ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1999. Серия 1. Том 6, № 4, 20–35

УДК 519.1

АЦИКЛИЧЕСКАЯ РАСКРАСКА 1-ПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ*)

О. В. Бородин, А. В. Косточка, А. Распо, Э. Сопена

Граф называется 1-планарным, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы каждое ребро пересекалось не более чем с одним другим ребром. Доказано, что ациклическое хроматическое число любого 1-плоского графа не превосходит 20.

Введение

Обозначим через $V(G)$ множество вершин графа G, а через $E(G)$ множество его ребер. (Правильная) *k-раскраска* вершин графа G есть такая функция $f : V(G) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$, что $f(x) \neq f(y)$ для любых смежных вершин x и y в G.

Граф называется 1-*планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы ни одно из ребер не пересекалось во внутренних точках более чем с одним другим ребром. Одна из причин введения этого понятия Г. Рингелем [14] состоит в том, что граф G_{vf} смежности-инцидентности вершин и граней любого плоского графа G является 1-планарным. Каждый 1-планарный граф с максимальным числом ребер можно получить из плоского графа, имеющего грани размера только 3 или 4, вставив пару пересекающихся диагоналей в каждую 4-грань. Каждый граф G_{vf} получается таким же образом из плоской четыреангуляции.

Г. Рингель [14, 15] предположил, что каждый 1-планарный граф 6-раскрашиваем; это было подтверждено О. В. Бородиным [6, 7]. Отсюда следует, что вершины и грани любого плоского графа можно раскрасить в 6 цветов так, что каждые два смежных или инцидентных

*) Часть этой работы выполнена первым автором во время пребывания в Лаборатории информатики. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–01075) и Межвузовской научной программы «Университеты России — фундаментальные исследования» (код проекта 1792). Работа второго автора частично поддержана грантами ИНТАС n° 97-1001 и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00581). Работа двух последних авторов выполнена при частичной финансовой поддержке Совместного научного гранта НАТО n° 97–1519.

элемента получают разные цвета. Для совместной раскраски 3-призмы требуется 6 цветов, так как окрашиваются 11 элементов, а никакие три из них не могут быть окрашены одинаково. Д. Аркдикон [4] доказал, что вершины и грани плоских двудольных графов совместно 5-раскрашиваемы.

Правильная раскраска вершин графа называется *ациклической*, если на каждом цикле встречается не менее трех цветов [9]. *Ациклическое хроматическое число* графа G, обозначаемое через $a(G)$, есть минимальное k, при котором G допускает ациклическую k-раскраску.

О. В. Бородин [5] доказал гипотезу Грюнбаума об ациклической 5-раскрашиваемости плоских графов. Эта оценка точна. Более того, известны двудольные 2-вырожденные плоские графы G с $a(G) = 5$ [11]. Однако если в плоском графе G нет циклов длины меньше 5, то $a(G) \leqslant 4$, а если нет циклов длины меньше 7, то $a(G) \leqslant 3$ [8].

Понятие ациклической раскраски оказалось полезным при получении результатов по другим видам раскраски. Пусть $a(G) \leqslant a$. Тогда звездное хроматическое число графа G не превышает $a2^{a-1}$ [9], его ориентированное хроматическое число также не превышает $a2^{a-1}$ [13]; для любой m-раскраски ребер графа G существует гомоморфизм графа G на граф не более чем с am^{a-1} вершинами, сохраняющий цвета ребер [2]; для любой m-раскраски ребер и любой n-раскраски дуг смешанного графа G (т. е. графа, имеющего как ребра, так и дуги) существует гомоморфизм графа G на смешанный граф не более чем с $a(2n + m)^{a-1}$ вершинами, сохраняющий цвета ребер и дуг [12].

Кроме того, С. Хакими, Дж. Митчем и Е. Шмейхель [10, с. 38–39] доказали, что $E(G)$ можно разбить на $a(G)$ звездных лесов (компоненты связности — звезды). Отсюда и из [5] следует справедливость предположения И. Алгора и Н. Алона [1] о разложимости ребер любого плоского графа на пять звездных лесов.

В настоящей статье рассматривается ациклическая раскраска 1-планарных графов. Основным результатом является

Теорема 1. *Каждый* 1-*планарный граф ациклически раскрашиваем в* 20 *цветов.*

Примером 1-плоского графа с ациклическим хроматическим числом 7 является 3-мерный куб с диагоналями всех граней. Нам неизвестны 1-плоские графы с бо́льшим ациклическим хроматическим числом.

Приводимое ниже доказательство теоремы 1 не использует ни отождествления вершин, ни двухцветных перекрасок и фактически дает более общий результат: каждый 1-планарный граф имеет предписанную ациклическую 20-раскраску. (Определение предписанной раскраски

см. в [10].) Отметим, что до недавнего времени верхних оценок для предписанного ациклического хроматического числа не было известно даже в классе плоских графов; нами показано (работа сдана в печать), что эта величина не превосходит 7.

Теорема 1 имеет ряд приложений к другим раскраскам; определения используемых понятий можно найти в [2, 9, 10, 12, 13].

Следствие 1. *Вершины и грани любого плоского граф можно ациклически раскрасить в 20 цветов.*

Следствие 2. *Звездное хроматическое число любого 1-плоского графа не превосходит* $20 \cdot 2^{19}$.

Следствие 3. *Ориентированное хроматическое число любого 1-плоского графа не превосходит* $20 \cdot 2^{19}$.

Следствие 4. *Каждый плоский граф имеет ориентированную совместную раскраску вершин и граней в* $20 \cdot 2^{19}$ *цветов.*

Следствие 5. *Ребра любого 1-плоского графа можно разбить на 20 звездных лесов.*

Заметим, что петля является одноцветным ребром, а пара кратных ребер образует двухцветный цикл. Вместо теоремы 1 удобно доказывать более общий факт.

