9}$$

Доказательство. Достаточность. Согласно следствию теоремы 5 достаточно доказать, что жадный алгоритм находит оптимальное решение при весах 0 и 1.

Допустим, что $A = e_{a(1)} + \ldots + e_{a(k)} \in \mathscr{B}(\Im)$, где каждый индекс $a(s)$ выбран по правилам жадного алгоритма. Предположим, что вектор $B \in \mathscr{B}(\Im)$ обладает свойством $f(B) > f(A)$ и среди всех таких векторов B определяет максимальный номер s такой, что $A_s = e_{a(1)} + \ldots + e_{a(s)} \leqslant B$. Так как A — максимальный вектор, то $s < k$. При этом элемент $i = a(s+1)$ принадлежит множеству $J(A_s)$ и имеет свойство $A_s(i) = B(i)$. Согласно условию (9) отсюда следует, что существует элемент $j \in J(A_s)$ такой, что $A_s(j) < B(j)$ и $B + e_i - e_j \in \Im$. С учетом неравенства $A_s \leqslant B$ имеем $A_{s+1} = A_s + e_i \leqslant B + e_i - e_j$. С другой стороны, поскольку $j \in J(A_s)$, то в соответствии с правилами жадного алгоритма получаем $d(i) \geqslant d(j)$. Следовательно, $f(B + e_i - e_j) \geqslant f(B)$. Рассмотрим максимальный вектор B' такой, что $B' \geqslant B + e_i - e_j$. Так как все веса неотрицательны, то $f(B') \geqslant f(B + e_i - e_j) \geqslant f(B)$. При этом $A_{s+1} \leqslant B'$, что противоречит выбору вектора B.

Необходимость проверяется аналогично импликации (a) $\Rightarrow$ (b) теоремы 6. Теорема доказана.

Замечание 2. При доказательстве достаточности не было использовано свойство (8), поэтому обменное свойство (9) является достаточным условием оптимальности жадного алгоритма для случая произвольных систем достижимых векторов.

Примерами систем векторов, для которых выполнено условие (8), являются системы булевых векторов. Но если сформулировать теорему 7 для систем булевых векторов или, по сути дела, для систем множеств, то мы придем к следующей известной теореме.

Теорема 8 [7]. *Пусть $\mathscr{F} \subseteq 2^I$ — система достижимых множеств. Тогда для оптимальности жадного алгоритма необходимо и достаточно, чтобы выполнялось сильное обменное свойство:*

если $A \subseteq B$ и $i \notin B$, где $A \in \mathscr{F}$, B — база $\mathscr{F}$ и $i \in J(A)$,
то существует элемент $j \in J(A) \cap (B - A)$ такой, что $B \cup i - j \in \mathscr{F}$.

Отметим, что сильное обменное свойство впервые исследовал Р. Гоэтчел [8]. Он же доказал данную теорему для случая гридоидов — систем достижимых множеств, удовлетворяющих условию (3).

5. Достаточные условия оптимальности

Лемма 5. *Пусть индексированный граф удовлетворяет следующим условиям:*

каждый непродолжаемый допустимый путь состоит из l дуг;

дуги одного и того же пути имеют различные индексы;

если в вершине $x \in V$ начинается хотя бы одна дуга, то $|J(x)| \geqslant n - l + 1$.

Тогда жадный алгоритм находит оптимальное решение.

Доказательство. Согласно теореме 5 достаточно доказать, что жадный алгоритм находит оптимальное решение при весах 0 и 1. Пусть $\mu \in \mathscr{B}^*$ и A — множество индексов веса 0. Если $I(\mu) \cap A = \varnothing$, то путь μ имеет максимальный вес l. Пусть $I(\mu) \cap A \neq \varnothing$ и s — максимальный номер такой, что $i_s(\mu) \in A$.

Так как $\mu \in \mathscr{B}^*$ и $i_s(\mu) \in A$, то имеет место включение $J_s(\mu) \subseteq A$. Из условия неповторяемости индексов следует, что индексы первых $l - f(\mu) - 1$ дуг пути μ, имеющих вес 0, не повторяются и не содержатся в множестве $J_s(\mu)$. Следовательно, $|A| \geqslant l - f(\mu) - 1 + |J_s(\mu)|$. Отсюда с учетом условий леммы получаем, что $|A| \geqslant n - f(\mu)$. Поэтому для произвольного пути $\eta \in \mathscr{B}$ имеем $|I(\eta) \cap A| \geqslant |I(\eta)| + |A| - n \geqslant l + n - f(\mu) - n = l - f(\mu)$. Таким образом, приходим к соотношению $f(\eta) \leqslant l - (l - f(\mu)) = f(\mu)$. Лемма доказана.

Следствие леммы 5. *Пусть в системе достижимых множеств $\mathscr{F}$ все базы имеют одинаковую мощность l и для любого небазисного множества $A \in \mathscr{F}$ выполняется неравенство $|J(A)| \geqslant n - l + 1$. Тогда жадный алгоритм находит оптимальное решение.*

Лемма 6. *Пусть индексированный граф удовлетворяет следующим условиям:*

каждый непродолжаемый допустимый путь состоит из l дуг;

для любых путей $\mu, \eta \in \mathscr{B}$ и вершины $x \in V$

если множество $J(x) \cap I(\mu^* - \eta^*)$ непусто,
то множество $J(x) \cap I(\eta^* - \mu^*)$ также непусто.

