ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 1999. Серия 1. Том 6, № 4, 36–43

УДК 519.1

О СВЯЗНОЙ РАСКРАСКЕ ГРАФОВ В ПРЕДПИСАННЫЕ ЦВЕТА*)

В. Г. Визинг

Изучаются такие раскраски вершин графа и ребер мультиграфа, когда одинаково окрашенные элементы образуют связный подграф. Устанавливаются связи возникающих при этом числовых характеристик с другими известными характеристиками.

Введение

Раскраска элементов графа (например, вершин или ребер) состоит в разбиении множества этих элементов на классы одинаково окрашенных. При этом к множеству элементов, образующих один класс, предъявляются определенные требования. В наиболее распространенной постановке требуется, чтобы одинаково окрашенные элементы не были смежными. Но возможны и другие версии.

В [4] рассмотрена задача раскраски ребер леса в предписанные цвета, когда все подграфы, порожденные одинаково окрашенными ребрами, являются связными. Такую раскраску О. П. Стеценко называет связной (устное сообщение). Связная раскраска естественно интерпретируется как разбиение на «сферы влияния». В настоящей статье изучается связная раскраска вершин, а также обобщается на мультиграфы результат работы [4].

1. Связная раскраска вершин

Пусть $G = (V, E)$ — обыкновенный граф (неориентированный, без петель и кратных ребер) [2, 3] с множеством вершин V и множеством ребер E, C — множество, элементы которого называются *цветами.* Предположим, что каждой вершине $v \in V$ поставлено в соответствие подмножество $A(v) \subseteq C$, которое будем называть *вершинным предписанием* и говорить о каждом цвете из $A(v)$, что он предписан вершине v. Если

*) Работа выполнена по проекту INTAS–OPEN–97–1001. Автор благодарен INTAS за финансовую поддержку исследований.

$|A(v)| = k$ ($|A(v)| \geqslant k$) для любой вершины $v \in V$, то будем говорить, что мощность предписания A равна k (не меньше k).

Раскраской f вершин графа G называется однозначное отображение $f : V \to C$ такое, что $f(v) \in A(v)$; для любой вершины $v \in V$ будем говорить, что при раскраске f вершина v окрашена в цвет $f(v)$.

Раскраска f называется *связной,* если каждый подграф, порожденный всеми одинаково окрашенными вершинами, связен.

Вершинное предписание называется *хроматичным,* если при этом предписании существует связная раскраска вершин графа.

Разумеется, существуют нехроматичные предписания. Например, если взять простую цепь длины 4, первой, третьей и пятой вершинам предписать множество цветов $\{1, 2\}$, а второй и четвертой вершинам — множество $\{3, 4\}$, то такое предписание не будет хроматичным.

Для графа $G = (V, E)$ обозначим через $\alpha(G)$ наименьшее натуральное число такое, что любое вершинное предписание является хроматичным при условии, что его мощность не меньше $\alpha(G)$ (определение будет эквивалентным, если слова «не меньше $\alpha(G)$» заменить словами «равна $\alpha(G)$»).

Теорема 1. *Пусть $G = (V, E)$ — граф с $|V| \geqslant 2$ и $|E| \geqslant 1$; G_1 — подграф, порожденный вершинами из $V \setminus \{v\}$; $G_2 = (V, E \setminus \{e\})$, где $v \in V$, $e \in E$. Тогда*

$$\alpha(G) - 1 \leqslant \alpha(G_1) \leqslant \alpha(G), \qquad (1)$$

$$\alpha(G) \leqslant \alpha(G_2) \leqslant \alpha(G) + 1. \qquad (2)$$

Доказательство. Докажем (1). При $\alpha(G) = 1$ утверждение (1) очевидно, так как в этом случае G и G_1 — полные графы. Пусть $\alpha(G) \geqslant 2$.