Теорема 2. *Вершины любого 1-плоского псевдографа можно раскрасить в 20 цветов так, чтобы концы каждого ребра-непетли имели разные цвета и не было двухцветных циклов длины больше 2.*

Отметим также, что излагаемое ниже доказательство годится и для псевдографов, 1-вложимых в проективную плоскость. Единственное отличие состоит в том, что формула Эйлера для проективной плоскости имеет вид $|V| - |E| + |F| \geqslant 1$. Соответственно имеют место обобщения теоремы 1 и следствий 1–5 на проективную плоскость.

Н. Алон, Б. Мохар и Д. Сандерс [3] доказали, что из ациклической 5-раскрашиваемости плоских графов следует ациклическая 7-раскрашиваемость проективно-плоских графов.

Доказательство теоремы 2

Пусть P_0 — контрпример к теореме с наименьшим числом вершин. Очевидно, что $|V(P_0)| \geqslant 21$. Заметим, что в графе P_0 нет разделяющих клик, поэтому он 2-связен. В частности, в P_0 нет вершин степени меньше 2. Напомним, что степенью вершины и рангом грани в плоском псевдографе (карте) называется число инцидентных им ребер.

Зафиксируем 1-плоское представление псевдографа P_0, при котором число пересечений ребер во внутренних точках минимально. Тогда все

концевые вершины a, b, c и d любой пары ребер ab, cd, пересекающихся во внутренней точке s, различны. Для каждой такой пары добавим ребра ac, cb, bd и da «вблизи s», т. е. чтобы образовались соответственно треугольники asc, csb, bsd и dsa с пустой внутренностью. Полученный 1-плоский псевдограф P_1 также является минимальным контрпримером к теореме 2, поскольку его ациклическая 20-раскраска годится и для P_0.

Обозначим через M_1 плоский псевдограф, получаемый из P_1 удалением пересекающихся ребер. Применим к M_1 в произвольном порядке как можно больше следующих операций:

- Удаление петли, образующей грань ранга 1.
- Удаление одного из двух (кратных) ребер, образующих грань ранга 2.
- Удаление общего ребра двух смежных граней ранга 3.
- Триангулирование грани ранга больше 4 вставкой попарно непересекающихся диагоналей.

Полученную карту обозначим через M.

Замечание 1. Карта M связна, содержит грани только ранга 3 и 4 и не содержит смежных 3-граней.

Пусть псевдограф P получается из карты M вставкой пары диагоналей в каждую 4-грань; при этом восстанавливаются все пары пересекающихся ребер, удаленные при образовании M_1 из P_1. Тогда P является контрпримером к теореме 2, имеющим минимальное число вершин. Это следует из того, что при добавлении ребра ациклическое хроматическое число не убывает, а при добавлении петель и кратных ребер оно не изменяется. (Другими словами, если графы псевдографов G и H совпадают, то $a(G) = a(H)$.) Доказательство теоремы 2 состоит в установлении ряда структурных свойств псевдографа P, которые, как будет показано, в совокупности противоречивы.

В основном мы работаем с картой M. Степень вершины v в M, т. е. число инцидентных v ребер (петли учитываются дважды), обозначается через $d(v)$. Ранг грани f, т. е. число инцидентных f ребер с учетом кратности их вхождения в границу грани, обозначается через $s(f)$.

Обозначим через $D(v)$ степень вершины v в псевдографе P. Очевидно, что $D(v) = 2q(v) + t(v)$, где $q(v)$ и $t(v)$ суть числа 4- и 3-граней, инцидентных вершине v в M. Ясно также, что $d(v) = q(v) + t(v)$. Число $D(v)$ назовем *цикловой степенью* вершины v в M. Вершина v будет называться *младшей*, если $D(v) \leqslant 7$.

Лемма 1. *В M нет разделяющих циклов длины не более 4.*

Доказательство. В противном случае разобьем карту M вдоль такого цикла S на две меньших карты, превратим их в 1-плоские

псевдографы P' и P'', добавив все диагонали, и совместим их ациклические 20-раскраски. (Это можно сделать, поскольку все вершины из S раскрашены попарно различно в каждом из псевдографов P', P''.) Получим ациклическую 20-раскраску для P. Лемма доказана.

Следствие 6. *Если $v \in V(P)$, то $D(v) \geqslant 5$ и $d(v) \geqslant 3$.*

Формулу Эйлера $|V(M)| - |E(M)| + |F(M)| = 2$ можно переписать в виде

$$\sum_{v \in V(M)} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F(M)} (s(f) - 4) = -8, \tag{1}$$

где $F(M)$ — множество граней в M.

Начальный заряд каждой вершины v из M полагаем равным $ch(v) = d(v) - 4$, а каждой грани f из M — равным $ch(f) = s(f) - 4$. Зададим процедуру перераспределения зарядов, приводящую к *окончательным зарядам* ch^*, следующими правилами:

R0. Каждая вершина передает каждому инцидентному треугольнику заряд $\frac{1}{3}$.

R1. Каждая вершина v с $D(v) = D \geqslant 8$ посылает через каждую инцидентную 4-грань заряд $1 - 8/D$, а по каждому инцидентному ребру, входящему в 3-грань, заряд $\frac{1}{12} + \frac{1}{4}(1 - 8/D)$. В частности, всякая 8-вершина, содержащаяся в 3-грани, посылает вдоль каждого инцидентного ей ребра треугольника заряд, равный $\frac{1}{12}$.

R2. Если вершина v с $D(v) = D \geqslant 8$ получила заряд через инцидентную 4-грань f, то v возвращает этот заряд в f и он делится поровну между младшими вершинами в f (если такие существуют).
Если вершина v с $D(v) = D \geqslant 8$ получает заряд вдоль ребра 3-грани, то v посылает этот заряд вдоль другого инцидентного ей ребра этой 3-грани.

R3. Если после выполнения правил R0 — R2 вершина v с $6 \leqslant D(v) = D \leqslant 7$ осталась с положительным зарядом, то этот заряд раздается поровну 5-вершинам, входящим в общие с v 3-грани (если такие вершины существуют).