Тогда жадный алгоритм находит оптимальное решение.

Доказательство. Сначала докажем свойство (7):

$$\text{если } \mu \in W - \mathscr{B} \text{ и } \eta \in \mathscr{B}, \text{ то } J(\mu) \cap I(\eta^* - \mu^*) \neq \varnothing.$$

Допустим, что это не верно для некоторых путей $\mu \in W - \mathscr{B}$ и $\eta \in \mathscr{B}$. Пусть x — концевая вершина пути μ, $\mu' \in \mathscr{B}(x)$ и i — индекс первой дуги в пути μ'. Тогда $|\eta * \{i\}| \leqslant |\mu * \{i\}| < |\mu\mu' * \{i\}|$. Отсюда следует, что $J(x) \cap I((\mu\mu')^* - \eta^*) \neq \varnothing$. Согласно условию леммы имеем $J(x) \cap I(\eta^* - (\mu\mu')^*) \neq \varnothing$. Поэтому существует индекс $j \in J(x)$ такой, что $|\eta * \{j\}| > |\mu\mu' * \{j\}|$. Следовательно, $|\eta * \{j\}| > |\mu * \{j\}|$. Но это противоречит предположению о том, что $J(\mu) \cap I(\eta^* - \mu^*) = \varnothing$.

Убедимся в справедливости утверждения (2) теоремы 6. Пусть $(x, z) \in E$, $\eta \in \mathscr{B}(x)$ и μ — некоторый путь из x_0 в x. Используя соотношение (7), можно построить путь $\zeta \in \mathscr{B}(z)$ такой, что

$$\zeta^* \leqslant \eta^* \text{ и если } i(x, z) \in I(\eta), \text{ то } ((x, z)\zeta)^* \leqslant \eta^*.$$

Так как $\mu(x, z)\zeta \in \mathscr{B}$, то $l(\mu(x, z)\zeta) = l$ и $\zeta^* = \eta^* - e_j$, где $j \in I(\eta)$. Осталось показать, что $j \in J(x)$. Если $i(x, z) \in I(\eta)$, то $((x, z)\zeta)^* = \eta^*$ и $j = i(x, z) \in J(x)$. Иначе имеем $((x, z)\zeta)^* = \eta^* - e_j + e_{i(x,z)}$ и $J(x) \cap I(\ (\mu(x, z)\zeta)^* - (\mu\eta)^*\ ) = \{i(x, z)\} \neq \varnothing$. Отсюда и из условий леммы следует, что $J(x) \cap I(\ (\mu\eta)^* - (\mu(x, z)\zeta)^*\ ) = J(x) \cap \{j\} \neq \varnothing$. Таким образом, снова получаем $j \in J(x)$. Лемма доказана.

Следствие леммы 6. *Пусть в системе достижимых векторов $\Im$ все максимальные векторы имеют одинаковую сумму компонент и для любых векторов $A, B \in \mathscr{B}(\Im)$ и $C \in \Im$*

если множество $J(C) \cap I(A - B)$ непусто,
то множество $J(C) \cap I(B - A)$ также непусто.

Тогда жадный алгоритм находит оптимальное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Берж К.** Теория графов и ее применение. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
2. **Brylawski T.** Greedy families for linear objective functions // Stud. Appl. Math. 1991. V. 84, N 3. P. 221–229.
3. **Dunstan F. D. J., Welsh D. J. A.** A greedy algorithm for solving a certain class of linear programmes // Math. Programming. 1973. V. 5, N 3. P. 338–353.
4. **Edmonds J.** Submodular functions, matroids and certain polyhedra // Combinatorial Structures and their Applications. New York: Gordon and Breach, 1970. P. 69–87.

5. **Edmonds J.** Matroids and the greedy algorithm // Math. Programming. 1971. V. 1, N 2. P. 127–136.
6. **Gale D.** Optimal assignments in ordered set: An application of matroid theory // J. Combinatorial Theory. 1968. V. 4, N 2. P. 176–180.
7. **Goecke O., Korte B., Lovasz L.** Examples and algorithmic properties of greedoids // Combinatorial Optimization. Berlin: Springer-Verl., 1986. P. 113–161. (Lecture Notes in Math., V. 1403).
8. **Goetchel R.** Linear objective functions on certain classes of greedoids // Discrete Appl. Math. 1984. V. 4, N 1. P. 11–16.
9. **Korte B., Lovasz L.** Greedoids and linear objective functions // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1984. V. 5, N 2. P. 229–238.
10. **Matroid application.** Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications; V. 40).
11. **Rado R.** Note on independence functions // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7, N 3. P. 300–320.

Адрес автора:

Новосибирский
государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090 Новосибирск, Россия

Статья поступила
1 апреля 1999 г.