Возьмем вершинное предписание A мощности $\alpha(G) - 1$ для графа G, не являющееся хроматичным, и произвольное вершинное предписание A_1 для графа G_1 мощности $\alpha(G)$. Зафиксируем какой-либо цвет из множества $A(v)$ и удалим его из предписания A для всех вершин множества $V \setminus \{v\}$. Получим нехроматичное предписание мощности, не меньшей $\alpha(G) - 2$, для вершин графа G_1. Следовательно, $\alpha(G_1) > \alpha(G) - 2$ и левая часть (1) доказана. Далее, вершине v графа G предпишем $\alpha(G)$ цветов, не фигурирующих в предписании A_1 для вершин множества $V \setminus \{v\}$. Получим вершинное предписание мощности $\alpha(G)$ для графа G. Построим связную раскраску вершин графа G. Удалив вершину v, получим связную раскраску вершин графа G_1. Значит, $\alpha(G_1) \leqslant \alpha(G)$.

Докажем (2). При любом предписании мощности $\alpha(G_2)$ для вершин из V существует связная раскраска вершин графа G_2; эта же раскраска

будет, очевидно, связной раскраской вершин графа G. Значит, $\alpha(G_2) \geqslant \alpha(G)$.

Теперь докажем правое неравенство в (2). Пусть v_1 — вершина, инцидентная ребру e в графе G, A_2 — произвольное предписание мощности $\alpha(G)+1$ для вершин множества V. Окрасим вершину v_1 графа G_2 в какой-либо цвет из множества $A_2(v_1)$, а затем удалим этот цвет из предписаний для вершин множества $V\backslash\{v_1\}$. Каждой вершине множества $V\backslash\{v_1\}$ будет предписано не менее $\alpha(G)$ цветов. В силу (1) при этом предписании можно построить связную раскраску вершин подграфа графа G, порожденного вершинами из $V\backslash\{v_1\}$, получив связную раскраску вершин графа G_2. Следовательно, $\alpha(G) \leqslant \alpha(G_2) \leqslant \alpha(G)+1$. Теорема 1 доказана.

Обозначим через $\varepsilon(G)$ неплотность графа G, т. е. наибольшую мощность множества попарно несмежных вершин.

Теорема 2. *Для любого графа $G=(V,E)$ справедливо неравенство $\alpha(G) \geqslant \varepsilon(G)$.*

Доказательство. При $\varepsilon(G)=1$ неравенство очевидно. Пусть $\varepsilon(G)=k \geqslant 2$ и M — наибольшее множество, состоящее из k попарно несмежных вершин. Построим вершинное предписание мощности $k-1$, при котором вершинам множества M предписаны одинаковые множества из $k-1$ цветов, а остальным вершинам — $(k-1)$-элементные множества, состоящие из цветов, отсутствующих в предписаниях для вершин из M. Такое предписание не является хроматичным, так как при связной раскраске вершин графа G вершины из M должны быть окрашены в различные цвета, что невозможно. Поэтому $\alpha(G) \geqslant k = \varepsilon(G)$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если $G=(V,E)$ — двудольный граф, то*

$$\alpha(G)=\varepsilon(G). \tag{3}$$

Доказательство проводится индукцией по $\varepsilon(G)$. Если $\varepsilon(G)=1$, то $|V| \leqslant 2$ и (3) очевидно. Предположим, что $\varepsilon(G)=k \geqslant 2$; пусть A — произвольное вершинное предписание мощности k.

Известно [2, 3], что $\varepsilon(G)=|V|-\pi(G)$ для любого двудольного графа G, где $\pi(G)$ — мощность наибольшего паросочетания. Пусть P — наибольшее паросочетание в графе G. Рассмотрим граф $H=(V,P)$. Очевидно, что $\varepsilon(H)=\varepsilon(G)=k$. Кроме того, по теореме 1 имеем

$$\alpha(G) \leqslant \alpha(H). \tag{4}$$

Покажем, что $\alpha(H) \leqslant k$. Тогда из (4) и теоремы 2 будет следовать, что $\varepsilon(G) \leqslant \alpha(G) \leqslant \alpha(H) \leqslant k = \varepsilon(G)$. Отсюда вытекает справедливость равенства (3).