Поскольку описанная процедура сохраняет суммарный заряд, имеем

$$\sum_{v \in V(M)} ch^*(v) + \sum_{f \in F(M)} ch^*(f) = \sum_{v \in V(M)} ch(v) + \sum_{f \in F(M)} ch(f) = -8.$$

Заметим, что $ch^*(q) \geqslant ch(q) = 0$ для любой 4-грани q, и по правилу R0 $ch^*(t) = 0$ для любой 3-грани t.

Мы получим противоречие, если докажем, что $ch^*(v) \geqslant 0$ для каждой вершины v. Доказательство разбивается на несколько лемм.

Лемма 2. *Если $D(v) \geqslant 8$, то $ch^*(v) \geqslant 0$.*

Доказательство. Достаточно показать, что v остается с неотрицательным зарядом после выполнения требуемых от нее передач заряда по правилам R0 и R1 даже без учета того, что она получает по правилу R1, поскольку по правилу R2 она передает лишь полученное по правилу R1, а R3 ее не касается.

Пусть v лежит в t 3-гранях и q 4-гранях. Тогда $D = t + 2q$ и $ch(v) = t + q - 4$. По правилу R0 вершина v отдает 3-граням суммарный заряд $t/3$. По R1 вершина v посылает заряд $q(1 - 8/D)$ через 4-грани и заряд, не больший $\frac{2t}{12} + \frac{2t}{4}(1 - 8/D)$, вдоль ребер 3-граней. Даже если v ничего не получает от других вершин, то она остается с зарядом не менее

$$t+q-4-\frac{t}{3}-q\left(1-\frac{8}{D}\right)-\frac{t}{6}-\frac{t}{2}\left(1-\frac{8}{D}\right)=\left(\frac{t}{2}+q\right)\frac{8}{D}-4=\frac{D}{2}\cdot\frac{8}{D}-4=0.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть 5-вершина v смежна с вершинами $w_1, \dots, w_5$ (в этом циклическом порядке), где w_1, w_2 и v образуют 3-грань, а w_4v есть ребро (рис. 1, а). Тогда $D(w_3) \geqslant 19$ и $D(w_5) \geqslant 19$. Более того, если $D(w_3) = 19$, то $D(w_1) \geqslant 20$, а если $D(w_5) = 19$, то $D(w_2) \geqslant 20$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим вершину w_3. Удалим вершину v и добавим ребро w_2w_4. По минимальности карты M существует ациклическая 20-раскраска ϕ получившегося мультиграфа. (Здесь и в последующих леммах подразумеваем, что каждая 4-грань содержит обе диагонали.) Пусть $\phi(\{w_4, w_5, w_1, w_2\}) = \{1, 2, 3, 4\}$ (в этом порядке), как изображено на рис. 1, *б*. Если $\phi(w_3) \notin \{2, 3\}$, то можно окрасить вершину v. Противоречие.

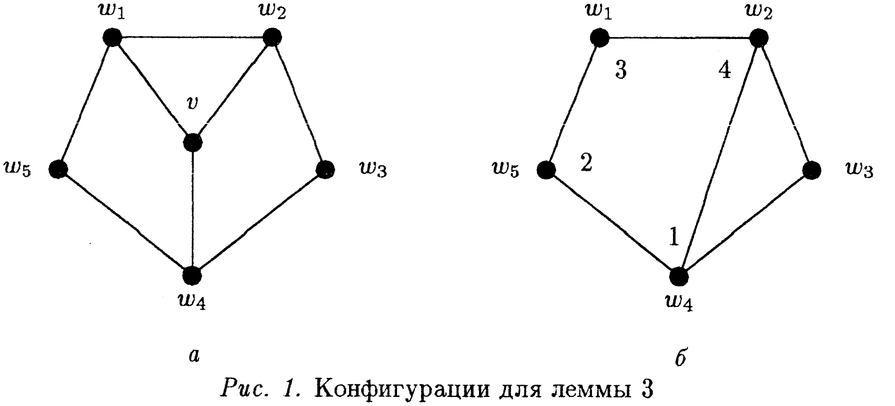


Рис. 1. Конфигурации для леммы 3

Случай 1. $\phi(w_3) = 3$. Для любого цвета $\alpha \in \{5, \dots, 20\}$ препятствием для окраски v цветом α может быть лишь $(3, \alpha)$-цепь между w_3 и w_1. В этом случае имеем $D(w_3) \geqslant 19$ и $D(w_1) \geqslant 20$.

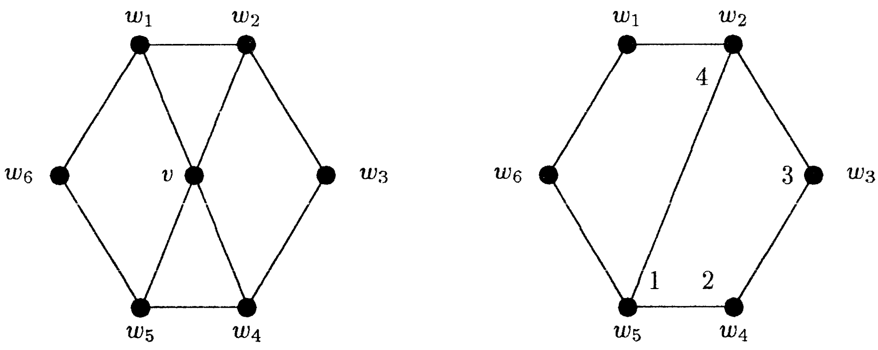
Случай 2. $\phi(w_3) = 2$. Для любого цвета $\alpha \in \{5, \ldots, 20\}$ препятствием для окраски v цветом α может быть лишь $(2, \alpha)$-цепь между вершинами w_3 и w_5. Но если $D(w_3) = 19$, то мы перекрашиваем w_3 в цвет 3 и получаем случай 1.

Аналогично рассматривается вершина w_5. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть 6-вершина v смежна с вершинами $w_1, \ldots, w_6$ (в этом циклическом порядке), где w_1w_2v и w_4w_5v являются 3-гранями (рис. 2, а). Тогда $ch^*(v) \geqslant 0$.*

Доказательство. По замечанию 1 пары vw_3 и vw_6 не являются ребрами. Поэтому $ch(v) = 4 - 4 = 0$. Согласно правилу R0 вершина v дает каждой инцидентной ей 3-грани заряд $1/3$. Поэтому достаточно доказать, что v получает либо заряд, не меньший $1/6$, от w_1, либо заряд, не меньший $1/3$, от w_6, а затем дважды воспользоваться симметрией рассматриваемой конфигурации.

Удалим вершину v и добавим ребро w_2w_5. Из-за минимальности карты M существует ациклическая 20-раскраска ϕ полученного мультиграфа. Пусть $\phi(\{w_5, w_4, w_3, w_2\}) = \{1, 2, 3, 4\}$ (в этом порядке), как изображено на рис. 2, *б*. Если $\{\phi(w_1), \phi(w_6)\} \cap \{2, 3\} = \varnothing$, то v можно покрасить. Противоречие.



а *б*

Рис. 2. Конфигурации для леммы 4

Случай 1. $\phi(w_1) = 5$. Тогда каждый цвет $\alpha \in \{6, \ldots, 20\}$ должен быть использован при раскраске смежных с w_6 вершин. Таким образом, $D(w_6) \geqslant 18$ и по правилу R1 вершина v получает от w_6 заряд, не меньший $(1 - 8/18) = 10/18 > 1/3$.

Случай 2. $\phi(w_1) \in \{2, 3\}$, $\phi(w_6) = 5$. В этом случае каждый цвет $\alpha \in \{6, \ldots, 20\}$ должен быть использован при раскраске смежных с w_1 вершин. Таким образом, $D(w_1) \geqslant 19$ и по правилу R1 вершина v получает от w_1 заряд, не меньший $1/12 + 1/4(1 - 8/19) = 13/57 > 1/6$.

Случай 3. $\phi(w_1) \in \{2,3\}$ и $\phi(w_6) \in \{2,3\}$. Теперь каждый цвет $\alpha \in \{5,\dots,20\}$ должен быть использован при раскраске вершин, смежных либо с w_1, либо с w_6. Значит, $(D(w_1)-4)+(D(w_6)-3) \geqslant 16$, так что либо $D(w_1) \geqslant 12$, либо $D(w_6) \geqslant 12$. Следовательно, вершина v получает по правилу R1 либо не менее $1/6$ от w_1, либо не менее $1/3$ от w_6.

Тем самым ввиду горизонтальной симметрии v получает от w_1, w_5 и w_6 суммарный заряд не менее $1/3$, а ввиду вертикальной симметрии от всех своих соседей — не менее $2/3$.

Лемма 5. *Пусть 6-вершина v смежна с вершинами $w_1,\dots,w_6$ (в этом циклическом порядке), где w_1v, w_3v и w_5v — ребра из M (рис. 3, а). Тогда $ch^*(v) \geqslant 0$.*

Доказательство. Имеем $ch(v) = 3-4 = -1$, и v не инцидентна 3-граням. Поэтому нужно доказать, что v получает от своих соседей заряд, не меньший 1.

Можно считать, что $D(w_2) \leqslant D(w_4) \leqslant D(w_6)$. Удалим v и добавим ребра w_1w_3 и w_3w_5. Ввиду минимальности карты M существует 20-раскраска ϕ полученного мультиграфа. Пусть $\phi(\{w_1,w_3,w_5,w_6\}) = \{1,2,3,4\}$ (в этом порядке), как изображено на рис. 3, *б*.

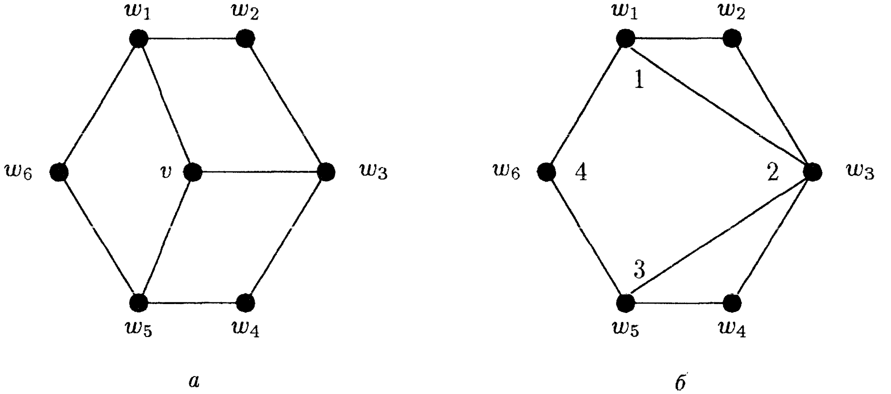


Рис. 3. Конфигурации для леммы 5

Случай 1. Для какого-нибудь $i \in \{2,4\}$ цвет вершины w_i отличен от цветов $1,2,3$ и 4 (скажем, $\phi(w_i) = 5$). Тогда каждый цвет $\alpha \in \{6,\dots,20\}$ должен быть использован при раскраске вершин, смежных с w_{6-i}. Таким образом, $D(w_6) \geqslant D(w_i) \geqslant 18$ и v получает заряд, не меньший $2(1-8/18) > 1$.

Случай 2. Цвета вершин w_2, w_4 принадлежат множеству $\{1,2,3,4\}$. Теперь каждый цвет $\alpha \in \{5,\dots,20\}$ должен быть использован при раскраске вершин, смежных либо с w_2, либо с w_4. Если $D(w_4) \geqslant 16$, то также $D(w_6) \geqslant 16$ и, следовательно, v получает заряд, не меньший