Если граф H имеет хотя бы одну изолированную вершину, то, удалив ее, получим граф H_1 с $\varepsilon(H_1) = \varepsilon(H) - 1 = k - 1$. По предположению индукции $\alpha(H_1) = k - 1$. Следовательно, $\alpha(H) \leqslant k$. Теперь предположим, что в графе H нет изолированных вершин. Так как $\varepsilon(H) = k$, то граф H содержит ровно k ребер $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$, образующих паросочетание, и $2k$ вершин $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ $(i = 1, 2, \dots, k)$. Если при каком-либо j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ выполняется соотношение $A(x_j) \cap A(y_j) \neq \varnothing$, то окрасим в некоторый цвет $c \in A(x_j) \cap A(y_j)$ вершины x_j и y_j. Затем рассмотрим подграф H_2 графа H, порожденный вершинами из $V - \{x_j, y_j\}$. Так как $\varepsilon(H_2) = k - 1$, то по предположению индукции $\alpha(H_2) = k - 1$. Поэтому если из предписаний для каждой вершины графа H_2 удалить цвет c, то получится вершинное предписание для графа H_2 мощности, не меньшей $k - 1$. При таком предписании можно построить связную раскраску вершин графа H_2. Окрасив вершины x_j и y_j в цвет c, получим связную раскраску вершин графа H. В силу произвольности предписания A имеем $\alpha(H) \leqslant k$. Наконец, рассмотрим случай, когда при любом $i = 1, 2, \dots, k$ выполняется соотношение $A(x_j) \cap A(y_j) = \varnothing$. Тогда для любого подмножества $W \subseteq V$ выполняется неравенство

$$\bigcup_{v \in W} A(v) \geqslant |W|. \tag{5}$$

Действительно, при $|W| \leqslant k$ неравенство (5) следует из условия $|A(v)| \geqslant k$ при любом $v \in V$. Если же $|W| > k$, то в W обязательно содержится пара вершин вида $\{x_r, y_r\}$ $(1 \leqslant r \leqslant k)$. Так как $A(x_r) \cap A(y_r) = \varnothing$, то $\bigcup\limits_{v \in W} A(v) \geqslant |W| \geqslant 2k \geqslant |W|$.

По теореме Холла семейство множеств $\{A(v)\}$, $v \in V$, имеет систему различных представителей. Иначе говоря, существует связная раскраска вершин графа H, при которой разные вершины окрашиваются в различные цвета. Отсюда следует, что снова $\alpha(H) \leqslant k$. Теорема 3 доказана.

Вопрос о зависимости между $\alpha(G)$ и $\varepsilon(G)$ в случае k-дольного графа G остается открытым, даже при $k = 3$. Оценить же сверху $\alpha(G)$ через $\varepsilon(G)$ для произвольного графа G невозможно. Чтобы убедиться в этом, обратимся к традиционной раскраске вершин графа в предписанные цвета $\{1,\ 5,\ 6\}$. При такой раскраске одинаково окрашенные вершины должны быть несмежными. Пусть $\chi_L(G)$, как обычно, обозначает наименьшее натуральное число такое, что при любом вершинном предписании мощности $\chi_L(G)$ существует указанная традиционная раскраска вершин.

Лемма 1. *Для любого графа G справедливо неравенство $\alpha(G) \leqslant \chi_L(\overline{G})$, где $\overline{G}$ — дополнительный граф.*

Доказательство. Пусть A — произвольное вершинное предписание мощности $\chi_L(\overline{G})$ для графа $\overline{G}$ (и для графа G), f — традиционная раскраска вершин графа $\overline{G}$. Так как одинаково окрашенные вершины графа $\overline{G}$ попарно не смежны, то они попарно смежны в графе G. Поэтому раскраска f вершин графа G является связной. Значит, $\alpha(G) \leqslant \chi_L(\overline{G})$. Лемма 1 доказана.

Теорема 4. *Пусть G — полный k-дольный граф. Тогда $\alpha(\overline{G}) = \chi_L(G)$.*

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно доказать, что $\alpha(\overline{G}) \geqslant \chi_L(G)$. Пусть A — произвольное вершинное предписание мощности $\alpha(\overline{G})$ для графа $\overline{G}$. Тогда существует связная раскраска f вершин графа $\overline{G}$. Так как граф $\overline{G}$ является объединением непересекающихся полных подграфов, то окрашенные одним цветом вершины принадлежат одному полному подграфу графа $\overline{G}$. Поэтому при раскраске f вершин графа G одинаково окрашенные вершины не смежны в графе G. Так как A — произвольное вершинное предписание для графа G мощности $\alpha(\overline{G})$, то $\chi_L(G) \geqslant \alpha(\overline{G})$. Теорема 4 доказана.