$2(1-8/16)=1$. Если же $D(w_4)<16$, то, поскольку нельзя перекрасить ни w_2, ни w_4 в цвет из $\alpha\in\{5,\ldots,20\}$ и прийти к случаю 1 (хотя $D(w_4)\leqslant 15$), среди вершин, смежных с любой из них, имеются одинаково окрашенные. Следовательно, $(D(w_2)-4)+(D(w_4)-4)\geqslant 16$. Поэтому $D(w_2)+D(w_4)\geqslant 24$, а поскольку $D(w_4)\leqslant 15$, вершина v получает от вершин w_2, w_4 и w_6 заряд, не меньший

$$2\Bigl(1-\frac{8}{D(w_4)}\Bigr)+\Bigl(1-\frac{8}{D(w_2)}\Bigr)\geqslant \min_{9\leqslant x\leqslant 12}\Bigl\{2\Bigl(1-\frac{8}{24-x}\Bigr)+\Bigl(1-\frac{8}{x}\Bigr)\Bigr\}=1.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть 7-вершина v смежна с вершинами $w_1,\ldots,w_7$ (в этом циклическом порядке), где w_1, w_2 и v образуют 3-грань, а w_4v и w_6v суть ребра в M (рис. 4, а). Тогда по правилу $R1$ вершины w_3, w_5 и w_7 дают вершине v суммарный заряд, не меньший $1/3$. В частности, $ch^*(v)\geqslant 0$.*

Доказательство. Имеем $ch(v)=4-4=0$, и по правилу R0 вершина v дает инцидентной 3-грани заряд $1/3$. Поэтому нужно доказать, что v получает от смежных с ней вершин заряд, не меньший $1/3$.

Сначала заметим, что если $i\in\{3,5,7\}$ и $D(w_i)\geqslant 12$, то по правилу R1 вершина w_i дает вершине v заряд, не меньший $1-8/12=1/3$, что и требовалось. Теперь предположим, что $D(w_i)<12$, $i=3,5,7$. Удалим v и добавим ребра w_2w_4, w_4w_6 и w_6w_1. Пусть $\phi(\{w_1,w_2,w_4,w_6\})=\{1,2,3,4\}$ (в этом порядке), как изображено на рис. 4, *б*. Если цвета всех вершин $w_1,\ldots,w_7$ различны, то v можно покрасить. Предположим, что это не так, т. е. при раскраске множества $\{w_1,\ldots,w_7\}$ использовано не более 6 цветов.

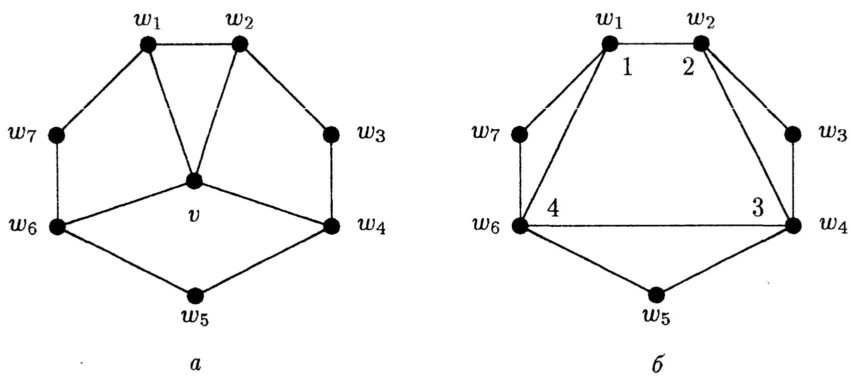


Рис. 4. Конфигурации для леммы 6

Случай 1. Найдутся $u, z\in\{w_3,w_5,w_7\}$, которые покрывают все двухцветные циклы, проходящие через v (при подходящем выборе цвета

для v). Тогда $(D(u)-3)+(D(z)-3) \geqslant 14$, т. е. u и z дают вершине v суммарный заряд, не меньший

$$\min_{9\leqslant x\leqslant 10}\left\{1-\frac{8}{x}+1-\frac{8}{20-x}\right\}=1-\frac{8}{9}+1-\frac{8}{11}=\frac{38}{99}>\frac{1}{3}.$$

Случай 2. Никакие две вершины $u, z \in \{w_3, w_5, w_7\}$ не покрывают всех возможных двухцветных циклов, проходящих через v. Если в $\{w_3, w_5, w_7\}$ есть вершина цвета больше 4, то две другие вершины дают случай 1. Итак, при раскраске вершин $w_1, \ldots, w_7$ использованы только цвета 1, 2, 3 и 4. Кроме того, если при какой-то из вершин $\{w_3, w_5, w_7\}$ цвета были попарно различны, то ее можно было бы перекрасить в цвет, больший 4, без образования двухцветных циклов. Поэтому $(D(w_3)-4)+(D(w_5)-4)+(D(w_7)-4) \geqslant 16$. Значит, вершины w_3, w_5 и w_7 дают вершине v суммарный заряд, не меньший

$$\left(1-\frac{8}{8}\right)+\left(1-\frac{8}{9}\right)+\left(1-\frac{8}{11}\right)=\frac{38}{99}>\frac{1}{3}.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть 5-вершина v смежна с вершинами $w_1, \ldots, w_5$ (в этом циклическом порядке), где w_1, w_2 и v образуют 3-грань, а w_4v есть ребро (рис. 5, а). Если w_1 есть 5-вершина, то $ch^*(v) \geqslant 0$.*

Доказательство. Имеем $ch(v) = 3 - 4 = -1$, и по правилу R0 вершина v дает инцидентной ей 3-грани заряд $1/3$. Поэтому нужно доказать, что v получает от своих соседей заряд, не меньший $4/3$.

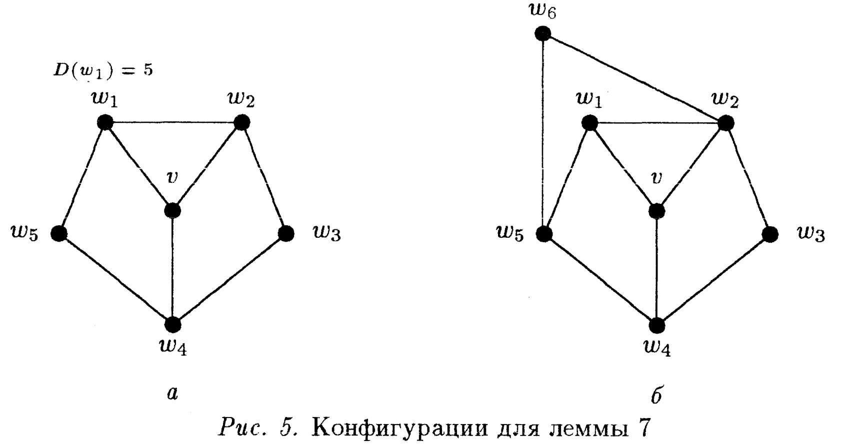


Рис. 5. Конфигурации для леммы 7

Пусть вершина w_6 смежна с вершинами w_2, w_5 и w_1. По лемме 1 вершина w_6 не совпадает с w_3 (иначе цикл $w_3w_4w_5$ был бы разделяющим) и не смежна с ней (иначе $w_3w_4w_5w_6$ был бы разделяющим циклом).

В частности, $D(w_2) \geqslant 7$. По лемме 3, примененной к вершинам v и w_1, степень каждой из вершин w_3, w_4, w_5 и w_6 не меньше 19. Поэтому если $D(w_2) \geqslant 8$, то по правилам R1 и R2 и вершина v, и вершина w_1 получают заряды, не меньшие $3(1 - 8/19) = 33/19 > 4/3$ (рис. 5, *б*.)

Пусть $D(w_2) = 7$, т. е. $d(w_2) = 4$. Тогда по лемме 3 степень каждой вершины w_3, w_4, w_5 и w_6 не меньше 20 и w_2 получает от w_4 и w_5 суммарный заряд не меньше $2(1 - 8/20) = 6/5$. Значит, по правилу R3 вершина w_2 посылает на v и w_1 заряд не меньше $6/5 - 1/3$, так что каждая из вершин v и w_1 получает суммарный заряд не менее

$$2\left(1 - \frac{8}{20}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{6}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{13}{15} = \frac{49}{30} > 4/3.$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть 5-вершина v смежна с вершинами $w_1, \ldots, w_5$ (в этом циклическом порядке), где w_1, w_2 и v образуют 3-грань, а w_4v есть ребро (рис. 6, а). Если w_1 является 6-вершиной, то $ch^*(v) \geqslant 0$.*

Доказательство. Как и раньше, нужно доказать, что v получает суммарный заряд, не меньший $4/3$.

Предположим противное. Пусть w_1 смежна с $w_2, v, w_4, w_5, w_6, w_7$ (в этом порядке), где w_5, w_6 и w_1 образуют 3-грань (рис. 6, *б*). Если $D(w_2) = 5$, мы имеем конфигурацию из леммы 7. Поэтому пусть $D(w_2) > 5$. По лемме 3 имеем $D(w_5) \geqslant 19$ и $D(w_3) \geqslant 20$.

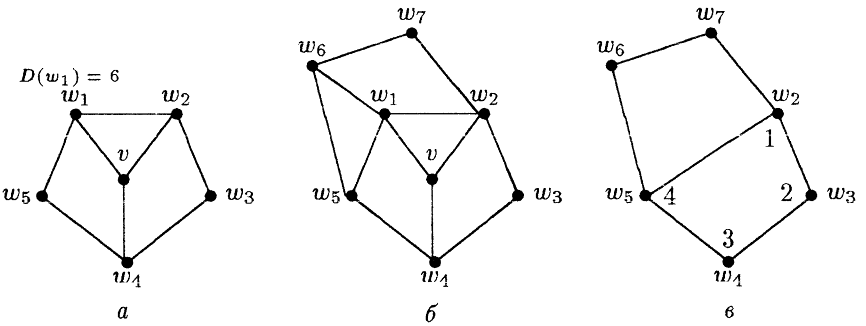


Рис. 6. Конфигурации для леммы 8

Случай 1. w_6 есть 5-вершина. Тогда из леммы 3, примененной к w_6, следует, что $D(w_2) \geqslant 19$, и по правилу R1 вершина v получает от w_2, w_3 и w_5 заряд, не меньший

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{8}{19}\right) + \left(1 - \frac{8}{20}\right) + \left(1 - \frac{8}{19}\right) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \times \frac{11}{19} + \frac{3}{5} + \frac{11}{19} > \frac{4}{3}.$$

Случай 2. w_6 не является 5-вершиной. По лемме 3 вершина v получает от w_3 заряд, не меньший $1 - 8/20$, а от w_2 и w_5 суммарный заряд, не меньший $1 - 8/20$. Таким образом, если по правилу R3

вершина v получает от w_1 заряд, не меньший $2/15$, то все в порядке. Удалим вершины v и w_1 и добавим ребро w_2w_5. Ввиду минимальности M существует ациклическая 20-раскраска ϕ полученного мультиграфа. Пусть $\phi(\{w_2, w_3, w_4, w_5\}) = \{1, 2, 3, 4\}$ (в этом порядке), как изображено на рис. 6, *в*. Если ни одна из вершин w_6 и w_7 не окрашена цветом 3, то легко дополнить раскраску мультиграфа M, положив $\phi(v) = 3$ и $5 < \phi(w_1) \notin \{\phi(w_6), \phi(w_7)\}$.

Подслучай 2.1. $\phi(w_7) = 3$. Если есть цвет $\alpha \in \{5, \dots, 20\} - \phi(w_6)$, не использованный при раскраске вершин, смежных с w_4 или с w_7, то красим w_1 цветом α, а затем красим вершину v цветом не из $\{1, 2, 3, 4, \alpha\}$. Противоречие. Значит, такого цвета α нет. Следовательно, $D(w_4) \geqslant 20$, $D(w_7) \geqslant 18$ и вершина w_1 получает от этих вершин суммарный заряд, не меньший $(1 - 8/18) + (1 - 8/20) = 3/5 + 5/9$. Поскольку w_2, w_5 и w_6 не являются 5-вершинами, вершина v получает по правилу R3 от w_1 заряд, не меньший

$$\frac{3}{5} + \frac{5}{9} - \frac{2}{3} = \frac{22}{45} > \frac{2}{15}.$$

Подслучай 2.2. $\phi(w_6) = 3$. Аналогично подслучаю 2.1 получаем $D(w_4) \geqslant 20$ и $D(w_6) \geqslant 19$. Значит, по правилу R3 вершина w_1 посылает вершине v заряд, не меньший

$$1 - \frac{8}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{8}{19}\right) - \frac{2}{3} = \frac{3}{5} + \frac{1}{12} + \frac{11}{76} - \frac{2}{3} > \frac{2}{15}.$$

Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть 5-вершина v смежна с вершинами $w_1, \dots, w_5$ (в этом циклическом порядке), где w_1, w_2 и v образуют 3-грань, а w_4v есть ребро. Если $ch^*(v) < 0$, то и w_1, и w_2 суть 7-вершины.*

Доказательство. Предположим, что лемма не верна для 5-вершины v. Тогда по леммам 7 и 8 степени вершин w_1 и w_2 больше шести. Если $8 \leqslant D(w_1), D(w_2) \leqslant 19$, то по лемме 4 имеем $D(w_3) \geqslant 20$, $D(w_5) \geqslant 20$, и по R1 вершина v получает от w_1, w_2, w_3 и w_5 суммарный заряд, не меньший

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 2\left(1 - \frac{8}{20}\right) = \frac{1}{6} + \frac{6}{5} = \frac{41}{30} > \frac{4}{3}.$$

Если $D(w_1) \geqslant 8$, $D(w_2) \geqslant 8$ и $D(w_1) \geqslant 20$, то v получает заряд, не меньший

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{8}{20}\right)+\left(1-\frac{8}{19}\right)+\left(1-\frac{8}{20}\right) \geqslant \frac{1}{6}+\frac{5}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{11}{19} \geqslant \frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

В обоих случаях это противоречит допущению, что $ch^*(v) < 0$.

Теперь предположим, что $D(w_1) = 7$ и $D(w_2) > 7$. Тогда w_2 посылает заряд $1/12$ на v и заряд $1/12$ на w_1. Но по лемме 6 вершина w_1

получает заряд 1/3 даже без учета этой 1/12. Значит, по правилу R3 вершина w_1 посылает вершине v заряд, не меньший 1/12. Вместе с зарядами, которые v получает от w_3 и w_5, вершина v получит суммарный заряд, не меньший

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\left(1-\frac{8}{19}\right)\left(1-\frac{8}{20}\right)=\frac{2}{12}+\frac{3}{5}+\frac{11}{19}=\frac{767}{570}>\frac{4}{3}.$$

Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть 5-вершина v смежна с вершинами $w_1,\dots,w_5$ (в этом циклическом порядке), где w_1, w_2 и v образуют 3-грань, а w_4v есть ребро (рис. 7, а). Если w_1 и w_2 являются 7-вершинами, то $ch^*(v)\geqslant 0$.*

Доказательство. Как и в леммах 7 и 8, мы доказываем, что вершина v получает заряд не менее 4/3.

Предположим, что лемма не верна для 5-вершины v. Допустим, что вершина w_1 смежна с вершинами $w_2, v, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8$ (в этом порядке), а w_2 смежна с вершинами $w_3, w_4, v, w_1, w_7, w_8, w_9$ (в этом порядке), как изображено на рис. 7, *б*. По лемме 3 вершина v получает от w_3 и w_5 заряд не менее 6/5. Поэтому ей достаточно получить еще 2/15.

Удалим вершины v, w_2 и w_1 и добавим ребра w_8w_3, w_3w_5 и w_5w_7. Ввиду минимальности карты M существует ациклическая 20-раскраска ϕ полученного мультиграфа. Пусть $\phi(\{w_8, w_3, w_5, w_7\}) = \{1,2,3,4\}$ (в этом порядке), как изображено на рис. 7, *в*. Теперь попытаемся покрасить вершины w_1 и w_2 так, чтобы получилась ациклическая 20-раскраска графа $G - v$, при которой цвета всех вершин $w_1,\dots,w_5$ различны. Этого будет достаточно для завершения доказательства.

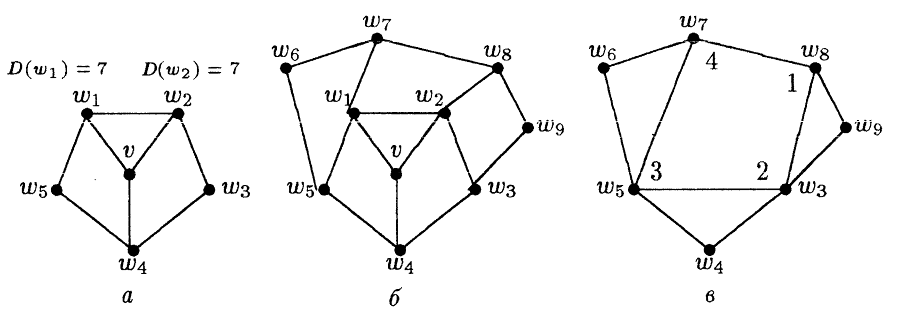


Рис. 7. Конфигурации для леммы 10

Случай 1. $\phi(w_4) = 5$.

Подслучай 1.1. $\phi(w_6), \phi(w_9) \notin \{1,2,3,4\}$. Если в множестве $\{6,\dots,20\}\setminus\{\phi(w_6),\phi(w_9)\}$ найдутся два цвета, не использованные при раскраске вершин, смежных с w_4, то вершины w_1 и w_2 можно покрасить

этими цветами. В противном случае $D(w_4) \geqslant 5+12$ и w_4 передает каждой вершине w_1 и w_2 заряд не менее $9/17$. Значит, по лемме 6 согласно правилу R3 каждая из вершин w_1 и w_2 передает вершине v заряд, не меньший $9/17 - 1/3 = 10/51 > 1/15$.