Дальнейшее изучение зависимости между $\alpha(G)$ и $\chi_L(\overline{G})$ представляется достаточно интересным. Однако вернемся к поставленному нами вопросу.

Обозначим через $K(n,n)$ полный двудольный граф, в каждой доле которого имеется n вершин. Известно [1, 5, 6], что $\chi_L(K(n,n)) \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда в силу теоремы 4 имеем $\alpha(\overline{K}(n,n)) \to \infty$ при $n \to \infty$, хотя $\varepsilon(\overline{K}(n,n)) = 2$. Таким образом, для произвольного графа G нельзя оценить сверху $\alpha(G)$ только через $\varepsilon(G)$.

2. Связная раскраска ребер

Будем рассматривать неориентированные мультиграфы без петель. Каждому ребру $e \in E$ мультиграфа $G = (V,E)$ предписано множество цветов $B(e)$. Раскраска ребер мультиграфа называется *связной,* если каждый подграф, порожденный всеми одинаково окрашенными ребрами, связен. Через $\beta(G)$ обозначается наименьшее натуральное такое, что если $|B(e)| \geqslant \beta(G)$ для любого ребра $e \in E$, то существует связная раскраска ребер мультиграфа G.

Теорема 5. *Пусть $G = (V,E)$ — мультиграф, в котором каждая компонента связности содержит четное число ребер. Тогда $\beta(G) \leqslant \frac{1}{2}|E|$.*

Теорема 5 является обобщением теоремы из [4], в которой предполагалось, что G — лес.

При доказательстве теоремы 5 используется следующая

Лемма 2. *Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф, в котором каждая компонента связности содержит четное число ребер и $|E| = 2m$. Тогда ребра в G можно занумеровать так, что ребра e_{2i-1} и e_{2i} смежны* $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Доказательство. Ясно, что лемму достаточно доказать для связного мультиграфа. Доказательство проводится индукцией по m. При $m = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что $m \geqslant 2$. Пусть v_0 — какая-либо вершина мультиграфа G. Положим $V_o = \{v_o\}$. Обозначим через V_j подмножество вершин мультиграфа G, находящихся от вершины v_o на расстоянии j $(j = 1, 2, \ldots)$. Тогда множество V разобьется на подмножества $V_o, V_1, \ldots, V_r$.

Определим понятие высоты ребра. Пусть $e = (v', v'')$, где $v' \in V_k$, $v'' \in V_l$ $(k \geqslant 0,\ r \geqslant l)$. Тогда высотой $h(e)$ ребра e назовем число $k + l$.

Возьмем какое-либо ребро наибольшей высоты и обозначим его через e_{2m}. Затем среди ребер, смежных с e_{2m}, выберем какое-либо ребро наибольшей высоты и обозначим его через e_{2m-1}. Покажем, что среди компонент связности мультиграфа $G - \{e_{2m-1}, e_{2m}\}$ есть только одна компонента, отличная от изолированной вершины.

Пусть $e_{2m} = (v_1, v_2)$. Так как e_{2m} — ребро наибольшей высоты, то $h(e_{2m}) \geqslant 2r - 1$ и ребро e_m инцидентно по меньшей мере одной вершине из V_r. Пусть, например, $v_2 \in V_r$. Если ребро e_{2m-1} инцидентно вершине v_2, то в G_1 из вершины v_o достижима любая вершина множества $V \backslash \{v_2\}$. Поэтому G_1 либо связен, либо состоит из компоненты связности с $2m-2$ ребрами и изолированной вершины v_2. Таким образом, в случае, когда ребра e_{2m-1} и e_{2m} инцидентны одной вершине из V_r, мультиграф G_1 имеет доказываемую структуру. Осталось рассмотреть случай, когда $e_{2m} = (v_1, v_2)$ и $e_{2m-1} = (v_1, v_3)$, где $v_1 \in V_{r-1}$, $v_2 \in V_r$, $v_2 \neq v_3$. Если $v_3 \in V_r$, то вершины v_2 и v_3 не смежны в G, так как в противном случае ребро (v_2, v_3) имело бы высоту $2r$, что противоречит равенству $h(e_{2m}) = 2r - 1$ и правилу выбора ребра e_{2m}. Вместе с тем в G_1 из v_o достижима любая вершина множества $V \backslash \{v_2, v_3\}$. Если $v_3 \in V_{r-1}$, то в G_1 из v_o достижима любая вершина множества $V \backslash \{v_2\}$. Наконец, если $v_3 \in V_{r-2}$, то в G_1 из v_o достижима любая вершина множества $V \backslash \{v_1, v_2\}$, причем так как $h(e_{2m}) = 2r - 3$, то вершины v_1 и v_2 не смежны в G_1. Таким образом, во всех случаях мультиграф G_1 имеет одну компоненту связности с $2m - 2$ ребрами и, быть может, изолированные вершины.

По предположению индукции ребра мультиграфа G_1 можно занумеровать так, чтобы ребра e_{2i-1} и e_{2i} были смежными $(i = 1, 2, \ldots, m - 1)$. Добавив ребра e_{2m-1} и e_{2m}, получим требуемую нумерацию ребер мультиграфа G. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 5. Пусть $|E| = 2m$ и B — произвольное реберное предписание такое, что $|B(e)| \geqslant m$ для любого $e \in E$. Нужно доказать, что существует связная раскраска ребер мультиграфа G.

Доказательство проводится индукцией по m. При $m = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что $m \geqslant 2$. Занумеруем ребра мультиграфа G так, как указано в лемме 2. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $B(e_{2j-1}) \cap B(e_{2j}) \neq \varnothing$ при некотором j, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Возьмем цвет $c \in B(e_{2j-1}) \cap B(e_{2j})$, окрасим в него ребра e_{2j} и e_{2j-1}, удалим цвет c из предписаний для остальных ребер. После удаления из G ребер e_{2j-1} и e_{2j} останется мультиграф H с $2m-2$ ребрами, в котором мощность предписания для каждого ребра в H не меньше $m-1$, а каждая компонента связности имеет четное число ребер, так как при $i \neq j$ ребра e_{2i-1} и e_{2i} смежны.

По предположению индукции существует связная раскраска ребер мультиграфа H. Так как цвет c не фигурирует при такой раскраске, то, добавив к H ребра e_{2j-1} и e_{2j}, окрашенные в цвет c, получим связную раскраску ребер мультиграфа G.

Случай 2. $B(e_{2i-1}) \cap B(e_{2i}) \neq \varnothing$ при всех $i = 1, 2, \ldots, m$.

В этом случае для любого подмножества $M \subseteq E$ справедливо неравенство $\left|\bigcup_{e \in M} B(e)\right| \geqslant |M|$. Действительно, это так при $|M| \leqslant m$, ибо $|B(e)| \geqslant m$ для любого $e \in E$. Если же $|M| \geqslant m + 1$, то существует k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ такое, что $e_{2k-1} \in M$ и $e_{2k} \in M$. Следовательно,

$$\left|\bigcup_{e \in M} B(e)\right| \geqslant |B(e_{2k-1}) \cup B(e_{2k})| = |B(e_{2k-1})| + |B(e_{2k})| \geqslant 2v \geqslant |M|.$$

По теореме Холла существует раскраска ребер мультиграфа G, при которой различные ребра получают различные цвета. Такая раскраска является связной. Теорема 5 доказана.

По теореме 2 для любого мультиграфа G справедливо неравенство $\beta(G) \geqslant \pi(G)$, где $\pi(G)$ — мощность наибольшего паросочетания в G.

Гипотеза. Для любого мультиграфа G

$$\beta(G) \leqslant \max\left(\pi(G), \frac{1}{2}|E(G)|\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Раскраска вершин графа в предписанные цвета // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1976. Вып. 29. С. 3–10.

2. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
3. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1987.
4. **Стеценко О. П.** Об одном виде раскраски ребер графа в предписанные цвета // Дискрет. математика. 1997. Т. 9, вып. 4. С. 92–93.
5. **Erdös P., Rubin A. L., Taylor H.** Choosability in graphs // Congr. Numerantium. 1980. V. XXVI. P. 125–157.
6. **Tuza Z.** Graph colorings with local constraints — a survey // Discussiones Mathematicae. Graph Theory. 1997. V. 17, N 2. P. 161–228.

Адрес автора:

Одесская гос. академия
пищевых технологий,
ул. Канатная, 112,
270039 Одесса, Украина.
E-mail: vizing@osaft.odessa.ua

Статья поступила
9 августа 1999 г.