Подслучай 1.2. $\phi(w_6) \in \{1,2\}, \phi(w_9) \notin \{1,2,3,4\}$. Если $D(w_4) \geqslant 12$ и $D(w_9) \geqslant 10$, то вершины w_4 и w_9 дают вершине w_2 заряд, не меньший $4/12 + 2/10$, и согласно лемме 6 по правилу R3 вершина w_2 передает вершине v заряд не менее $2/10 > 2/15$. Противоречие. Значит, найдется такой цвет $\alpha \in \{6, \dots, 20\} - \phi(w_9)$, что при окраске вершины w_2 цветом α не возникает двухцветных циклов. Далее пытаемся окрасить w_1 каким-нибудь цветом $\beta \in \{6, \dots, 20\} - \alpha$. Если такую раскраску нельзя завершить, то $\phi(w_6) = 1$ и появляется цикл из цветов 1 и β. Тогда $D(w_6) \geqslant 14+3$ и $D(w_8) \geqslant 14+5$. Следовательно, w_6 и w_8 дают вершине w_1 суммарный заряд не менее $(1-8/17)+(1-8/19) = 9/17+11/19$. Значит, по лемме 6 согласно правилу R3 вершина w_1 дает вершине v заряд, не меньший $9/17 + 11/19 - 2/3 = 428/969 > 2/15$.

Подслучай 1.3. $\phi(w_6) \in \{1,2\}, \phi(w_9) \in \{3,4\}$. Годятся те же рассуждения, что и в подслучае 1.2.

Случай 2. $\phi(w_4) = 1$. Самый трудный случай здесь при $\phi(w_6) = 1$ и $\phi(w_9) = 4$.

Подслучай 2.1. Найдется цвет $\alpha \in \{5, \dots, 20\}$, при покраске которым вершины w_1 не возникает двухцветных циклов. Если нельзя покрасить w_2, то каждый цвет $\beta \in \{5, \dots, 20\} - \alpha$ должен быть использован при раскраске вершин, смежных либо с w_7 и w_9, либо с w_4 и w_8. Если при раскраске вершин, смежных с w_7 и w_9, использовано не менее 8 цветов из $\{5, \dots, 20\} - \alpha$, то $D(w_7) \geqslant 13$, $D(w_9) \geqslant 11$, и вершины w_7 и w_9 дают вершине w_2 заряд не менее $5/13 + 3/11$. В этом случае по правилу R3 вершина w_2 передает вершине v заряд не менее $5/13 + 3/11 - 1/3 > 2/15$. В противном случае не менее 8 цветов из $\{5, \dots, 20\} - \alpha$ использовано при раскраске вершин, смежных с w_4 и w_8. Тогда $D(w_4) \geqslant 13$, $D(w_8) \geqslant 13$ и вершины w_4 и w_8 дают вершине w_1 заряд не менее $2(1 - 8/13) = 10/13$, так что по правилу R3 вершина w_1 дает вершине v заряд не менее $10/13 - 1/3 = 17/39 > 2/15$.

Подслучай 2.2. Для любого цвета $\alpha \in \{5, \dots, 20\}$ при покраске вершины w_1 цветом α возникают двухцветные циклы. Это означает, что каждая вершина цвета α смежна не менее чем с двумя из вершин w_4, w_6 и w_8. Тогда $(D(w_4)-5)+(D(w_6)-3)+(D(w_8)-4) \geqslant 32$ и вершины w_4, w_6 и w_8 дают вершине w_1 суммарный заряд не менее $1 - 8/28 > 2/3$. Таким образом, по правилу R3 вершина v получает от w_1 заряд, не меньший $1/3$. Лемма доказана.

Из доказанных лемм следует, что $ch^*(v) \geqslant 0$ для любой вершины $v \in V(M)$. Это противоречие с формулой Эйлера завершает доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Algor I., Alon N.** The star arboricity of graphs // Discrete Math. 1989. V. 75, N 1–3. P. 11–22.
2. **Alon N., Marshall T. H.** Homomorphisms of edge-colored graphs and Coxeter groups // J. Algebraic Combinatorics. 1998. V. 2. P. 277–289.
3. **Alon N., Mohar B., Sanders D. P.** On acyclic colorings of graphs on surfaces // Israel J. Math. 1996. V. 94. P. 273–283.
4. **Archdeacon D.** Coupled coloring of planar maps // Congressus Numerantium. 1986. V. 39. P. 89–94.
5. **Borodin O. V.** On acyclic colorings of planar graphs // Discrete Math. 1979. V. 25, N 3. P. 211–236.
6. **Бородин О. В.** Решение задач Рингеля о вершинно-граневой раскраске плоских графов и о раскраске 1-планарных графов // Методы дискретного анализа в изучении реализации логических функций: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. Вып. 41. С. 12–26.
7. **Borodin O. V.** A new proof of 6 color theorem // J. Graph Theory. 1995. V. 19, N 4. P. 507–521.
8. **Borodin O. V., Kostochka A. V., Woodall D. R.** Acyclic colourings of planar graphs with large girth // J. London Math. Soc. (accepted).
9. **Grünbaum B..** Acyclic colorings of planar graphs // Israel J. Math. 1973. V. 14, N 3. P. 390–408.
10. **Jensen T. R., Toft B..** Graph coloring problems. New York: John & Sons, 1995.
11. **Kostochka A. V., Mel'nikov L. S.** Note to the paper of Grünbaum on acyclic colorings // Discrete Math. 1976. V. 14, N 4. P. 403–406.
12. **Nešetřil J., Raspaud A.** Colored homomorphisms of colored mixed graphs // KAM Ser. 98–376. Dept. of Applied Math. Charles Univ., Prague (Czech Republic) (to appear in J. Combinatorial Theory, Ser. B).
13. **Raspaud A., Sopena E.** Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs // Inform. Processing Letters. 1994. V. 51, N 4. P. 171–174.

14. **Ringel G.** Ein Sechsfarbenproblem auf der Kugel // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1965. Bd 29. S. 107–117.

15. **Ringel G.** A Six color problem on the sphere // Theory of Graphs. New York: Acad. Press, 1968. P. 265–269.

Адреса авторов:

О. В. Бородин
Новосибирский
государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090 Новосибирск, Россия.
А. В. Косточка
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
А. Распо, Э. Сопена
Университет Бордо I,
Лаборатория информатики,
33405 Таланс Седекс, Франция.

Статья поступила
16 февраля 1999 г.